Στοχαστικές Ανελίξεις - Ιανουάριος 2016

ΟΔΗΓΙΕΣ
(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.
(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.
Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

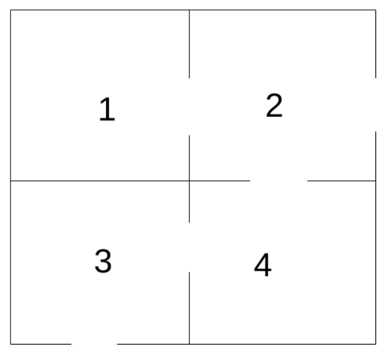
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας.
(β) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{35}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{43}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{31}^{(n)}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Ένα κατάστημα πωλεί ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση σε κάθε περίοδο είναι είτε ένα κομμάτι με πιθανότητα p ή μηδενική με πιθανότητα $1 - p$. Αν στην αρχή μιας περιόδου δεν υπάρχει αυτό το προϊόν στην αποθήκη, ο ιδιοκτήτης κάνει μια παραγγελία στον προμηθευτή του για δύο κομμάτια του προϊόντος. Όποτε γίνεται παραγγελία στον προμηθευτή υπάρχει κόστος διανομής K, ανεξάρτητα από την ποσότητα που παραγγέλλεται. Η παραγγελία φτάνει στο κατάστημα ακαριαία και είναι διαθέσιμη για ενδεχόμενη πώληση την τρέχουσα περίοδο. Επιπλέον, υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης ίσο με h για κάθε κομμάτι προϊόντος που βρίσκεται στην αποθήκη στην αρχή μιας περιόδου (πριν γίνει παραγγελία).
(α) Να βρεθεί το μέσο κόστος ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα.
(β) Να επαναληφθεί το (α) αν κάθε φορά που γίνεται παραγγελία παραγγέλλεται ένα κομμάτι αντί για δύο (το κόστος διανομής συνεχίζει να είναι ίσο με K).
(γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ K και h έτσι ώστε να συμφέρει να γίνεται πραγγελία δύο κομματιών αντί για ένα κάθε φορά;
(Υπόδειξη) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, όπου η κατάσταση X_n δηλώνει τον αριθμό κομματιών στην αποθήκη στην αρχή της περιόδου n, πριν γίνει ενδεχόμενη παραγγελία.

Συνέχεια πίσω

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Ένα όχημα κινείται μέσα στο χώρο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε κάθε βήμα το όχημα διασχίζει ένα από τα περάσματα στο δωμάτιο που βρίσκεται με ίσες πιθανότητες το καθένα. Αν το όχημα διασχίσει ένα από τα περάσματα που οδηγούν έξω από το χώρο παραμένει έξω για πάντα.

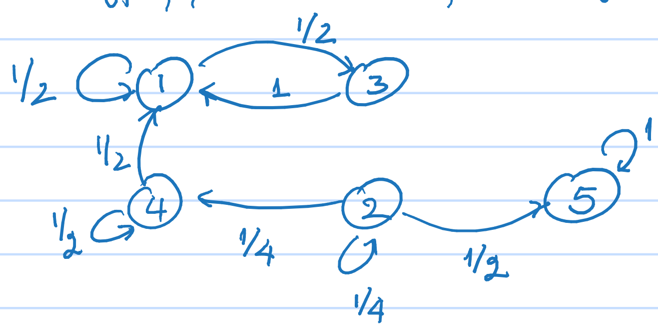


(α) Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι το όχημα να βρεθεί έξω από το χώρο.
(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα όταν το όχημα βγει από το χώρο αυτό να συμβεί απο την έξοδο του δωματίου 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν M μηχανήματα που λειτουργούν ταυτόχρονα. Κάθε μηχάνημα παρουσιάζει βλάβη σε τυχαία χρονικά διαστήματα, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μηχανήματα. Ο χρόνος μέχρι να παρουσιαστεί βλάβη σε κάποιο μηχάνημα ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο f. Κάθε μηχάνημα που παθαίνει βλάβη τίθεται εκτός λειτουργίας. Όταν όλα τα μηχανήματα τεθούν εκτός λειτουργίας αρχίζει συνολική επισκευή. Ο χρόνος επισκευής ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο r. Στο τέλος της επισκευής όλα τα μηχανήματα είναι σε κανονική κατάσταση και αρχίζουν να λειτουργούν.
(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου που περιγράφει τον αριθμό μηχανημάτων που λειτουργούν σε κάθε χρονική στιγμή και να δώσετε τον πίνακα και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.
(β) Να δείξετε ότι η διαδικασία είναι εργοδική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.
(γ) Σε τι ποσοστό χρόνου (μέσα σε άπειρο ορίζοντα) δε λειτουργεί κανένα μηχάνημα;

Στοχαστικές Ανελίξεις – Απαντήσεις Διαγωνίσματος 22-1-2016.

Πρόβλημα 1 Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος είναι:



Βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο κλειστές κλάσεις:

$C_1 = \{1, 3\}$ θετικά επαναληπτική κ' απεριοδική $(p_{11} > 0)$

$C_2 = \{5\}$ απορροφητική,

$T = \{2, 4\}$ σύνολο παροδικών καταστάσεων.

Η οριακή κατανομή δεδομένου ότι έχει γίνει απορρόφηση στην κλάση C_1 είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3}, \ \pi_3 = \frac{1}{3}$$

κ' δεδομένου ότι έχει γίνει απορρόφηση στην C_2: $\pi_5 = 1$.

Οι πιθανότητες απορρόφησης από $i \in T$ στις C_1, C_2 είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x_{2,C_1} = \frac{1}{4}\cdot x_{4,C_1} + \frac{1}{4}x_{2,C_1} + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ x_{4,C_1} = \frac{1}{2}x_{4,C_1} + \frac{1}{2}\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{4,C_1} = 1 \\ \frac{3}{4}x_{2,C_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{2,C_1} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Επομένως $x_{4,C_2} = 1 - x_{4,C_1} = 0$, $\quad x_{2,C_2} = 1 - x_{2,C_1} = \frac{2}{3}$

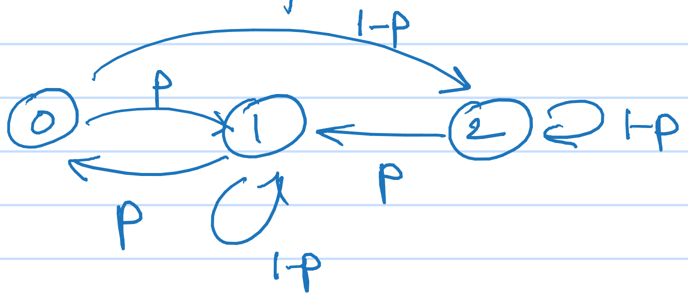
Με βάση τα παραπάνω, τα ζητούμενα όρια είναι:

$\lim p_{21}^{(n)} = x_{2,C_1}\pi_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $\quad \lim p_{35}^{(n)} = 0$, $\quad \lim p_{4,3}^{(n)} = x_{4,C_1} = \frac{1}{3}$,

$\lim p_{31}^{(n)} = \pi_1 = \frac{2}{3}$

Πρόβλημα 2

(a) Έστω X_n ο αριθμός προϊόντων σε απόθεμα στην αρχή της περιόδου n, πριν γίνει ενδεχόμενη παραγγελία. Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος είναι:



Από τις καταστάσεις 1 κ' 2, δε γίνεται παραγγελία, επομένως στην επόμενη περίοδο η κατάσταση είτε θα μειωθεί κατά ένα αν γίνει πώληση, είτε θα παραμείνει η ίδια αν δε γίνει πώληση (με πιθανότητες p, $1-p$ αντίστοιχα). Αν στην αρχή της περιόδου είναι $X_n=0$, τότε γίνεται παραγγελία και η περίοδος ξεκινά με 2 προϊόντα σε απόθεμα. Αν στη διάρκεια της περιόδου γίνει πώληση η επόμενη κατάσταση θα είναι ίση με 1, διαφορετικά η επόμενη κατάσταση θα είναι η 2.

Η ΜΑΔΧ που προκύπτει είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική. Επομένως η μοναδική στάσιμη κατανομή είναι:

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 p \\ \pi_2 &= \pi_0(1-p) + \pi_2(1-p) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 p \\ \pi_2 p &= \pi_0(1-p) = \pi_1 p(1-p) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 p \\ \pi_2 &= \pi_1(1-p) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_1 p + \pi_1 + \pi_1(1-p) = 1 \Rightarrow \begin{aligned} \pi_1 &= 1/2 \\ \pi_0 &= \tfrac{1}{2}p \\ \pi_2 &= \tfrac{1}{2}(1-p) \end{aligned}$$

Για να βρούμε το μέσο κόστος σε άπειρο ορίζοντα, χρειαζόμαστε τα κόστη μιας περιόδου, c_i, $i=0,1,2$.

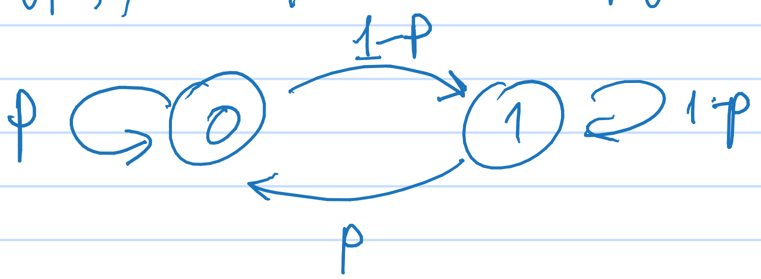
$c_0 = K$ (επειδή στην κατ. 0 γίνεται παραγγελία κ' δεν υπάρχει κόστος αποθήκευσης)

$c_1 = h$, $c_2 = 2h$

Επομένως $\bar{C} = c_0\pi_0 + c_1\pi_1 + c_2\pi_2 = \frac{1}{2}pK + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(1-p)2h$

$= \frac{1}{2}pK + \left(\frac{3}{2} - p\right)h$.

(β) Αν η παραγγελία κάθε φορά είναι για ένα κομμάτι η διαδικασία έχει χώρο καταστάσεων $\{0,1\}$ κ' το διάγραμμα προκύπτει ανάλογα με το (α):



Και αυτή η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη θετικά επαναληπτική, κ' η μοναδική στάσιμη κατανομή είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_0 = \pi_0 p + \pi_1 p \\ \pi_0 + \pi_1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0(1-p) = (1-\pi_0)p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 = p, \quad \pi_1 = 1-p$$

Επίσης εδώ ισχύει $c_0 = K$, $c_1 = h$, επομένως το μέσο κόστος σε άπειρο ορίζοντα είναι:

$$\tilde{C} = \pi_0 c_0 + \pi_1 c_1 = pK + (1-p)h$$

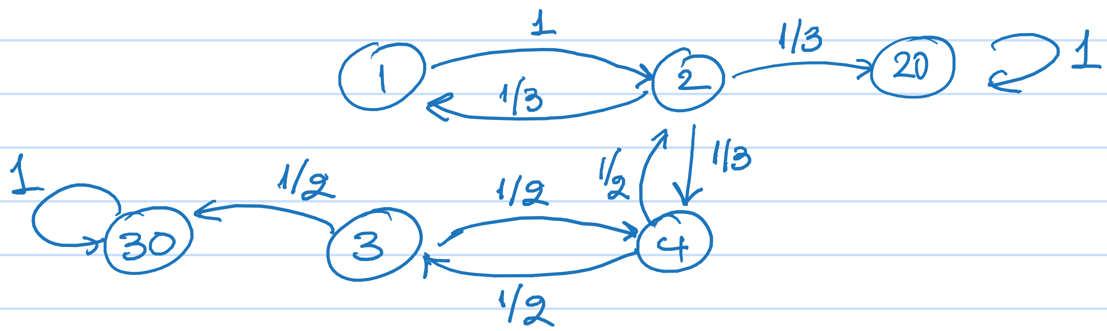
(γ) Από τις εκφράσεις κόστους στα (a) και (b) προκύπτει

$$\bar{C} < \tilde{C} \Rightarrow \frac{1}{2} pK + \left(\frac{3}{2} - p\right) h < pK + (1-p) h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} h < \frac{1}{2} pK \Rightarrow \frac{h}{K} < p$$

Πρόβλημα 3 Ορίζουμε μια ΜΑΔΧ $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$, όπου $X_n = i$, $i=1,2,3,4$, αν το όχημα στην αρχή της περιόδου n βρίσκεται στο δωμάτιο i, $X_n = 20$ αν έχει βγει από την έξοδο του δωματίου 2, κ' $X_n = 30$ αν έχει βγει από την έξοδο του δωματίου 3.

Το διάγραμμα μεταβάσεων ενός βήματος είναι:



Οι καταστάσεις 20 κ' 30 είναι απορροφητικές κ' οι 1,2,3,4 παροδικές.

Έστω f_i, $i=1,2,3,4$ ο αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης σε οποιαδήποτε από τις 20, 30, δεδομένου ότι $X_0 = i$:

$$f_i = E\left[\min\{n : X_n = 20 \text{ ή } X_n = 30\} \mid X_0 = i\right].$$

Με ανάλυση ενός βήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

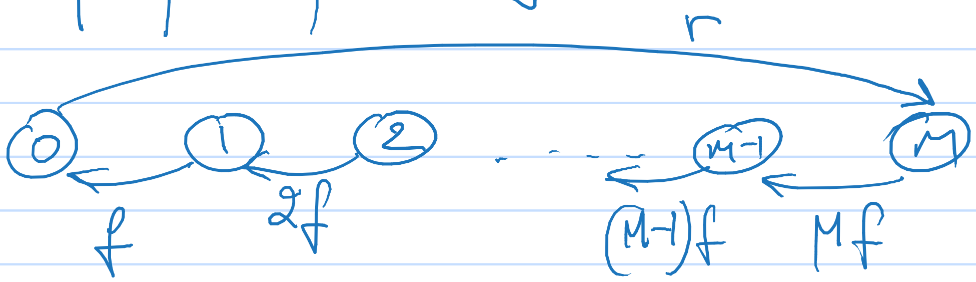
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 1 + f_2 \\ f_2 &= 1 + \tfrac{1}{3} f_1 + \tfrac{1}{3} f_4 + \tfrac{1}{3}\cdot 0 \\ f_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} f_4 + \tfrac{1}{2}\cdot 0 \\ f_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} f_2 + \tfrac{1}{2} f_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f_1 &= 11/2 \\ f_2 &= 9/2 \\ f_3 &= 7/2 \\ f_4 &= 5 \end{aligned}$$

(β) Έστω x_{i2} η πιθανότητα απορρόφησης στη 2ο, δεδομένου $X_0 = i$ κ' x_{i3} αντίστοιχα για την 3ο. Προφανώς ισχύει $x_{i2} + x_{i3} = 1$, $i = 1,2,3,4$.

Για τις x_{i2} ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} x_{12} &= x_{22} \\ x_{22} &= \tfrac{1}{3} x_{12} + \tfrac{1}{3} x_{42} + \tfrac{1}{3}\cdot 1 \\ x_{32} &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot x_{42} \\ x_{42} &= \tfrac{1}{2} x_{32} + \tfrac{1}{2} x_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{12} &= 3/4 \\ x_{22} &= 3/4 \\ x_{32} &= 1/4 \\ x_{42} &= 1/2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_{13} &= 1/4 \\ x_{23} &= 1/4 \\ x_{33} &= 3/4 \\ x_{43} &= 1/2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4 Έστω $X(t)$ ο αριθμός μηχανημάτων που λειτουργούν τη χρονική στιγμή t. Η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,\dots,M\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Στην κατάσταση 0 όλα τα μηχανήματα επισκευάζονται ταυτόχρονα κ' γίνονται όλα μαζί διαθέσιμα με ρυθμό r. Στην κατάσταση $i>0$ κάθε ένα από τα i μηχανήματα που λειτουργούν μπορεί να χαλάσει με ρυθμό f, επομένως ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση $i-1$ είναι $q_{i,i-1} = if$.
Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης είναι

$$Q = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f & -f & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2f & -2f & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Mf & -Mf \end{pmatrix}$$

(β) Η διαδικασία είναι αδιαχώριστη και, επειδή $|S|<\infty$, θετικά επαναληπτική. Επίσης ως διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι απεριοδική. Η μοναδική στάσιμη κατανομή προσδιορίζεται από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\left.\begin{aligned} &P_0 r = P_1 f \\ &P_1 f = P_2 \cdot 2f \\ &\vdots \\ &P_n \cdot nf = P_{n+1} \cdot (n+1) f \quad n=1,2,\dots,M-1 \\ &P_0 + \dots + P_M = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P_1 f = P_2 \cdot 2f = P_3 \cdot 3f = \dots = P_M \cdot Mf = P_0 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{P_0 r}{i f}, \quad i=1,2,\dots,M \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{M} P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{M} \frac{P_0 r}{i f} = P_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{f} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{i}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \frac{r}{f} \sum_{i=1}^{M} 1/i}, \quad P_j = \frac{\frac{r}{f} \frac{1}{j}}{1 + \frac{r}{f} \sum_{i=1}^{M} 1/i}, \quad j=1,\dots,M$$

(γ) Το ποσοστό χρόνου που δε λειτουργεί κανένα μηχάνημα είναι ίσο με

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{r}{f} \sum_{i=1}^{M} 1/i}$$