Στοχαστικές Ανελίξεις - Ιούλιος 2015

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.

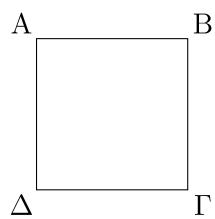
(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.

(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).

(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.

Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Ένα σωματίδιο κινείται στις 4 κορυφές ενός τετραγώνου με τον εξής τρόπο: Σε κάθε βήμα μπορεί να μετακινηθεί από την κορυφή που βρίσκεται σε μια από τις δύο γειτονικές της κορυφές. Το σωματίδιο μετακινείται κατά μήκος της οριζόντιας ακμής με πιθανότητα p και κατά μήκος της κάθετης με πιθανότητα $1-p$ (ποτέ δεν παραμένει στην ίδια κορυφή στο αμέσως επόμενο βήμα).



(α) Να οριστεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου και να γραφεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.

(β) Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την κορυφή Α στην κορυφή Β.

(γ) Θεωρήστε την εξής παραλλαγή του αρχικού μοντέλου: την πρώτη φορά που το σωματίδιο πηγαίνει σε μια από τις κορυφές Β και Γ παραμένει εκεί για πάντα. Υπολογίστε την πιθανότητα αν το σωματίδιο βρίσκεται στο βήμα 0 στην κορυφή Α να απορροφηθεί στην κατάσταση Β ή στην κατάσταση Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.

(β) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{46}^{(n)}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Μια χημική βιομηχανία παράγει προϊόντα που δημιουργούν ένα ρυπογόνο αέριο. Η ποσότητα ρυπογόνου αερίου που δημιουργείται στη διάρκεια μιας μέρας είναι 0, 1 ή 2 τόνοι με αντίστοιχες πιθανότητες p_0, p_1, p_2 (οι ποσότητες σε διαφορετικές μέρες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους). Για την εξουδετέρωση του ρύπου η εταιρεία έχει εγκαταστήσει ειδικά φίλτρα που έχουν δυναμικότητα 2 τόνων και αφού εξαντληθούν χρειάζονται αντικατάσταση.

Συγκεκριμένα, αν στην αρχή μιας μέρας η δυναμικότητα των φίλτρων δεν έχει εξαντληθεί (δηλαδή είναι 1 ή 2 τόνοι), αυτά παραμένουν σε λειτουργία στη διάρκεια της μέρας και εξουδετερώνουν τη μέγιστη ποσότητα αερίου που επιτρέπει η χωρητικότητά τους. Αν στη διάρκεια της μέρας παραχθεί περισσότερο αέριο από αυτό που μπορεί να εξουδετερώσει το φίλτρο, η επιπλέον ποσότητα εκπέμπεται στην ατμόσφαιρα ως ρύπος. Αν στην αρχή της μέρας το φίλτρο έχει εξαντληθεί (δηλαδή η δυναμικότητά του είναι μηδέν), τότε στη διάρκεια της μέρας γίνεται διαδικασία αντικατάστασης των φίλτρων. Κατά τη διάρκεια της μέρας αντικατάστασης δεν υπάρχουν εγκατεστημένα φίλτρα που να λειτουργούν και επομένως όλη η παραγόμενη ποσότητα αερίου εκπέμπεται στην ατμόσφαιρα ως ρύπος.

Έστω X_n η δυναμικότητα του φίλτρου στην αρχή της μέρας.

(α) Να δείξετε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ είναι Μαρκοβιανή και να ορίσετε τον πίνακα και το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.

(β) Να δείξετε ότι η διαδικασία είναι εργοδική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.

(γ) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη μέση ποσότητα ρύπων που εκπέμπεται στην ατμόσφαιρα ανά μέρα σε άπειρο ορίζοντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Ένα μηχάνημα υπόκειται κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του σε βλάβες και επισκευές ως εξής: Η κατάστασή του μπορεί να είναι κανονική (Κ), να έχει λίγες βλάβες (Β) που όμως δεν εμποδίζουν τη λειτουργία του, ή να έχει σοβαρές βλάβες (Χ) που δεν του επιτρέπουν να λειτουργήσει. Όσο το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση Κ, παραμένει σε αυτή ένα τυχαίο χρονικό διάστημα που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο f_K και μετά πηγαίνει στην κατάσταση B. Στην κατάσταση Β το μηχάνημα παραμένει επίσης ένα τυχαίο χρονικό διάστημα που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο f_B και μετά πηγαίνει στην κατάσταση X. Όταν το μηχάνημα παρουσιάσει σοβαρές βλάβες σταματά η λειτουργία του και μπαίνει σε διαδικασία επισκευής. Η επισκευή διαρκεί χρονικό διάστημα που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο r. Η επισκευή μπορεί να είναι πλήρως επιτυχής με πιθανότητα p, οπότε μετά το τέλος της επισκευής το μηχάνημα είναι σε κανονική κατάσταση, ή μερικώς επιτυχής με πιθανότητα $1-p$, οπότε μετά το τέλος της επισκευής το μηχάνημα είναι μεν λειτουργικό, αλλά παραμένουν λίγες βλάβες.

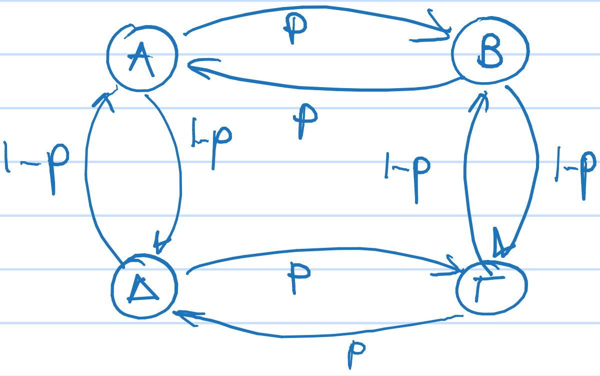
(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου που περιγράφει την κατάσταση του μηχανήματος και να γράψετε τον πίνακα και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(β) Να δείξετει ότι η διαδικασία είναι εργοδική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.

(γ) Σε τι ποσοστό χρόνου (μέσα σε άπειρο ορίζοντα) το μηχάνημα βρίσκεται σε κατάσταση λίγων βλαβών;

Στοχαστικές Ανελίξεις
Απαντήσεις διαγωνίσματος 7-7-2015

Θέμα 1 Έστω X_n η θέση του σωματιδίου στην αρχή της περιόδου n. Η $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S=\{A,B,\Gamma,\Delta\}$.
Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



και ο πίνακας ενός βήματος

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 1-p & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

(β) Έστω $f(x)$ ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την κορυφή x στην κορυφή B, με $x=A,B,\Gamma,\Delta$.
Προφανώς $f(B)=0$ και ζητάμε το $f(A)$.

Οι $f(x)$ ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$f(A)=1+p\cdot f(B)+(1-p)f(\Delta) = 1+(1-p)f(\Delta) \quad (1)$$

$$f(\Gamma)=1+(1-p)\cdot f(B)+p f(\Delta) = 1+p f(\Delta) \quad (2)$$

$$f(\Delta)=1+p f(\Gamma)+(1-p)f(A) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την $f(\Gamma)$ από τη (2) στην (3):

$$f(\Delta) = 1 + p\big(1 + p f(\Delta)\big) + (1-p) f(A)$$

$$= 1 + p + p^2 f(\Delta) + (1-p) f(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-p^2) f(\Delta) = (1+p) + (1-p) f(A) \Rightarrow f(\Delta) = \frac{(1+p) + (1-p) f(A)}{1-p^2}$$

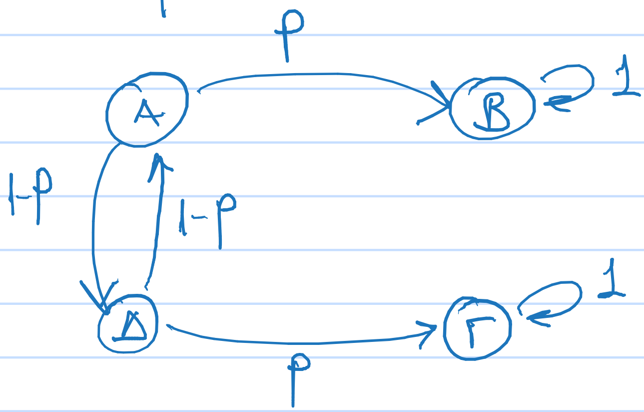
$$\Rightarrow f(\Delta) = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p} f(A).$$

Αντικαθιστώντας την $f(\Delta)$ στην (1):

$$f(A) = 1 + (1-p)\left[\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p} f(A)\right] = 1 + 1 + \frac{1-p}{1+p} f(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(A)\left(1 - \frac{1-p}{1+p}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2p}{1+p} f(A) = 2 \Rightarrow \boxed{f(A) = \frac{1+p}{p}}$$

(β) Η νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει το εξής διάγραμμα:



Στην αλυσίδα αυτή οι καταστάσεις Β,Γ είναι απορροφητικές, ενώ οι Α,Δ παροδικές. Έστω x_{AB} η πιθανότητα απορρόφησης στη Β, δεδομένης παρούσας κατάστασης στην Β, και $x_{A\Gamma}$, $x_{\Delta B}$, $x_{\Delta\Gamma}$ ορίζονται ανάλογα. Επειδή η διαδικασία θα απορροφηθεί σίγουρα σε μια από τις Β,Γ ισχύει $x_{AB} + x_{A\Gamma} = 1$, $x_{\Delta B} + x_{\Delta\Gamma} = 1$.

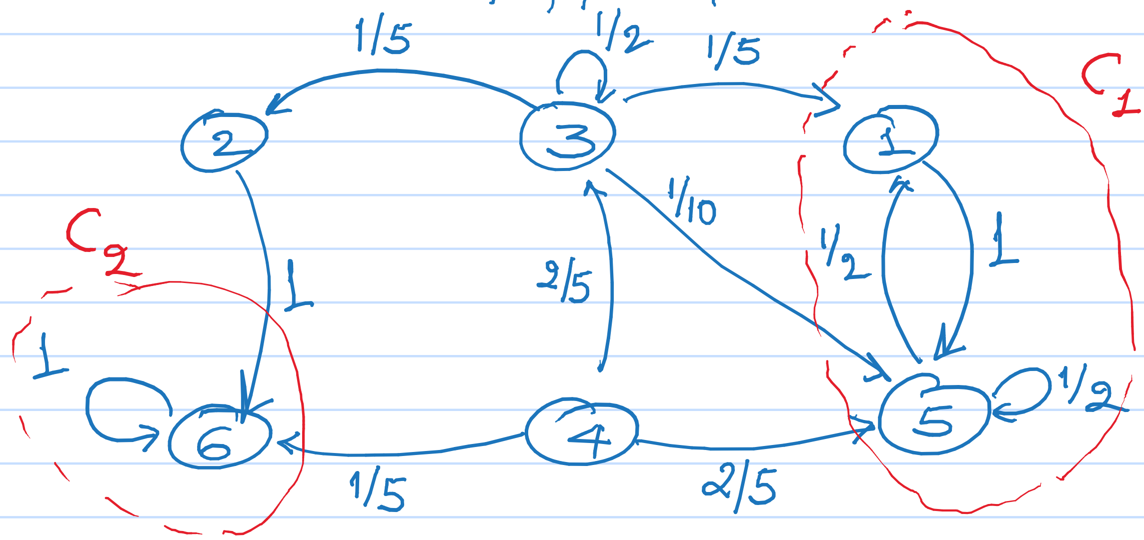
Οι x_{AB}, $x_{\Delta B}$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα που προκύπτει από ανάλυση πρώτου βήματος:

$$\left.\begin{aligned} x_{AB} &= p \cdot 1 + (1-p) x_{\Delta B} = p + (1-p) x_{\Delta B} \\ x_{\Delta B} &= p \cdot 0 + (1-p) x_{AB} = (1-p) x_{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{AB} = p + (1-p)^2 x_{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{AB} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2}$$

Επομένως $x_{AB} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$, $x_{AT} = 1 - x_{AB} = \frac{1-p}{2-p}$

Θέμα 2 Το διάγραμμα μεταβάσεων ενός ρήματος είναι:



(α) Υπάρχουν δύο κλειστές κλάσεις επικοινωνίας

$C_1 = \{1, 5\}$, $C_2 = \{6\}$

Επειδή οι C_1, C_2 είναι πεπερασμένα σύνολα, είναι θετικά επαναληπτικές.

Η C_1 είναι απεριοδική επειδή $p_{55} > 0$, επομένως η κατάσταση 5 είναι απεριοδική.

Η C_2 είναι επίσης (τετριμμένα) απεριοδική.

Οι καταστάσεις $T = \{2, 3, 4\}$ είναι το παροδικό σύνολο.

(β) Πρώτα θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες δεδομένης της απορρόφησης σε C_1, C_2.

C_1 : $\left.\begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{1}{3} \\ \pi_5 = \frac{2}{3} \end{array}$, C_6 : $\pi_6 = 1$.

Επιπλέον πρέπει να υπολογιστούν οι πιθανότητες απορρόφησης σε κάθε κλάση. Έστω x_{i,C_1} η πιθανότητα απορρόφησης στην κλάση C_1 δεδομένης αρχικής κατάστασης $i=2,3,4$ και x_{i,C_2} ανάλογα για την κλάση C_2. Επειδή θα γίνει σίγουρα απορρόφηση σε μια από τις C_1, C_2, ισχύει $x_{i,C_1}+x_{i,C_2}=1$, $i=2,3,4$.

Για τις πιθανότητες x_{i,C_1} ισχύει το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$x_{2,C_1} = P_{26}\cdot 0 = 0$$

$$x_{3,C_1} = \frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{10}\cdot 1+\frac{1}{2}x_{3,C_1}+\frac{1}{5}x_{2,C_1} = \frac{3}{10}+\frac{1}{2}x_{3,C_1} \Rightarrow \frac{1}{2}x_{3,C_1}=\frac{3}{10} \Rightarrow x_{3,C_1}=\frac{3}{5}$$

$$x_{4,C_1} = \frac{2}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot x_{3,C_1} = \frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{25}$$

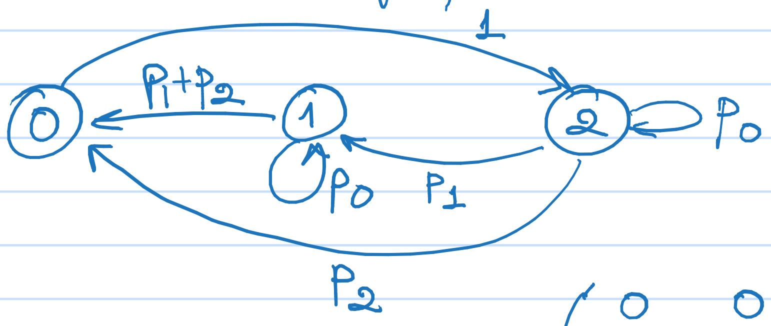
Επομένως $x_{2,C_2}=1-x_{2,C_1}=1$, $x_{3,C_2}=\frac{2}{5}$, $x_{4,C_2}=\frac{9}{25}$

Με βάση τα παραπάνω:

$$\lim_{n\to\infty} P_{45}^{(n)} = x_{4,C_1}\cdot\pi_5 = \frac{16}{25}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{75},$$

$$\lim P_{46}^{(n)} = x_{4,C_2}\cdot\pi_6 = \frac{9}{25}$$

Θέμα 3 (a) Το διάγραμμα μεταβάσεων ενός βήματος είναι:



και ο πίνακας:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ P_1+P_2 & P_0 & 0 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

(b) Επειδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Επίσης, επειδή η αλυσίδα είναι πεπερασμένη και αδιαχώριστη, είναι θετικά επαναληπτική.

Τέλος, επειδή $p_{22}>0$ η κατάσταση 2 κ' επομένως όλη η αλυσίδα είναι απεριοδική.

Επομένως η διαδικασία είναι εργοδική (θετικά επαναληπτική κ' απεριοδική)

Η οριακή κατανομή προκύπτει από τις εξισώσεις στάσιμης κατανομής:

$$\pi_2=\pi_0\cdot 1+p_0\pi_2 \Rightarrow \pi_0=(1-p_0)\pi_2$$

$$\pi_0=\pi_2\cdot p_2+\pi_1(p_1+p_2)=\pi_2 p_2+\pi_1(1-p_0)\Rightarrow(1-p_0)\pi_2=\pi_2 p_2+\pi_1(1-p_0)\Rightarrow \pi_1=\frac{p_1}{1-p_0}\pi_2$$

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \Rightarrow\left(1-p_0+\frac{p_1}{1-p_0}+1\right)\pi_2=1 \Rightarrow \pi_2=\frac{1-p_0}{(1-p_0)^2+p_1+(1-p_0)}$$

$$\pi_0=(1-p_0)\pi_2=\frac{(1-p_0)^2}{(1-p_0)^2+p_1+(1-p_0)}$$

$$\pi_1=\frac{p_1}{1-p_0}\pi_2=\frac{p_1}{(1-p_0)^2+p_1+1-p_0}$$

Βρήκαμε λοιπόν την οριακή κατανομή.

(γ) Έστω r_i η αναμενόμενη ποσότητα εκπεμπόμενου ρύπου σε μια περίοδο, αν η κατάσταση στην αρχή της περιόδου είναι i:

$$r_2=0\cdot p_0+0p_1+0p_2=0$$

$$r_1=0p_0+0p_1+1\cdot p_2=p_2$$

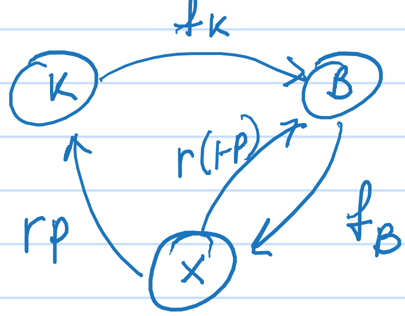
$$r_0=0p_0+1\cdot p_1+2p_2=p_1+2p_2$$

Επομένως η αναμενόμενη μέση ποσότητα ανά περίοδο είναι ίση με

$$r_0\pi_0+r_1\pi_1+r_2\pi_2=\frac{p_2p_1+(p_1+2p_2)(1-p_0)}{(1-p_0)^2+p_1+(1-p_0)}$$

Θέμα 4 Ο χώρος καταστάσεων είναι $S=\{K, B, X\}$.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:



Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης είναι:
$$Q=\begin{array}{c|ccc} & K & B & X \\ \hline K & -f_K & f_K & 0 \\ B & 0 & -f_B & f_B \\ X & rp & r(1-p) & -r \end{array}$$

(β) Επειδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, η διαδικασία είναι αδιαχώριστη, κ' επομένως ως πεπερασμένη, και θετικά επαναληπτική. Ως διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι απεριοδική. Επομένως η διαδικασία είναι εργοδική.

Η οριακή κατανομή προκύπτει από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$p_K f_K = p_X\, rp \Rightarrow p_K = p_X \cdot \frac{rp}{f_K}$$

$$p_B f_B = p_K f_K + p_X r(1-p) = p_X rp + p_X r(1-p) = p_X r$$

$$\Rightarrow p_B = p_X \frac{r}{f_B}$$

$$p_K + p_B + p_X = 1 \Rightarrow p_X\left(\frac{rp}{f_K}+\frac{r}{f_B}+1\right)=1 \Rightarrow$$

$$p_X = \frac{1}{\frac{rp}{f_K}+\frac{r}{f_B}+1}, \quad p_B = \frac{r/f_B}{\frac{rp}{f_K}+\frac{r}{f_B}+1}, \quad p_K = \frac{rp/f_K}{\frac{rp}{f_K}+\frac{r}{f_B}+1}$$

(γ) Το ποσοστό χρόνου είναι ίσο με p_B.