Στοχαστικές Ανελίξεις - Σεπτέμβριος 2015

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.

(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.

(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).

(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.

Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $p, q > 0, p + q = 1$.

(α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης $p_{00}^{(2)}, p_{00}^{(3)}, p_{00}^{(5)}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική.

(γ) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Ένα συμμετρικό ζάρι έχει τους αριθμούς 1,1,2,2,8,8 στις πλευρές του. Με το ζάρι αυτό παίζεται το παρακάτω παιχνίδι: Το ζάρι ρίχνεται διαδοχικά μέχρι την πρώτη φορά που ο αριθμός που θα εμφανιστεί να είναι αυστηρά μικρότερος από τον αμέσως προηγούμενο. Τότε το παιχνίδι σταματά και ο παίκτης κερδίζει ένα ποσό σε ευρώ ίσο με τον αριθμό που είχε εμφανιστεί στην προτελευταία ρίψη (δηλαδή το μέγιστο αριθμό ρεκόρ που έχει εμφανιστεί). Για παράδειγμα αν οι διαδοχικές ρίψεις είναι 1,1,1,2,2,8,8,8,2 τότε το παιχνίδι θα σταματήσει στην 9η ρίψη και ο παίκτης θα κερδίσει 8 ευρώ.

(α) Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων σε ένα παιχνίδι.

(β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες στο τέλος του παιχνιδιού ο παίκτης να κερδίσει 2 ή 8 ευρώ.

(Υπόδειξη) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, όπου η κατάσταση X_n παίρνει την τιμή 0 αν το παιχνίδι δεν έχει αρχίσει, 1,2,8 αν η αμέσως προηγούμενη ρίψη ήταν 1,2,8, αντίστοιχα, και 20,80, αν το παιχνίδι έχει τελειώσει με τιμή ρεκόρ 2 ή 8, αντίστοιχα.

Συνέχεια πίσω

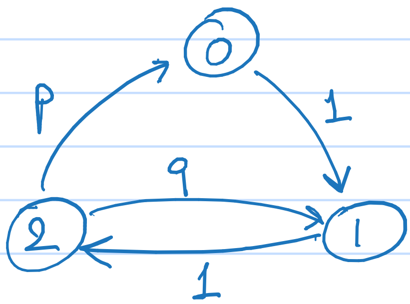
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Ένας εργαζόμενος έχει ένα αυτοκίνητο που χρησιμοποιεί μόνο για τις μετακινήσεις του από το σπίτι στο γραφείο. Το αυτοκίνητο το χρησιμοποιεί μόνο όταν βρέχει και μόνο αν το έχει διαθέσιμο όταν φεύγει, διαφορετικά περπατάει. Για παράδειγμα, αν το πρωί το αυτοκίνητο είναι στο σπίτι και βρέχει, θα πάει στο γραφείο με το αυτοκίνητο, ενώ αν δε βρέχει ή αν το αυτοκίνητο δεν είναι στο σπίτι θα περπατήσει. Αντίστοιχα το απόγευμα αν το αυτοκίνητο είναι στο γραφείο και βρέχει θα επιστρέψει στο σπίτι με το αυτοκίνητο, ενώ αν δε βρέχει ή αν το αυτοκίνητο δεν είναι στο γραφείο θα περπατήσει. Η πιθανότητα βροχής είναι ίση με p και το πρωί και το απόγευμα και τα ενδεχόμενα βροχής πρωί ή απόγευμα και μεταξύ διαφορετικών ημερών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
Να βρεθεί το ποσοστό ημερών που ο εργαζόμενος θα περπατήσει βρεγμένος τουλάχιστον μια φορά μέσα στη μέρα.
(Υπόδειξη) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, όπου η κατάσταση X_n παίρνει την τιμή 1 ή 0, αν το πρωί της μέρας n το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σπίτι ή στο γραφείο, αντίστοιχα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Στη στάση ενός λεωφορείου φτάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Το λεωφορείο έχει άπειρη χωρητικότητα και περνάει από τη στάση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό μ, ανεξάρτητη αυτής των επιβατών.
(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου που περιγράφει τον αριθμό επιβατών που περιμένουν στη στάση και να γράψετε τον πίνακα και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.
(β) Να δείξετε ότι η διαδικασία είναι εργοδική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.
(γ) Σε τι ποσοστό χρόνου (μέσα σε άπειρο ορίζοντα) η στάση είναι άδεια;

Απαντήσεις

Πρόβλημα 1

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι:



(a) $p_{00}^{(2)} = 0$: Ξεκινώντας από 0, δεν υπάρχει τρόπος να επιστρέψει σε 2 βήματα

$$p_{00}^{(3)} = p_{01} p_{12} p_{20} = q$$

$$p_{00}^{(5)} = p_{01} p_{12} p_{21} p_{12} p_{20} = q \cdot p$$

(b) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη, επομένως είναι θετικά επαναληπτική.
Η περίοδος της κατάστασης 0 είναι

$$d_0 = \text{ΜΚΔ}\left\{n : p_{00}^{(n)} > 0\right\}.$$

Επειδή από το (a) έχουμε δεί ότι $p_{00}^{(3)} > 0$, $p_{00}^{(5)} > 0$, προκύπτει ότι $d_0 \leq \text{ΜΚΔ}\{3,5\} = 1 \Rightarrow d_0 = 1$, δηλ. η 0 είναι απεριοδική. Επειδή η περιοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης, η αλυσίδα είναι απεριοδική.

(γ) Επειδή η αλυσίδα είναι θ. επαναληπτική και απεριοδική, υπάρχει οριακή κατανομή $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, $j = 0, 1, 2$, που συμπίπτει με τη μοναδική στάσιμη κατανομή:

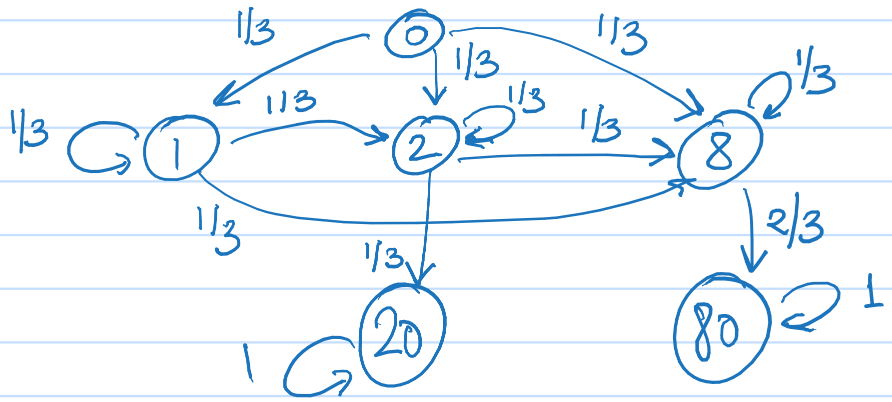
$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_2 p \\ \pi_2 &= \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_2 p + \pi_2 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \pi_2 &= \frac{1}{2+p} \\ \pi_1 &= \frac{1}{2+p} \\ \pi_0 &= \frac{p}{2+p} \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες οριακές πιθανότητες είναι:

$$\lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \pi_0 = \frac{p}{2+p}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \pi_1 = \frac{1}{2+p}$$

Πρόβλημα 2

Οι πιθανότητες των ενδείξεων 1, 2, 8 είναι όλες ίσες με $2/6 = 1/3$.
Έστω $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα που δίνεται στην υπόδειξη. Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι:



Για παράδειγμα στην κατάσταση 2 το μέχρι τώρα ρεκόρ των αποτελεσμάτων είναι 2. Αν η επόμενη ρίψη είναι 1 το παιχνίδι θα τερματίσει στην κατάσταση 20. Αν είναι 2 θα συνεχίσει από την ίδια κατάσταση με ρεκόρ 2, ενώ αν είναι 8 θα συνεχίσει με ρεκόρ 8.

Οι καταστάσεις 20 και 80 είναι απορροφητικές.

(a) Με βάση το παραπάνω μοντέλο, ο αριθμός ρίψεων σε ένα παιχνίδι είναι ο χρόνος πρώτης μετάβασης από την κατάσταση 0 στο σύνολο $\{20, 80\}$.
Για να τον υπολογίσουμε, έστω f_i ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την κατάσταση i στο σύνολο $\{20, 80\}$.

Προφανώς ισχύει $f_{20} = f_{80} = 0$. Για τις υπόλοιπες καταστάσεις έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
f_0 &= 1+\frac{1}{3}f_1+\frac{1}{3}f_2+\frac{1}{3}f_8 \\
f_1 &= 1+\frac{1}{3}f_1+\frac{1}{3}f_2+\frac{1}{3}f_8 = f_0 \\
f_2 &= 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}f_2+\frac{1}{3}f_8 \\
f_8 &= 1+\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}f_8
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}f_8 = 1 \Rightarrow f_8 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3}f_2 = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f_2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2}{3}f_1 = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow f_1 = f_0 = \frac{27}{8}$$

Επομένως η αναμενόμενη διάρκεια ενός παιχνιδιού είναι $f_0 = \frac{27}{8}$ ρίψεις.

(β) Με βάση το παραπάνω μοντέλο η πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει στην κατάσταση 20 είναι η πιθανότητα απορρόφησης $x_{0,20}$ από την κατάσταση 0 στην 20, κ' αντίστοιχα στην 80 η πιθανότητα απορρόφησης $x_{0,80}$. Επειδή η αφυσίδα θα απορροφηθεί σίγουρα σε μια από τις 20 ή 80, ισχύει $x_{0,20}+x_{0,80}=1$.

Για να υπολογίσουμε την $x_{0,20}$, έστω $y_i = x_{i,20}$ η πιθανότητα απορρόφησης από την κατάσταση i στην κατάσταση 20. Προφανώς ισχύει $y_{20}=1$, $y_{80}=0$.
Για να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα y_i έχουμε:

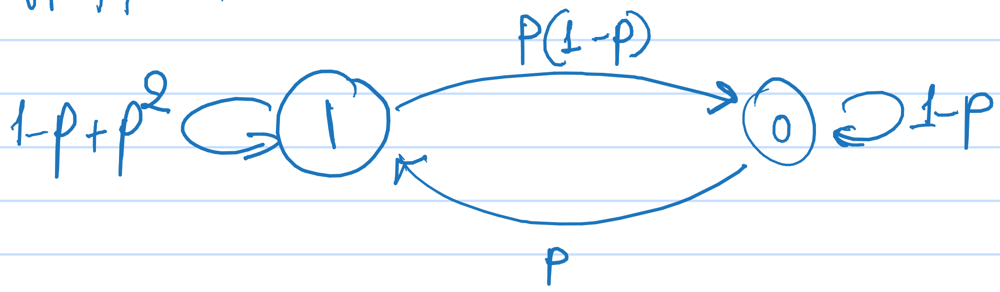
$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \tfrac{1}{3} y_1 + \tfrac{1}{3} y_2 + \tfrac{1}{3} y_8 \\ y_1 &= \tfrac{1}{3} y_1 + \tfrac{1}{3} y_2 + \tfrac{1}{3} y_8 = y_0 \\ y_2 &= \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3} y_2 + \tfrac{1}{3} y_8 \\ y_8 &= \tfrac{1}{3} y_8 + \tfrac{2}{3}\cdot 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & y_8 = 0 \\ & \Rightarrow \tfrac{2}{3} y_2 = \tfrac{1}{3} \Rightarrow y_2 = \tfrac{1}{2} \\ & \tfrac{2}{3} y_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot 0 = \tfrac{1}{6} \Rightarrow \\ & \Rightarrow y_1 = y_0 = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως $y_0 = X_{0,20} = \frac{1}{4}$ και $X_{0,80} = 1 - X_{0,20} = \frac{3}{4}$

Δηλαδή η πιθανότητα ο παίκτης να κερδίσει 2 ευρώ είναι $1/4$ κ' να κερδίσει 8 ευρώ είναι $3/4$.

Πρόβλημα 3

Με βάση τη Μαρκοβιανή αλυσίδα της υπόδειξης, το διάγραμμα μεταβάσεων είναι:



Αν $X_n = 1$ δηλ. το πρωί το αυτοκίνητο είναι στο σπίτι:
Για να είναι το άλλο πρωί στο γραφείο πρέπει να βρέχει το πρωί και να μη βρέχει το απόγευμα, έτσι ώστε να το πάρει το πρωί και να το αφήσει στο γραφείο.
Επομένως $P_{10} = p(1-p)$ και $P_{11} = 1 - P_{01}$.

Αν $X_n = 0$, δηλαδή το πρωί το αυτοκίνητο είναι στο γραφείο, τότε το πρωί σίγουρα θα περπατήσει, ανεξάρτητα από τον καιρό. Το απόγευμα θα επιστρέψει

στο σπίτι με το αυτοκίνητο μόνο αν βρέχει, δηλ. με πιθ. p.
Επομένως $P_{01} = p$, $P_{00} = 1-p$.

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική, επομένως έχει μοναδική στάσιμη κατανομή:

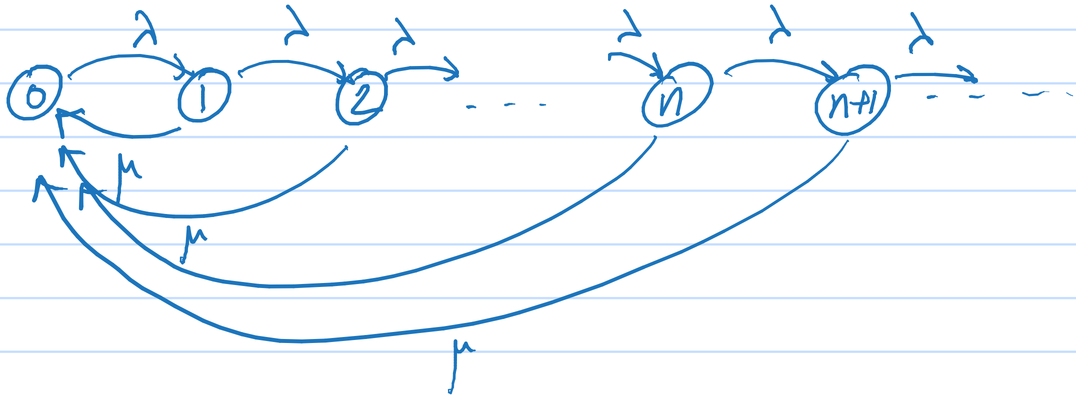
$$\pi_0 = p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = (1-p)\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow (1+1-p)\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2-p}, \pi_0 = \frac{1-p}{2-p}$$

Τέλος, από τις μέρες που $X_n = 1$, η πιθανότητα να περπατήσει βρεγμένος είναι $(1-p)p$, δηλαδή να μη βρέχει το πρωί κ' να βρέχει το απόγευμα.
Παρόμοια αν $X_n = 0$, η πιθανότητα να περπατήσει βρεγμένος είναι να βρέχει το πρωί, δηλαδή p, γιατί το απόγευμα το αυτοκίνητο θα είναι στο γραφείο.
Επομένως η πιθανότητα (δηλαδή και το ποσοστό ημερών) να περπατήσει βρεγμένος είναι

$$\pi_1 \cdot p(1-p) + \pi_0 \cdot p = \frac{p(1-p)}{2-p} + \frac{p(1-p)}{2-p} = \frac{2p(1-p)}{2-p}$$

Πρόβλημα 4 (a) Έστω $X(t)$ ο αριθμός επιβατών που περιμένουν στη στάση τη στιγμή t. Η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ κ' διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



δηλαδή οι ρυθμοί μετάβασης είναι

$$q_{n,n+1}=\lambda, \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$q_{n,0}=\mu, \quad n=1,2,\ldots$$

$$q_{ij}=0 \quad \text{διαφορετικά.}$$

(β)

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Επειδή είναι άπειρη, μπορεί να είναι είτε περιοδική είτε θετικά ή μηδενικά επαναληπτική. Γνωρίζουμε ότι σε αυτή την περίπτωση είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική θετική λύση των εξισώσεων στάσιμης κατανομής:

$$P_0\lambda = P_1\mu + P_2\mu + \cdots = \mu\sum_{i=1}^{\infty} P_i$$

$$P_1(\lambda+\mu) = P_0\lambda$$

$$P_2(\lambda+\mu) = P_1\lambda$$

$$\vdots$$

$$P_{n+1}(\lambda+\mu) = P_n\lambda$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_i = 1$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε: $P_0\lambda = (1-P_0)\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Επομένως: $p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} p_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί επομένως η μοναδική λύση

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Επειδή $p_n > 0 \ \forall n$, η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική.

(γ) Το ποσοστό χρόνου που η στάση είναι άδεια είναι ίσο με $p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.