Στοχαστικές Ανελίξεις - Ιούνιος 2016

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.
(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.
Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Στο εργαστήριο ενός φωτογράφου υπάρχουν δύο φωτιστικά οροφής που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Κάθε μέρα κάθε ένα από αυτά έχει πιθανότητα p να καεί. Ο φωτογράφος έχει αποφασίσει ότι θα αλλάζει τις λάμπες μόνο όταν κάποιο πρωί που μπαίνει στο εργαστήριο είναι και οι δύο καμένες. Η αντικατάσταση μπορεί να γίνει μόνο το πρωί και είναι ακαριαία. Η λάμπα του κάθε φωτιστικού κοστίζει d και όποτε γίνεται αντικατάσταση υπάρχει ένα κόστος εργασίας ίσο με K, ανεξάρτητα από το πόσες λάμπες αλλάζονται. Αν κάποια μέρα λειτουργεί συνεχώς μόνο ένα φωτιστικό ή αν καεί μόνο το ένα στη διάρκεια της μέρας, τότε υπάρχει ένα κόστος ίσο με c_1 λόγω μειωμένης παραγωγικότητας. Αν κάποια μέρα καούν και οι δύο λάμπες υπάρχει κόστος ίσο με c_2 λόγω μηδενικής παραγωγικότητας.
(α) Να οριστεί μια μαρκοβιανή διαδικασία που περιγράφει τη λειτουργία των φωτιστικών και να βρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων πρώτης μετάβασης.
(β) Να βρεθεί το ποσοστό ημερών που το εργαστήριο λειτουργεί με ελλιπή φωτισμό ή μηδενικό φωτισμό. (Οι συνθήκες φωτισμού μιας μέρας καθορίζονται από τη χειρότερη κατάσταση φωτισμού της μέρας).
(γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο ημερήσιο κόστος σε μεγάλο ορίζοντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Μια έρευνα σχετικά με τους τηλεθεατές της χώρας έχει δώσει τα παρακάτω αποτελέσματα: Έστω X_t η κατάσταση ενός τηλεθεατή στην αρχή της περιόδου $t = 1, 2, \ldots$, όπου οι δυνατές καταστάσεις είναι : 0=δε βλέπει ποτέ τηλεόραση, 1=βλέπει μόνο κρατικά κανάλια, 2=βλέπει αρκετά συχνά τηλεόραση, 3=εθισμένος στην τηλεόραση, 4=προσπαθεί να αλλάξει τη στάση του σχετικά με την τηλεθέαση, 5=παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος δίνεται παρακάτω

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/2 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 7/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.

(β) Ποια είναι η πιθανοτητα ένας τηλεθεατής ξεκινώντας από το να βλέπει κρατικά κανάλια μόνο, να καταλήξει σε παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Ένα προϊόν για να κατασκευαστεί πρέπει να περάσει από k σταθμούς ε-πεξεργασίας. Σε κάθε σταθμό η επεξεργασία διαρκεί μια χρονική περίοδο. Η επεξεργασία σε ένα σταθμό μπορεί να είναι επιτυχής με πιθανότητα p οπότε το προϊόν προχωράει στον επόμενο σταθμό (ή φεύγει από το σύστημα αν πρόκειται για τον σταθμό k), ή ανεπιτυχής με πιθανόητα $q = 1 - p$. Σε αυτή την περίπτωση όλη η επεξεργασία μέχρι αυτό το σημείο ακυρώνεται και το προϊόν επιστρέφει στον αρχικό σταθμό 1.
(α) Έστω X_n ο σταθμός στον οποίο βρίσκεται το προϊόν στην περίοδο n, με $X_n \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$, όπου η κατάσταση $k+1$ σημαίνει ότι η παραγωγή του προϊόντος έχει ολοκληρωθεί. Να δείξετε ότι η $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου και να σχεδιάσετε το διάγραμμα πιθανοτήτων πρώτης μετάβασης.
(β) Έστω f_j ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη μετάβαση στην κατάσταση $k+1$, δοθέντος ότι η παρούσα κατάσταση είναι j. Να καταστρώσετε τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι $f_1, \ldots, f_k$.
(γ) Να δείξετε ότι οι $f_j, j = 1, \ldots, k$ ικανοποιούν την παρακάτω αναδρομική σχέση

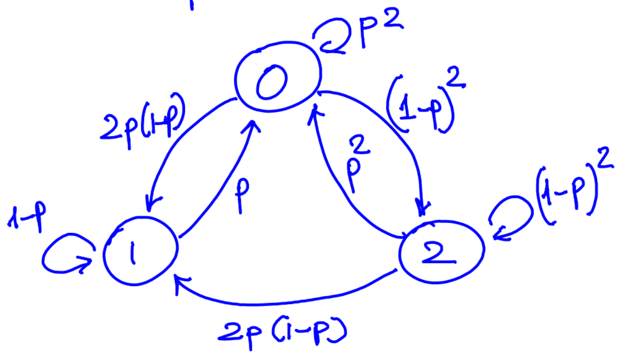
$$f_j = f_{j+1} + m_j,$$

όπου m_j κατάλληλες σταθερές, και να βρείτε την αναδρομική σχέση που ικανοποιούν αυτές οι σταθερές.
(δ) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο συνολικό χρόνο κατασκευής του προϊόντος, συναρτήσει των $m_1, \ldots, m_k$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Σε μια πόλη έχει ξεσπάσει επιδημία γρίππης. Η εμφάνιση νέων περιστατικών ακολουθεί διαδικασία Poisson με ρυθμό f. Κάθε ασθενής έχει τυχαίο χρόνο ίασης που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Να δείξετε ότι σε στάσιμη κατάσταση ο αριθμός ατόμων που ασθενούν ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο f/μ.
Υπόδειξη: Ορίστε μια μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου με κατάσταση τον αριθμό ασθενών σε κάθε χρονική στιγμή.

Προβλημα 1

Εστω X_n ο αριθμός φωτιστικών που λειτουργούν το πρωί της μέρας n, όταν ανοίγει το εργαστήριο. Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$ και διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος που φαίνεται παρακάτω:



(a)

Στην κατάσταση $X_n=2$: Στη διάρκεια της μέρας μπορούν να καούν και οι δυο λάμπες με πιθανότητα p^2 οπότε $X_{n+1}=0$, μόνο μία με πιθανότητα $2p(1-p)$ οπότε $X_{n+1}=1$, ή καμμία, με πιθανότητα $(1-p)^2$, οπότε $X_{n+1}=2$.

Στην κατάσταση $X_n=1$: Στη διάρκεια της μέρας η λάμπα που λειτουργεί μπορεί να καεί με πιθανότητα p οπότε $X_{n+1}=0$, ή να μην καεί με πιθανότητα $1-p$ οπότε $X_{n+1}=1$.

Στην κατάσταση $X_n=0$: Γίνεται ακαριαία αντικατάσταση και των δύο φωτιστικών, οπότε το εργαστήριο αρχίζει τη μέρα με δύο φωτιστικά που λειτουργούν και οι πιθανότητες μετάβασης ταυτίζονται με αυτές της κατάστασης 0.

(b) Η παραπάνω διαδικασία είναι αδιαχώριστη θετικά επαναληπτική και απεριοδική, επομένως υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή, που υπολογίζεται από τις εξισώσεις

$$\pi_1=(1-p)\pi_1+2p(1-p)(\pi_0+\pi_2)$$
$$\pi_2=(1-p)^2(\pi_0+\pi_2)$$
$$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$\pi_0=\frac{2p-p^2}{3-2p},\quad \pi_1=\frac{2-2p}{3-2p},\quad \pi_2=\frac{(1-p)^2}{3-2p}$$

Αφού ο φωτισμός προσδιορίζεται από το χειρότερο επίπεδο της μέρας, έχουμε τα εξής:

Το επίπεδο φωτισμού είναι ελλιπής αν στην αρχή της μέρας η κατάσταση είναι 0 ή 2 και στη διάρκεια της μέρας καεί ένα φωτιστικό, ή αν στην αρχή της μέρας η κατάσταση είναι 1 και δεν καεί το φωτιστικό που λειτουργεί. Επομένως

$$P(\text{ελλιπής}) = (\pi_0+\pi_2)\cdot 2p(1-p) + \pi_1(1-p) =$$

$$= \frac{2p-p^2+1-2p+p^2}{3-2p}\cdot 2p(1-p) + \frac{2-2p}{3-2p}(1-p) =$$

$$= \frac{2p(1-p)+2(1-p)^2}{3-2p} = \frac{2(1-p)}{3-2p} = \frac{2-2p}{3-2p}$$

Όμοια, για να έχει στη διάρκεια της μέρας μηδενικό επίπεδο πρέπει να βρίσκεται στην αρχή της μέρας στην κατάσταση 0 ή 2 κ' να καούν και τα δύο, ή να βρίσκεται στην κατάσταση 1 και να καεί αυτό που λειτουργεί:

$$P(\text{μηδενικός}) = (\pi_0+\pi_2)\cdot p^2 + \pi_1\cdot p$$

$$= \frac{1}{3-2p}\cdot p^2 + \frac{2-2p}{3-2p}\cdot p = \frac{2p-p^2}{3-2p}.$$

Παρατηρούμε ότι $P(\text{ελλιπής}) = \pi_1$ και $P(\text{μηδενικός}) = \pi_0$.

Αυτό θα μπορούσαμε να το δείξουμε και απευθείας με τον παρακάτω συλλογισμό.

Αφού στη διάρκεια της μέρας δε γίνονται επισκευές, η κατάσταση του συστήματος στο τέλος της μέρας είναι το χειρότερο επίπεδο που παρατηρήθηκε στη διάρκεια της μέρας. Επομένως το ποσοστό ημερών όπου το χειρότερο επίπεδο ήταν 1 (ελλιπής φωτισμός) είναι το ποσοστό ημερών όπου στο τέλος της μέρας η κατάσταση είναι 1. Όμως η κατάσταση στο τέλος της μέρας είναι η ίδια με την κατάσταση της επόμενης μέρας, επομένως το ποσοστό ημερών με κατάσταση στο τέλος ίση με 1 (σε άπειρο ορίζοντα) είναι ίσο με το ποσοστό ημερών με κατάσταση 1 στην αρχή της μέρας, δηλαδή ίσο με π_1.

Όμοια προκύπτει ότι $P(\text{μηδενικός}) = \pi_0$.

(γ) Το κόστος προκύπτει από την αντικατάσταση και το κόστος ελλιπούς ή μηδενικού φωτισμού.
Το κόστος αντικατάστασης είναι ίσο με $K+2d$ και προκύπτει όταν $X_n=0$, επομένως το κόστος αντικατάστασης ανά περίοδο είναι

$$\pi_0 \cdot (K+2d)$$

Στις ημέρες με ελλιπή φωτισμό υπάρχει κόστος C_1. Επομένως το μέσο κόστος ελλιπούς φωτισμού είναι ίσο με $\pi_1 \cdot C_1$.

Αντίστοιχα το μέσο κόστος μηδενικού φωτισμού είναι ίσο με $\pi_0 \cdot C_2$.

Επομένως το μέσο ημερήσιο κόστος είναι ίσο με

$$\pi_0 \cdot (K+2d+C_2) + \pi_1 C_1 .$$

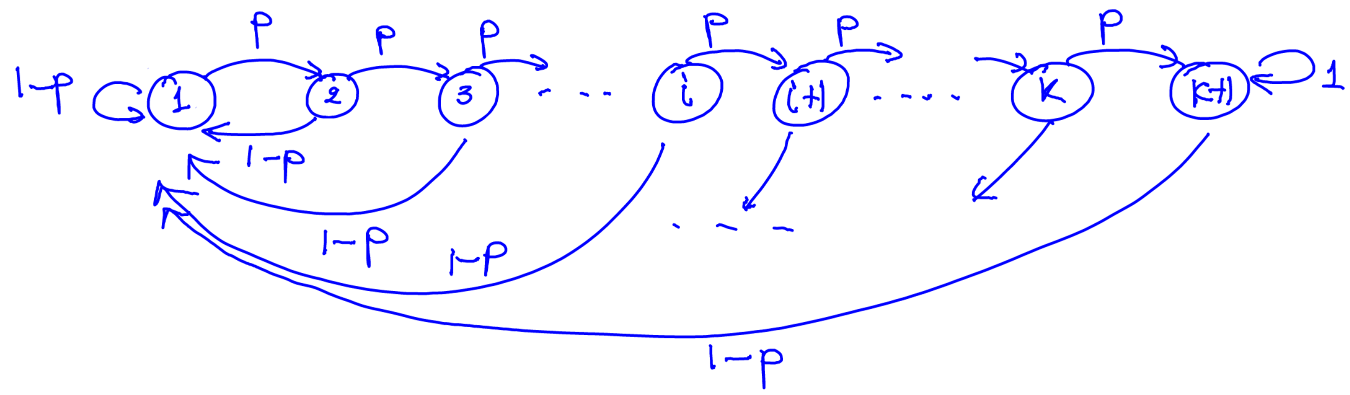
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

(Δείτε την Άσκηση 8 της Πρώτης Σειράς Ασκήσεων)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

(α) Έστω X_n ο σταθμός που βρίσκεται το προϊόν στην αρχή της περιόδου n.

Η διαδικασία $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή, επειδή η μελλοντική πορεία του προϊόντος εξαρτάται μόνο από την παρούσα θέση του.
Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος είναι:



(β) Η κατάσταση f_{k+1} είναι απορροφητική και $f_{k+1}=0$.

Για $j=1,2,\dots,k$, ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης στην κατάσταση $k+1$ δοθέντος ότι $X_0=j$ δίνεται από τη σχέση

$$f_j = 1 + p f_{j+1} + (1-p) f_0 \quad , \quad j=1,\dots,k.$$

(γ) Για $j \le k-1$ οι εξισώσεις των f_j, f_{j+1} δίνουν:

$$f_j = 1 + p f_{j+1} + (1-p) f_0$$
$$f_{j+1} = 1 + p f_{j+2} + (1-p) f_0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$f_j - f_{j+1} = p(f_{j+1} - f_{j+2})$$

Θέτοντας $m_j = f_j - f_{j+1}$ η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$m_j = p\, m_{j+1} \Rightarrow m_{j+1} = \frac{1}{p} m_j \quad , \quad j=1,2,\dots,k-1$$

Για την αρχική τιμή m_1, από την εξίσωση του f_1 παίρνουμε:

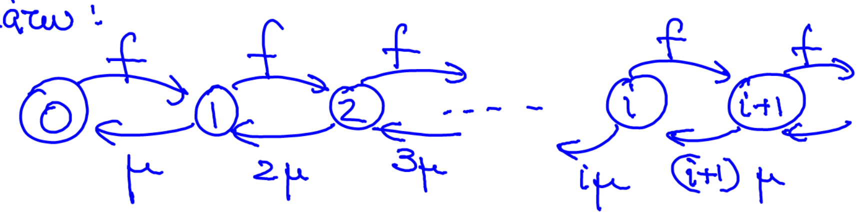
$$f_1 = 1 + p f_2 + (1-p) f_0 \Rightarrow p f_1 = p f_2 + 1 \Rightarrow p(f_1 - f_2) = 1 \Rightarrow m_1 = f_1 - f_2 = 1/p.$$

(δ) Έχουμε $f_j = f_{j+1} + m_j$, επομένως εύκολα δείχνουμε με επαγωγή $f_j = m_j + m_{j+1} + \dots + m_k$, $j=1,2,\dots,k$

Επομένως $f_1 = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Πρόβλημα 4 Έστω $X(t)$ ο αριθμός των ασθενών τη χρονική στιγμή t, $X(t) \in \{0,1,2,\dots\}$

Η διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης όπως φαίνεται παρακάτω:



Πρόκειται για διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με $\lambda_i = f$, $\mu_i = i\mu$, $i = 0,1,\dots$

Οι εξισώσεις στάσιμης κατανομής που προκύπτουν από διαδοχικές διαμερίσεις $\{0,1,\dots,i\}$, $\{i+1, i+2, \dots\}$ για $i = 0,1,2,\dots$ είναι

$$\left.\begin{aligned} p_0 f &= p_1 \mu \\ p_1 f &= p_2 \cdot 2\mu \\ &\vdots \\ p_i f &= p_{i+1} \cdot (i+1)\mu \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= p_0 \cdot f/\mu \\ p_2 &= p_0 \cdot \frac{1}{2} \left(f/\mu\right)^2 \\ &\vdots \\ p_i &= p_0 \frac{1}{i!} \left(f/\mu\right)^i \end{aligned}$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ παίρνουμε

$$p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{f}{\mu}\right)^i = 1 \Rightarrow p_0 e^{f/\mu} = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-f/\mu}$$

$$\Rightarrow p_i = e^{-f/\mu} \cdot \frac{(f/\mu)^i}{i!} \qquad i = 0,1,2,\dots$$