Στοχαστικές Ανελίξεις - Φεβρουάριος 2015

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.

(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.

(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).

(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.

Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Μια χημική διαδικασία παρακολουθείται σε διακριτές χρονικές στιγμές και καταγράφεται η κατάστασή της, η οποία μπορεί να είναι ενεργή ή όχι. Η κατάσταση μεταβάλλεται σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή διαδικασία ως εξής: Αν κατά τη στιγμή μιας καταγραφής η διαδικασία είναι ανενεργή τότε μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή μπορεί να ενεργοποιηθεί ή να παραμείνει ανενεργή με ίσες πιθανότητες. Αν κατά τη στιγμή καταγραφής είναι ενεργή, τότε μέχρι την επόμενη στιγμή μπορεί να απενεργοποιηθεί με πιθανότητα p, ή να παραμείνει ενεργή με πιθανότητα $1-p$. Η πιθανότητα απενεργοποίσης p είναι άγνωστη παράμετρος του συστήματος που χρειάζεται να εκτιμηθεί. Για το σκοπό αυτό η κατάσταση της διαδικασίας καταγράφεται για 1000 διαδοχικές χρονικές στιγμές. Στο διάστημα αυτό παρατηρείται ότι η διαδικασία ήταν ενεργή συνολικά σε 765 στιγμές καταγραφής.
Με βάση την πληροφόρηση αυτή ποια είναι μια λογική εκτίμηση για την άγνωστη παράμετρο p;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.

(β) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{46}^{(n)}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Θεωρούμε 3 σφαίρες που βρίσκονται κατανεμημένες με τυχαίο τρόπο σε δύο κουτιά, ένα άσπρο και ένα μαύρο. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας επιλέγεται μια σφαίρα στην τύχη και μεταφέρεται από το κουτί που βρίσκεται στο άλλο κουτί. Έστω X_t ο αριθμός των σφαιρών που βρίσκονται στο άσπρο κουτί στο βήμα t.

(α) Να δειχθεί ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t = 1, 2, \ldots\}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα, και και να βρεθεί ο πίνακας μεταβάσεων ενός βήματος.

(β) Να δειχθεί ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική. Ποιά είναι η περίοδος;

(γ) Να διατυπωθούν και να επιλυθούν οι εξισώσεις στάσιμης κατάστασης.

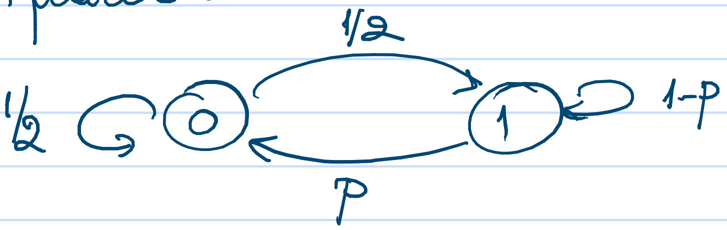
(δ) Έστω ότι για κάθε σφαίρα που υπάρχει στο άσπρο κουτί υπάρχει κόστος ίσο με 2 ανά βήμα ενώ για κάθε σφαίρα που βρίσκεται στο μαύρο κουτί υπάρχει κόστος ίσο με 1. Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά βήμα για μεγάλο ορίζοντα.
(ε) Προαιρετικό ερώτημα : Επιπλέον βαθμολογία 10/100. Να επαναληφθούν τα ερωτήματα (α) και (γ) για τη γενική περίπτωση N σφαιρών. Ποια είναι η στάσιμη κατανομή σε αυτή την περίπτωση;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Σε μια δοκιμαστική γυάλινη πλάκα έχει τοποθετηθεί ένα υλικό στο οποίο αναπτύσσονται μικρόβια. Τα μικρόβια αναπτύσσονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό θ. Σε τυχαίες χρονικές στιγμές στην πλάκα πέφτει μια υπεριώδης ακτινοβολία που σκοτώνει όλα τα μικρόβια που έχουν αναπτυχθεί. Μετά από κάθε ακτινοβολία τα μικρόβια συνεχίζουν να αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών ακτινοβολιών ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο ζ. Έστω $X(t)$ ο αριθμός μικροβίων στην πλάκα τη χρονική στιγμή t.
(α) Να δειχθεί ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να δοθεί το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.
(β) Να δειχθεί ότι η παραπάνω αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική και να βρεθεί η οριακή κατανομή.

Στοχαστικές Ανελίξεις
Απαντήσεις Διαγωνίσματος Φεβρουαρίου 2015

ΘΕΜΑ 1 Έστω X_n η κατάσταση της διαδικασίας κατά τη στιγμή καταγραφής n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $X_n \in \{0,1\}$ όπου $0 =$ ανενεργή, $1 =$ ενεργή.

Η $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική (ως πεπερασμένη).
Επομένως έχει μοναδική στάσιμη κατανομή που υπολογίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi_0 = 2p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\pi_0 = \dfrac{2p}{1+2p} \\ \pi_1 = \dfrac{1}{1+2p}\end{array}$$

Η στάσιμη κατανομή μπορεί να ερμηνευθεί και ως ποσοστά περιόδων στην κάθε κατάσταση: Για μεγάλο αριθμό καταγραφών, το ποσοστό των καταγραφών σε ενεργή κατάσταση συγκλίνει στο $\frac{1}{1+2p}$.

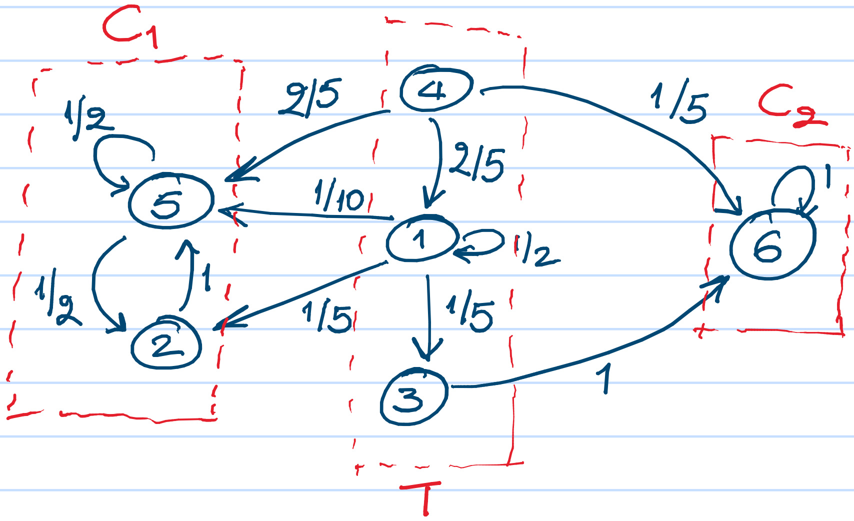
Έστω ότι για 1000 καταγραφές η διαδικασία βρέθηκε ενεργή στις 765, δηλαδή ποσοστό 76,5%.

Αν θεωρήσουμε ότι οι 1000 καταγραφές είναι μεγάλος αριθμός, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\pi_1 \approx 0{,}765 \Rightarrow \frac{1}{1+2p} = 0{,}765 \Rightarrow p \approx 0{,}154$$

που είναι μια εκτίμηση για το p με βάση αυτά τα δεδομένα.

ΘΕΜΑ 2 Το διάγραμμα πιθ. μετάβασης που αντιστοιχεί στη δοσμένη αλυσίδα είναι το παρακάτω:



a) Υπάρχουν δύο κλειστές κλάσεις $C_1=\{2,5\}$, $C_2=\{6\}$ που είναι θετικά επαναληπτικές και απεριοδικές.
Το σύνολο των παροδικών καταστάσεων είναι $T=\{1,3,4\}$

b) Αν η διαδικασία έχει αρχική κατάσταση στο σύνολο T θα απορροφηθεί σε μιά από τις κλάσεις C_1, C_2.
Έστω x_{i,C_1} η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση C_1, με αρχική κατάσταση $i=1,3,4$, και x_{i,C_2} η αντίστοιχη πιθανότητα απορρόφησης στην κλάση C_2. Επειδή η απορρόφηση θα γίνει σίγουρα σε μια από τις δύο κλάσεις ισχύει $x_{i,C_1}+x_{i,C_2}=1$, $i\in T$.

Οι πιθανότητες απορρόφησης x_{i,C_2} υπολογίζονται από το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$x_{1,C_2}=\frac{1}{2}x_{1,C_2}+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot x_{3,C_2}+\frac{1}{10}\cdot 0=\frac{1}{2}x_{1,C_2}+\frac{1}{5}x_{3,C_2}$$

$$x_{3,C_2}=1\cdot 1=1$$

$$x_{4,C_2}=\frac{2}{5}\cdot x_{1,C_2}+\frac{2}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}x_{1,C_2}+\frac{1}{5}$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει η λύση

$$x_{1,C_2}=\frac{2}{5},\quad x_{3,C_2}=1,\quad x_{4,C_2}=\frac{9}{25},$$ επομένως

$$x_{1,C_1}=\frac{3}{5},\quad x_{3,C_1}=0,\quad x_{4,C_1}=\frac{16}{25}.$$

Αν η διαδικασία απορροφηθεί στην κλάση C_1, θα παραμένει εκεί με οριακή κατανομή (π_2,π_5):

$$\left.\begin{aligned}\pi_2&=\tfrac{1}{2}\pi_5\\ \pi_2+\pi_5&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \pi_2=\frac{1}{3},\ \pi_5=\frac{2}{3}.$$

Αν η διαδικασία απορροφηθεί στην κλάση C_2, θα παραμένει εκεί με οριακή κατανομή $\pi_6=1$.

Με βάση τα παραπάνω, τα ζητούμενα όρια είναι:

$$\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)} = x_{4,C_1}\cdot\pi_5=\frac{16}{25}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{75}$$

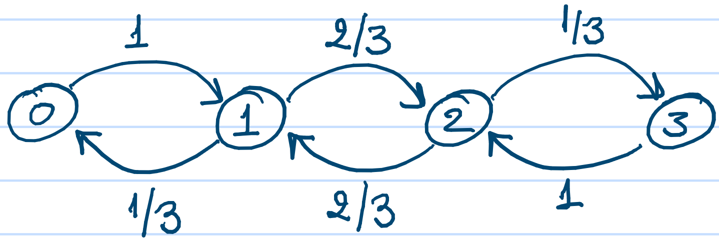
$$\lim_{n\to\infty} p_{46}^{(n)} = x_{4,C_2}\cdot\pi_6=\frac{9}{25}.$$

ΘΕΜΑ 3

(Το γενικό πρόβλημα με N σφαίρες είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως μοντέλο του Ehrenfest και έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της διάχυσης των μορίων μιας ουσίας που διαχέεται σε υγρό.)

α) Ο χώρος καταστάσεων είναι $S=\{0,1,2,3\}$. Η διαδικασία είναι Μαρκοβιανή γιατί σε κάθε βήμα αυτό που καθορίζει την μετέπειτα εξέλιξη είναι μόνο πως είναι κατανεμημένες οι μπάλες στα δύο κουτιά στο παρόν βήμα, ανεξάρτητα από τις προηγούμενες καταστάσεις.

Το διάγραμμα πιθανοτήτων πρώτης μετάβασης είναι το εξής:



Αν $X_n=0$, δηλαδή όλες οι σφαίρες είναι στο μαύρο κουτί, τότε σίγουρα η σφαίρα που θα επιλεγεί θα πάει από το μαύρο κουτί στο άσπρο και επομένως $X_{n+1}=1$ με πιθανότητα 1.

Αν $X_n=1$, δηλαδή υπάρχει μια σφαίρα στο άσπρο κουτί και 2 στο μαύρο, τότε αν επιλεγεί η σφαίρα του άσπρου (με πιθανότητα 1/3), θα πάει στο μαύρο και $X_{n+1}=0$, διαφορετικά θα επιλεγεί μια σφαίρα από το μαύρο και θα πάει στο άσπρο (με πιθ. 2/3) οπότε $X_{n+1}=2$.
Οι υπόλοιπες πιθανότητες ενός βήματος υπολογίζονται όμοια.

β) Η διαδικασία είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική. Επίσης είναι περιοδική με περίοδο 2, γιατί $p_{00}^{(n)}=0$ για $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, ενώ $p_{00}^{(n)}>0$ για $n=2k$.

γ) Ως θετικά επαναληπτική, η διαδικασία έχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Οι εξισώσεις είναι:

$$\left.\begin{aligned}
\pi_0 &= \tfrac{1}{3}\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \tfrac{2}{3}\pi_2 \\
\pi_2 &= \tfrac{2}{3}\pi_1 + \pi_3 \\
\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 &= 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
&\pi_1 = 3\pi_0 \\
&3\pi_0 = \pi_0 + \tfrac{2}{3}\pi_2 \Rightarrow 2\pi_0 = \tfrac{2}{3}\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 3\pi_0 \\
&3\pi_0 = \tfrac{2}{3}\cdot 3\pi_0 + \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \pi_0 \\
&\pi_0 + 3\pi_0 + 3\pi_0 + \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Επομένως η στάσιμη κατανομή είναι $\pi_0=\frac{1}{8},\ \pi_1=\frac{3}{8},\ \pi_2=\frac{3}{8},\ \pi_3=\frac{1}{8}$

δ) Το κόστος ενός βήματος στην κατάσταση i είναι

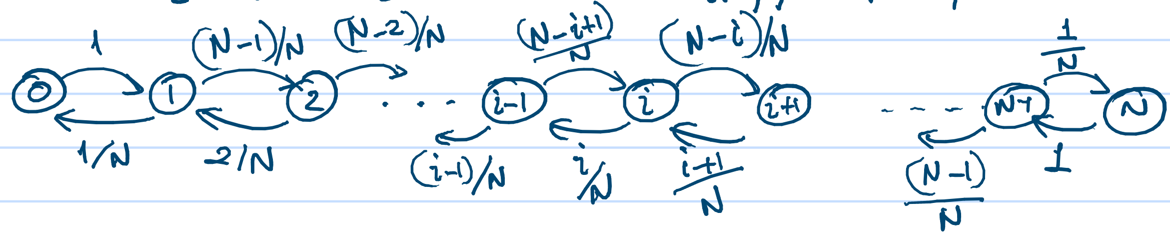
$R_i = 2i + 1\cdot(3-i) = 3+i \quad , \ i=0,\dots,3.$

Επομένως το μέσο κόστος ανά βήμα σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με

$$\bar{C} = \sum_{i=0}^{3} R_i \pi_i = \sum_{i=0}^{3} (i+3)\cdot \pi_i = 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 5\cdot\frac{3}{8} + 6\cdot\frac{1}{8}$$

$$= \frac{36}{8} = \frac{9}{2}.$$

ε) Στη γενική περίπτωση N σφαιρών, ο χώρος καταστάσεων είναι $S=\{0,1,\dots,N\}$ και το διάγραμμα μεταβάσεων:



Επομένως $\quad P_{i,i-1} = \frac{i}{N}, \quad i=1,2,\dots,N$

$\qquad\qquad P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}, \quad i=0,1,\dots,N-1$

Από τις εξισώσεις στάσιμης κατανομής παίρνουμε:

$$\pi_0 = \pi_1\cdot\frac{1}{N} \ = \pi_1 = N\pi_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 + \frac{2}{N}\pi_2 \Rightarrow \frac{2}{N}\pi_2 = (N-1)\pi_0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{N(N-1)}{2}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{N-1}{N}\pi_1 + \frac{3}{N}\pi_3 \Rightarrow \frac{3}{N}\pi_3 = \frac{N(N-1)}{2}\pi_0 - \frac{N-1}{N}\cdot N\pi_0 = \frac{(N-1)(N-2)}{2}\pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}\pi_0$$

Παρατηρούμε ότι $\quad \pi_2 = \binom{N}{2}\pi_0, \quad \pi_3 = \binom{N}{3}\pi_0.$

Θα υποθέσουμε $\quad \pi_i = \binom{N}{i}\pi_0 \quad$ και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις.

Πραγματικά, από την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\right)^{-1} = \frac{1}{2^N}$$

επομένως $\pi_i = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Ελέγχουμε αν αυτά οι π_i, $i=0,\dots,N$ ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, που γενικά γράφονται ως εξής:

$$\pi_i = \frac{N-i+1}{N} \pi_{i-1} + \frac{i+1}{N} \pi_{i+1} \ (?)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\frac{N-i+1}{N} \pi_{i-1} + \frac{i+1}{N} \pi_{i+1} =$$

$$= \frac{N-i+1}{N} \binom{N}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^N + \frac{i+1}{N} \binom{N}{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N =$$

$$= \frac{N-i+1}{N} \frac{N!}{(i-1)!\,(N-i+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N + \frac{i+1}{N} \frac{N!}{(i+1)!\,(N-i-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$= \frac{(N-1)!}{(i-1)!\,(N-i)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N + \frac{(N-1)!}{i!\,(N-1-i)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N =$$

$$= \frac{(N-1)!}{(i-1)!\,(N-i-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \left[\frac{1}{N-i} + \frac{1}{i}\right]$$

$$= \frac{(N-1)!}{(i-1)!\,(N-i-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N}{i\,(N-i)} = \frac{N!}{i!\,(N-i)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N =$$

$$= \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N = \pi_i$$

Επομένως οι εξισώσεις επαληθεύονται για $i=1,2,\dots,N-1$

Για $i=0$: $\pi_0=\left(\frac{1}{2}\right)^N$

$$\frac{1}{N}\pi_1=\frac{1}{N}\binom{N}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{(N-1)!}{(N-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N=\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$\Rightarrow \pi_0=\frac{1}{N}\pi_1$, δηλ. ικανοποιείται η εξίσωση για $i=0$

Για $i=N$: $\pi_N=\left(\frac{1}{2}\right)^N$

$$\frac{1}{N}\pi_{N-1}=\frac{1}{N}\binom{N}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=\frac{(N-1)!}{(N-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^N\Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi_N=\frac{1}{N}\pi_{N-1}$, δηλ. ικανοποιείται η εξ. για $i=N$.

Δείξαμε επομένως ότι οι $\pi_i=\binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N$, $i=0,\dots,N$ ικανοποιούν τις εξισώσεις στάσιμης κατανομής.

Επειδή η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική κ' αδιαχώριστη, οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση, επομένως αυτή είναι η στάσιμη κατανομή.

Παρατηρούμε ότι η στάσιμη κατανομή είναι η διωνυμική $B(N,1/2)$.

ΘΕΜΑ 4 Έστω $X(t)$ ο αριθμός μικροβίων στην πλάκα τη στιγμή t. Τα μόνα γεγονότα που μπορούν να αλλάξουν την κατάσταση του συστήματος όταν $X(t)=i$, είναι:

(1) να αναπτυχθεί ένα νέο μικρόβιο. Αυτό θα γίνει μετά από χρονικό διάστημα εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό θ και η κατάσταση θα γίνει $i+1$.

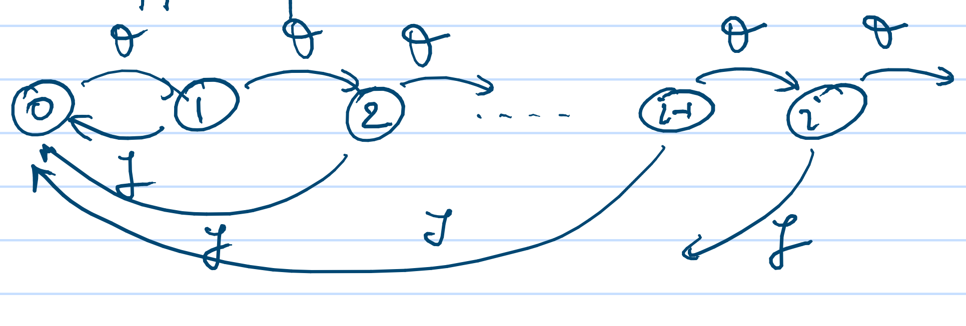
(2) να συμβεί ακτινοβολία. Αυτό θα γίνει μετά από χρονικό διάστημα εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό μ, και η κατάσταση θα γίνει 0. Αυτό ισχύει μόνο για $i>0$.

Η κατάσταση i θα αλλάξει όταν συμβεί το πρώτο από τα δύο παραπάνω. Παρατηρούμε επομένως ότι η παραπάνω περιγραφή αντιστοιχεί στον ορισμό μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2,\dots\}$, και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{i,i+1}=\theta, \quad i=0,1,2,\dots$$

$$q_{i,0}=\mu, \quad i=1,2,\dots$$

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



(b) Η αλυσίδα είναι προφανώς αδιαχώριστη, όμως επειδή είναι άπειρη, μπορεί να είναι είτε παροδική είτε θετικά ή μηδενικά επαναληπτική. Για να είναι θετικά επαναφυκτική πρέπει και αρκεί οι εξισώσεις στάσιμης κατανομής να έχουν μοναδική και θετική λύση $p_i > 0$ $\forall i$.

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\theta p_0 = \gamma \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

$$(\theta+\gamma) p_i = \theta p_{i-1} \quad , \; i=1,2,\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

Από την πρώτη εξίσωση και την εξ. κανονικοποίησης παίρνουμε:

$$\theta p_0 = \gamma (1-p_0) \Rightarrow p_0 = \frac{\gamma}{\theta+\gamma}$$

Για $i=1$: $(\theta+\gamma) p_1 = \theta p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\theta}{\theta+\gamma} p_0 = \frac{\theta}{\theta+\gamma} \frac{\gamma}{\theta+\gamma}$

Για $i=2$: $(\theta+\gamma) p_2 = \theta p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\theta}{\theta+\gamma} p_1 = \left(\frac{\theta}{\theta+\gamma}\right)^2 \frac{\gamma}{\theta+\gamma}$.

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι $p_i = \left(\frac{\theta}{\theta+\gamma}\right)^i \frac{\gamma}{\gamma+\theta}$, $i=0,1,\ldots$

Πραγματικά έστω $p_i = \left(\frac{\theta}{\theta+\gamma}\right)^i \frac{\gamma}{\gamma+\theta}$. Τότε από την

εξίσωση ισορροπίας για $i+1$:

$$(\theta+\gamma) p_{i+1} = \theta p_i \Rightarrow p_{i+1} = \frac{\theta}{\theta+\gamma} p_i = \left(\frac{\theta}{\theta+\gamma}\right)^{i+1} \frac{\gamma}{\theta+\gamma}.$$

Επομένως η μοναδική λύση των εξισώσεων στάσιμης κατανομής είναι η $p_i = \left(\frac{\theta}{\theta+\gamma}\right)^i \frac{\gamma}{\theta+\gamma} > 0$, $i=0,1,2,\ldots$

και συνεπώς η αλυσίδα είναι θετικά επαναφυκτική.

Παρατηρούμε ότι η στάσιμη κατανομή είναι γεωμετρική.