ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ - ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΜΠΟΥΡΝΕΤΑΣ

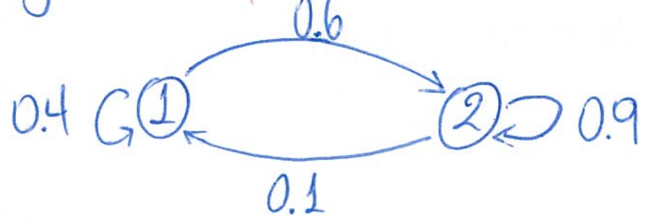
Στοχαστικές Ανελίξεις

Καθηγητής: Απόστολος Μπαρνέτας

A Εισαγωγικό

• Η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη (πεπερασμένος αριθμός καταστάσεων). Σε αυτή η επόμενη κατάσταση (μέλλον) εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση (παρόν) και σε καμία περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν (παρελθόν). Η προηγούμενη ιδιότητα ονομάζεται μαρκοβιανή ιδιότητα.

πχ)



μια απλή μαρκοβιανή αλυσίδα 2 καταστάσεων

Συμβολίζουμε S το σύνολο των καταστάσεων

Εδώ $S=\{1,2\}$

B Στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία)

Έστω $x(t)$ η κατάσταση του συστήματος κατά την χρονική στιγμή t $(t\geq 0)$. Θεωρούμε ότι $\forall t$ η κατάσταση $x(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία ορίζεται σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P)

Έχουμε δηλαδή $\{x(t), t\in T\}$ T=σύνολο δεικτών

μια στοχαστική ανέλιξη.

πχ) ① $x(t)$= η θερμοκρασία το πρωί της ημέρας t

με $T=\{\underset{1^{\eta}\text{ μέρα}}{1}, 2, \dots, \underset{10^{\eta}\text{ μέρα}}{10}\}$

② $N(t)$= ο αριθμός των ασθενών που περιμένουν στο χώρο αναμονής τη στιγμή t, σε ένα νοσοκομείο.

Έστω $t=0$ συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Τότε το $\{N(t), t=0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη.
Εδώ έχουμε $T=[0,\infty)$ (αφού δεν έχουμε πει μέχρι πότε θα μετράμε).

T → αριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη διακριτού χρόνου
T → υπεραριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη συνεχούς χρόνου

• Αν $X(t)$ διακριτή, τότε έχουμε διακριτό χώρο καταστάσεων, ενώ αν $X(t)$ συνεχής τότε έχουμε συνεχή χώρο καταστάσεων

$\boxed{\text{πχ}}$ 3 Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι (ανεξάρτητες ρίψεις)
Έστω Y_n = το αποτέλεσμα της n-οστής ρίψης

$P(Y_n=i)=\frac{1}{6}$ $\quad i\in\{1,2,\dots,6\}$
$\quad \forall n=1,2,\dots$ ρίψεις του ζαριού

Έχουμε στοχαστική ανέλιξη $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ με $T=\{\underset{\uparrow}{1},\underset{\uparrow}{2},\dots\}$ (1η ρίψη, 2η ρίψη)
και $S=\{\underset{\uparrow}{1},2,\dots,\underset{\uparrow}{6}\}$ (το ζάρι έφερε 1, το ζάρι έφερε 6)

Ορίζω $X_n=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$ $\quad n=1,2,\dots$
$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ με $T=\{1,2,\dots\}$ και $S=\{1,2,\dots\}$ αφού ως χώρο καταστάσεων S εννοούμε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις X_n δηλαδή $X_1\to\{1,2,\dots,6\}$, $X_2\to\{2,\dots,12\}$ κ.ο.κ.

$\boxed{\Gamma}$ Κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων → αναλυτικά: μάθημα 2 (e-class)

1) Στάσιμες
2) Ανεξάρτητες προσαυξήσεις
$\forall t_1,t_2,\dots,t_n$ $\quad t_1<t_2<\dots<t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_3)-X(t_2),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.
3) Ανανεωτικές διαδικασίες
$Z_n=X_1+X_2+\dots+X_n$ $\quad X_n$ = χρόνος μεταξύ $(n-1)$οστού και n-οστού συμβάντος

Υπενθύμιση

Από Πιθανότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(B|A) = P(B)$
- A, B ανεξάρτητα δεδομένου του $\Gamma \Rightarrow P(B|A\Gamma) = P(B|\Gamma)$
- Για κάθε ενδεχόμενο E ισχύει: $0 \le P(E) \le 1$

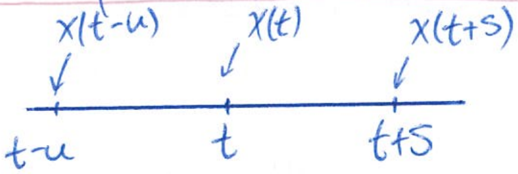
$\boxed{\Delta}$ Μαρκοβιανή Ιδιότητα

μέλλον ... παρελθόν

- Για κάθε $t, s, u > 0$ έχουμε ότι $X(t+s)$, $X(t-u)$ είναι ανεξάρτητες δεδομένου ότι $X(t) = x$.

→ παρόν

Δηλαδή, δεδομένου του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος.



⚠ Το παραπάνω θα πρέπει να το γράφουμε σε κάθε άσκηση ανάλογα με τα δεδομένα της, δηλαδή να δείχνουμε ότι ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα (είτε ζητείται ως ερώτημα είτε όχι).

πχ| ① Ανεξάρτητες ρίψεις ζαριού

Έστω X_n = το αποτέλεσμα της n-οστής ρίψης

- Ισχύει ότι X_{n+1} (μέλλον) ανεξάρτητη της X_n (παρόν)

της $\left.\begin{matrix} X_{n-1} \\ X_{n-2} \\ \vdots \end{matrix}\right\}$ παρελθόν

Οπότε για την $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα.

② Έστω $Z_n = X_1 + \dots + X_n$ με $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$ $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$

Ελέγχουμε αν ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα:

$$P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = l, Z_{n-1} = w) = P(Z_{n+1} = k \mid Z_n = l)$$

Δηλαδή δεδομένου του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος, οπότε ισχύει.

Μαρκοβιανές αλυσίδες Διακριτού χρόνου (Μ.Α.Δ.Χ.)

• χώρος καταστάσεων $S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$

• $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ με $X_n \in S$

E Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

• $P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P_{ij}$ = πιθανότητα μετάβασης ενός βήματος $\forall i,j \in S$

(Αν δηλαδή, ενώ σήμερα βρίσκομαι στην κατάσταση i, αύριο να βρεθώ στην κατάσταση j).

• Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$= \{0,1,\dots,M\}$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{pmatrix}$$

γραμμές = παρόν

στήλες = μέλλον

<u>Παρατήρηση</u>

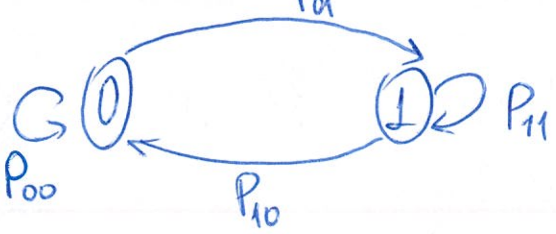
i) $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

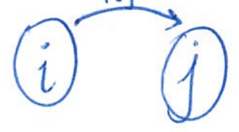
ii) $\forall i \in S \quad \sum_{j\in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S$

} στοχαστικός πίνακας

iii) Ο πίνακας μπορεί να είναι άπειρος ή πεπερασμένος. Αν είναι πεπερασμένος τότε θα είναι τετραγωνικός.

Z Διάγραμμα μετάβασης ενός βήματος





Από την κατάσταση i περνάμε στην κατάσταση j, με μια πιθανότητα μετάβασης P_{ij}.

<u>Παρατήρηση</u> Προτείνω σε κάθε άσκηση να φτιάχνετε το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης, γιατί βοηθάει στην ευκολότερη επίλυση της. Από το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης μπορείς να βρίσκεις και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

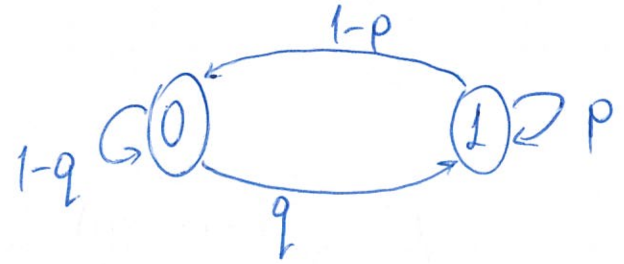
<u>πχ</u> ① φως $\begin{cases}\text{ανοιχτό}\\ \text{κλειστό}\end{cases}$ ή φανάρι $\begin{cases}\text{κόκκινο}\\ \text{πράσινο}\end{cases}$

• Αν είναι ανοιχτό τότε την επόμενη στιγμή
- ↗ ανοιχτό με πιθανότητα p
- ↘ κλειστό με πιθανότητα $1-p$

• Αν είναι κλειστό τότε την επόμενη στιγμή
- ↗ ανοιχτό με πιθανότητα q
- ↘ κλειστό με πιθανότητα $1-q$

Ορίζουμε $X_n = \begin{cases} 0, & \text{αν το φως είναι κλειστό} \\ & \text{αν το n-οστό φανάρι κόκκινο} \\ 1, & \text{αν το φως είναι ανοιχτό} \\ & \text{αν το n-οστό φανάρι πράσινο} \end{cases}$

$S=\{0,1\}$

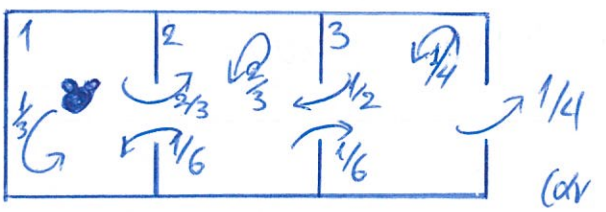


και βρίσκουμε τον πίνακα πιθ. μεταβ.

$$\begin{array}{cc} P_{00} & P_{01} \\ \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ P_{10} & P_{11} \end{array}$$

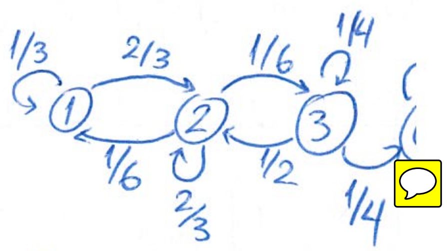
Αντίστοιχο παράδειγμα είναι ένα φανάρι $\begin{cases}\text{κόκκινο}\\ \text{πράσινο}\end{cases}$ όπου ορίζουμε $X_n = \begin{cases} 0, & \text{αν n-οστό φανάρι κόκκινο} \\ 1, & \text{αν n-οστό φανάρι πράσινο} \end{cases}$

② Έχουμε ένα ποντίκι σε έναν λαβύρινθο



(αν βγει έξω, δεν επιστρέφει)

Διάγραμμα μεταβάσεων



Εμείς κοιτάμε την μετακίνηση του ποντικιού
Έχουμε $S = \{0, 1, 2, 3\}$ → το ποντίκι βγαίνει έξω

Προσέχουμε σε κάθε κατάσταση i από το $S=\{0,1,2,3\}$ οι πιθανότητες μετάβασης να αθροίζουν στο 1. ⑥

Τώρα φτιάχνουμε τον πίνακα πιθ. μεταβ.

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

Άρα $$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή του πίνακα αθροίζει στο 1.

③ καιρός $\nearrow$ 0, αν βρέχει
$\searrow$ 1, αν έχει λιακάδα

Δίνονται οι εξής πληροφορίες για τον καιρό:

Χθες	Σήμερα	Αύριο
0	0	↗ 0 (0.75) ↘ 1 (0.25)
0	1	↗ 0 (0.4) ↘ 1 (0.6)
1	0	↗ 0 (0.7) ↘ 1 (0.3)
1	1	↗ 0 (0.2) ↘ 1 (0.8)

Δηλαδή, αν χθες έβρεχε (0) και σήμερα βρέχει (0) τότε αύριο θα βρέχει με πιθανότητα 0.75 και θα έχει λιακάδα με πιθανότητα 0.25.

το κλασικό αντιπαράδειγμα που δεν ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα

α) Αν ορίσουμε $\{X_n, n=0,1,2\}$ $\quad X_n=\begin{cases} 0, & \text{αν βρέχει} \\ 1, & \text{αν έχει λιακάδα} \end{cases}$

τότε η μαρκοβιανή ιδιότητα δεν ισχύει αφού:

$$P(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=1) = 0.8$$
$$\neq$$
$$P(X_2=1 \mid X_0=0, X_1=1) = 0.6$$

Οπότε πρέπει να το ορίσουμε αλλιώς για να ισχύει η μαρκοβ. ιδιότητα β) Έστω $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$

δηλαδή $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Αν $Y_n = (0,0) \Rightarrow X_{n-1} = 0$ (χθες έβρεξε)

$X_n = 0$ (σήμερα βρέχει)

$$\boxed{Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})}$$

Η $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη.

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0 \ (0.75) \\ 1 \ (0.25) \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} Y_{n+1} = (0,0) \\ Y_{n+1} = (0,1) \end{matrix}$$

Εδώ ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα, γιατί για την εύρεση του Y_{n+1} αρκεί η γνώση του Y_n

$\boxed{Η}$ Μεταβατική κατανομή

$\underline{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots)$ $\quad \boxed{p_j^{(n)} = P(X_n = j)}$

η πιθανότητα μετά από n αριθμό βημάτων να βρίσκομαι στην κατάσταση j

<u>Αντίστοιχα:</u> $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

η πιθανότητα μετάβασης από την i στην j κατάσταση σε n αριθμό βημάτων.

$\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^k$ Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης k-βημάτων είναι ο πίνακας πιθαν. μεταβ. ενός βήματος εις την k.

$\boxed{\vartheta}$ Ασυμπτωτική συμπεριφορά ΜΑΔΧ

- T_{ij} : χρόνος πρώτης μετάβασης από το i στο j
- T_{jj} : χρόνος επαναφοράς στο j

$$T_{ij} = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j \mid X_0 = i\}$$

Ακόμα $f_{ij} = P(T_{ij} < \infty) \leq 1$ πιθανότητα πρώτης επίσκεψης

$f_{jj} = P(T_{jj} < \infty) \leq 1$ πιθανότητα πρώτης επανόδου

$\boxed{V_j = E(T_{jj})}$ αναμενόμενος χρόνος επανόδου

<u>Ορσ</u> (α) Μια κατάσταση j λέγεται παροδική αν $f_{jj} < 1$

(β) Μια κατάσταση j λέγεται επαναληπτική αν $f_{jj} = 1$

(δηλαδή σίγουρα θα επανέλθει στη j)

Αν $V_j < \infty$ θετικά επαναληπτική (θα επανέλθει σε πεπερασμένο χρόνο)

Αν $V_j = \infty$ μηδενικά επαναληπτική

- <u>Θεώρημα Chapman-Kolmogorov</u>

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

Αντίστοιχα: $p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ → πιθανότητα επανόδου σε k-βήματα

- Οριακή κατανομή ΜΑΔΧ → $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$

- $m_{ij}(n) = E(M_{ij}(n)) = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$

$m_{ij}(n)$ ↓ ανανεωτική συνάρτηση

$M_{ij}(n)$ ↓ αριθμός μεταβάσεων στη j στις περιόδους

Έχουμε λοιπόν:

α) Για j παροδική $\Rightarrow m_{ij}(\infty) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)} < \infty \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} p_{ij}^{(k)} = 0}$

β) Για j επαναληπτική:

· $f_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = 1 = P(T_{jj} < \infty)$

· Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}(n)}{n} = \frac{1}{V_j}$$

V_j ← αναμενόμενος χρόνος επανόδου

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)} = \frac{1}{V_j}}$$

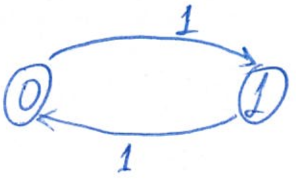
όπου $\frac{1}{V_j} = 0$ όταν $V_j = E(T_{jj}) = \infty$, δηλαδή όταν j μηδενικά επαναληπτική.

$\boxed{\text{I}}$ Περιοδικότητα - Επικοινωνία καταστάσεων

· Έστω $d_j = \text{ΜΚΔ}\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$

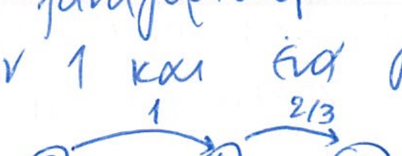
- Αν $d_j > 1$, τότε η κατάσταση j λέγεται περιοδική με περίοδο d_j ή αλλιώς αν $p_{jj}^{(n)} = 0 \ \forall n \neq kd$, $k \in \mathbb{N}$.
- Αν $d_j = 1$, η κατάσταση j λέγεται απεριοδική.

πχ) ①



Έστω ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση 0. Τότε αν φύγουμε, για να ξαναγυρίσουμε στην 0 έχουμε: ένα βήμα για να πάμε στην 1 και ένα για να πάμε πίσω στο 0. Οπότε $d_j = 2$.

②



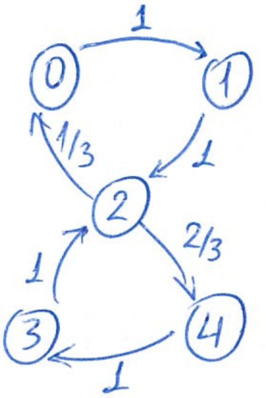
Έστω ότι βρισκόμαστε στην 0. Τότε, αν φύγουμε για να ξαναγυρίσουμε στη 0 υπάρχουν δύο τρόποι:

1ος/ Από τη 0 να πάμε στην 1 και από την 1 στη 0 σε δυο βήματα.

2ος/ Από τη 0 να πάμε στην 1, να πάμε στη 2, να γυρίσουμε στην 1 και να πάμε στη 0 σε συνολικά 4 βήματα.

Οπότε $d_j = 2$, αφού $4 = 2 \cdot 2 = k \cdot 2$, $k \in \mathbb{N}$

3



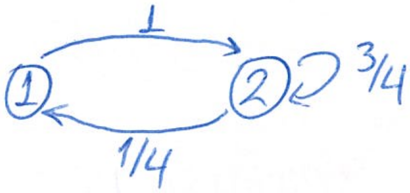
Ανάλογα με πριν βλέπουμε ότι αν βρισκόμαστε στην 0 υπάρχουν δύο τρόποι αν φύγουμε να ξαναγυρίσουμε:

1ος/ $0 \to 1 \to 2 \to 0$ σε 3 βήματα

2ος/ $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 2 \to 0$ σε 6 βήματα

Όμως $d_j = 3$, γιατί $6 = 2 \cdot 3 = k \cdot 3$, $k \in \mathbb{N}$.

4



Έχουμε για την κατάσταση 2 $p_{22}^{(1)} = \frac{3}{4}$

Δηλαδή, το να πάμε από την 2 στην 2 άμεσα σε ένα βήμα γίνεται με πιθανότητα 3/4.

Οπότε $d_j = 1$, άρα είναι απεριοδική.

Παρατήρηση Αν σε μια μαρκοβιανή αλυσίδα υπάρχει κάποια κατάσταση που μπορούμε να γυρίσουμε στον εαυτό της σε ένα βήμα, $p_{jj}^{(1)} > 0$ τότε η αλυσίδα αυτή θα είναι απεριοδική.

Θεωρ) Έστω j επαναληπτική

Αν $j \to$ μηδενικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

$j \to$ θετικά επαναληπτική $\xrightarrow{\text{απεριοδική}}$ $d_j = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\nu_j} > 0$

θετικά επαναληπτική $\xrightarrow{\text{περιοδική}}$ $d_j > 1 \Rightarrow$ το όριο $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ δεν υπάρχει

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd_j)} = \frac{d_j}{\nu_j}$$

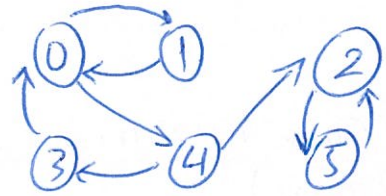
• **Επικοινωνία Καταστάσεων**

Ορσ) 1) Η κατάσταση j είναι προσιτή από την i $(i \to j)$ αν $\exists n$: $p_{jj}^{(n)} > 0$ (δηλαδή από την i μπορείς να πας στη j με θετική πιθανότητα σε n βήματα)

$(\Rightarrow)$ $\exists$ μονοπάτι $i \to i_0 \to i_1 \to \dots \to i_k \to j$ με θετική πιθανότητα

2) Οι i, j επικοινωνούν αν $i \to j$ και $j \to i$.

Πχ)



$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C_1 = \{0, 1, 3, 4\}$
$C_2 = \{2, 5\}$
κλάσεις επικοινωνίας

Έχουμε $0 \leftrightarrow 1$, $0 \leftrightarrow 3$ $\Rightarrow 1 \leftrightarrow 3$

Οι καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους ορίζονται ως μια κλάση επικοινωνίας.

Ακόμα $2 \not\leftrightarrow 4$, οπότε οι καταστάσεις 2 και 4 ανήκουν σε ξεχωριστές κλάσεις επικοινωνίας.

Ορσ) α) Ένα σύνολο καταστάσεων C λέγεται κλειστό αν $\forall i \in C$ $j \notin C \Rightarrow p_{ij} = 0$ (δηλαδή για μια κατάσταση i του συνόλου C, δεν γίνεται να πας σε καμία κατάσταση έξω από το σύνολο αυτό β) C ανοικτό αν δεν είναι κλειστό (δηλαδή από μια κατάσταση εντός του συνόλου μπορείς να πας σε μια κατάσταση εκτός του συνόλου με θετική πιθανότητα, $p_{ij}>0$ $i\in C$, $j\notin C$)

Ορσ/ Μια μαρκοβιανή αλυσίδα αν αποτελείται από μια κλάση επικοινωνίας $\Leftrightarrow$ όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν

πχ/ 

Η παραπάνω μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη $\Rightarrow \nexists$ $C\subset S$, C ανοικτό.

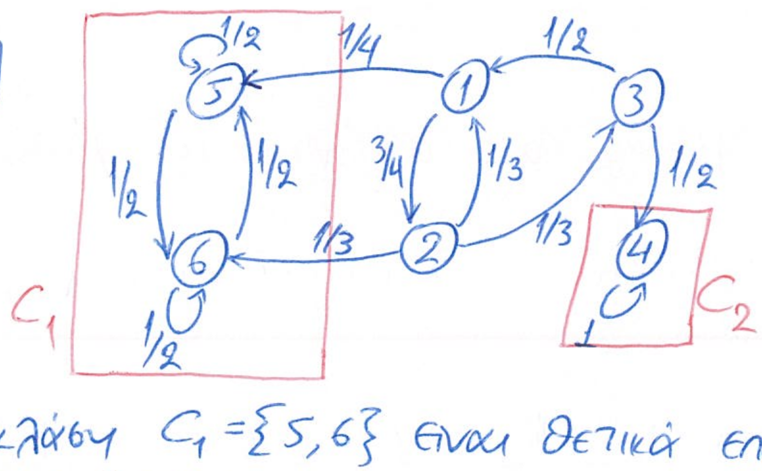
Θεωρ/ Αν $i\leftrightarrow j$, τότε και οι δύο είναι του ίδιου τύπου (θετικά επαναληπτικές, μηδενικά επαναληπτικές, παροδικές ή επίσης απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο)

Παρατήρηση Αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, τότε όλες οι καταστάσεις είναι ίδιου τύπου.

Θεωρ/ Αν $C\subset S$ επαναληπτική κλάση, τότε C κλειστό σύνολο.

- Ανοιχτή κλάση $\Rightarrow$ παροδική
- Επαναληπτική κλάση $\Rightarrow$ κλειστή
- Κλειστή κλάση $\Rightarrow$ αν $|C|<\infty$ $\Rightarrow$ θετικά επαναληπτική (δηλαδή αν η C έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων)

Τέλος, αν $C=\{i\}$ με C κλειστό μονοσύνολο $\Rightarrow$ i κατάσταση απορρόφησης

πχ/ 

Η κλάση $C_1=\{5,6\}$ είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική. Είναι κλειστό σύνολο.

Η κλάση $C_2=\{4\}$ είναι απορροφητική (κλειστό σύνολο).

Το παροδικό σύνολο είναι το $T=\{1,2,3\}$ (ανοιχτό σύνολο)

K Στάσιμες και οριακές πιθανότητες

Πίνακας πιθαν. μεταβ.

Έστω $\underline{\pi}=(\pi_j, j\in S)$ διάνυσμα πιθανότητας με $\underline{\pi}=\underline{\pi}\cdot\mathbb{P}$
$\underline{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\dots)$

Η μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου είναι στάσιμη αν $\underline{p}^{(n)}=$ σταθ
δηλαδή αν $\underline{p}^{(n)}=\underline{\pi}$ $\forall n$ (Αν $\underline{p}^{(0)}=\underline{\pi} \Rightarrow \underline{p}^{(n)}=\underline{\pi}$)

Μεταβατική κατανομή

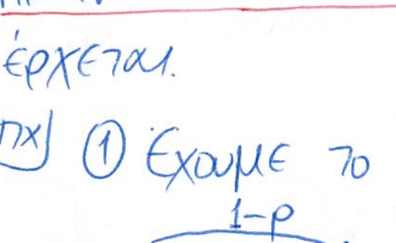
Έχουμε
$\boxed{\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij}}$, Εξίσωση ισορροπίας
$\boxed{\sum_j \pi_j = 1}$, Εξίσωση κανονικοποίησης

από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε τις στάσιμες

Προσοχή $\underline{\pi}=0$, πάντα λύση.
Μας ενδιαφέρουν οι μη αρνητικές/μη μηδενικές λύσεις.

Παρατήρηση Για να βρίσκουμε τις στάσιμες παρατηρούμε το διάγραμμα μεταβάσεων και σε κάθε κατάσταση του j, το δεξί μέλος της ισότητας της εξίσωσης ισορροπίας είναι το γινόμενο της πιθανότητας να φθάσει στη j επί το π_i από το οποίο προέρχεται.

πχ ① Έχουμε το εξής διάγραμμα μεταβάσεων



Για να βρούμε τα π έχουμε:

(0): $\pi_0=\pi_0\cdot p \quad + 1\cdot\pi_1$

η μια πιθανότητα (p) να φτάσει στη κατάσταση 0 επί το π_0

η δεύτερη πιθανότητα (1) να φτάσει στο 0 επί το π_1 επειδή προέρχεται από την κατάσταση 1

(1): $\pi_1=\pi_0(1-p)$ η πιθανότητα να φτάσει στην 1 είναι $1-p$ επί την στάσιμη π_0 αφού προέρχεται από την κατάσταση 0

Οπότε έχουμε $\left.\begin{array}{l}\pi_0 = \pi_0 \cdot p + \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0(1-p) \\ \pi_0 + \pi_1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}(1-\pi_0) = \pi_0(1-p) \\ \pi_1 = 1-\pi_0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_0 = \dfrac{1}{2-p}$ και $\pi_1 = \dfrac{1-p}{2-p}$

<u>Θεωρ</u>/ Έστω αδιαχώριστη Μ.Α.Δ.Χ. Η αλυσίδα είναι <u>θετικά επαναληπτική</u> αν έχει <u>μοναδική στάσιμη π</u> τ.ω. $\pi_j > 0$ $\forall j \in S$. Σε αυτή την περίπτωση $\boxed{\pi_j = \dfrac{1}{\nu_j}}$, $j \in S$.

Οπότε για τις οριακές πιθανότητες θα έχουμε:

- Για θετικά επαναληπτική αδιαχώριστη

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\nu_j} = \pi_j$ (για απεριοδική)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m_{ij}(n)}{n} = \dfrac{1}{\nu_j}$

<u>Παρατήρηση</u> Οι στάσιμες κατανομές π_i σε μια κατάσταση i, $i=0,1,\ldots$ ερμηνεύονται ως ποσοστά περιόδων (χρόνου) που η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i.

<u>πχ</u>/
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$
Τότε η αλυσίδα είναι περιοδική $\boxed{d=2}$ και δεν έχει στάσιμη κατανομή.

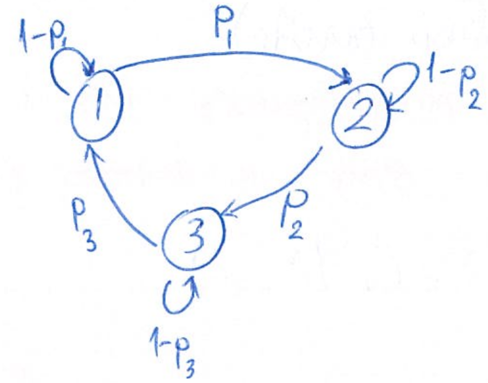
Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική ως κλειστό πεπερασμένο σύνολο.

Όμως οι εξισώσεις ισορροπίας έχουν μοναδική λύση που ερμηνεύεται ως αντίστοιχα ποσοστά χρόνου

Έχουμε: $\begin{cases}(1):\ \pi_1 = 1\cdot\pi_2 \\ (2):\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1\end{cases}$ ← αφού με πιθανότητα 1 πάει από την 2 στην 1 επί την στάσιμη της κατάστασης από την οποία προέρχεται.

$\Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \dfrac{1}{2}$ Οπότε σε αυτή την αλυσίδα το μισό χρόνο θα βρισκόμαστε στην κατάσταση 1 και τον άλλο μισό στη 2.

Άλλο ένα παράδειγμα



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη $\Rightarrow$ θετικά επαναληπτ.
Επίσης αφού $\forall i$ $p_{ii} > 0$ έχουμε $d=1$ οπότε είναι απεριοδική.
Επομένως υπάρχει οριακή κατανομή $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ που είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

(1): $\pi_1 = (1-p_1)\pi_1 + p_3 \pi_3$

αφού με $(1-p_1)$ πάει ξανά στην 1 επί το π_1

αφού με πιθ. p_3 έρχεται στην 1 από την 3 επί το π_3

(2): $\pi_2 = (1-p_2)\pi_2 + p_1 \pi_1$

αφού με $(1-p_2)$ πάει ξανά στη 2 επί το π_2

αφού με πιθ. p_1 έρχεται στη 2 επί το π_1 (αφού π_1 είναι η στάσιμη της 1)

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Παραλείψαμε την εξίσωση ισορροπίας της 3 αφού δεν χρειάζεται.
Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε τα π_1, π_2, π_3

$\boxed{\Lambda}$ Διαχωρίσιμες μαρκοβιανές αλυσίδες
{Λ_1 πιθανότητες απορρόφησης - οριακές πιθανότητες}

όπου $C_1, C_2, \ldots, C_m$ θετικά επαναληπτικές κλάσεις
T = σύνολο παροδικών καταστάσεων

Έστω για $i \in T$ (παροδικό σύνολο)

$X_{ik} \longrightarrow$ η πιθανότητα απορρόφησης της i κατάστασης στην k κλάση (C_k)

$$X_{i,k} = X_{i,C_k} = \lim_{n \to \infty} P(X_n \in C_k \mid X_0 = i)$$

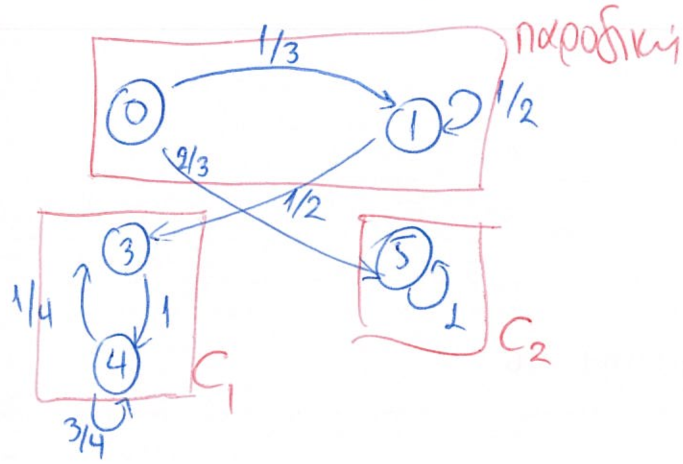
Έχουμε: $X_{ik} = \sum_{j \in C_k} P_{ij} + \sum_{j \in T} P_{ij} X_{jk}$, $i \in T$

δύσχρηστος τύπος, θα το βρίσκουμε οπτικά από το διάγραμμα μετάβασης

το οποίο είναι σύστημα εξισώσεων με αγνώστους X_{1k}, X_{2k}, ..., X_{ik} , $i \in T$.

Προσοχή Για κάθε k (απορρόφηση σε κάποια κλάση έχω και ένα ξεχωριστό σύστημα εξισώσεων $i \in T$).

πχ)



$T = \{0, 1\}$

$C_1 = \{3, 4\}$

$C_2 = \{5\}$

Πιθανότητες απορρόφησης στη C_1: X_{0,C_1} X_{1,C_1}

- $X_{0,C_1} = \frac{1}{3} \cdot X_{1,C_1} + \frac{2}{3} \cdot \underbrace{X_{5,C_1}}_{=0}$

με πιθ 1/3 πάει από τη 0 στην 1 επί το X_{1,C_1}

με πιθ. 2/3 πάει από τη 0 στην 5 επί το X_{5,C_1}

η κατάσταση 5 είναι στην κλάση C_2, επομένως είναι αδύνατο να απορροφηθεί στη C_1.

- $X_{1,C_1} = \frac{1}{2} X_{1,C_1} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{X_{3,C_1}}_{=1}$

με πιθ 1/2 παραμένει στην κατάσταση 1 επί το X_{1,C_1}

με πιθ. 1/2 πάει στην 3 επί το X_{3,C_1}

η κατάσταση 3 είναι στην κλάση C_1, επομένως έχει απορροφηθεί ήδη.

Ισχύει $X_{i,C_1} + X_{i,C_2} = 1 \quad , i=0,1$

Άρα για τις πιθανότητες απορρόφησης στη C_2:

$X_{0,C_2} = 1 - X_{0,C_1}$

$X_{1,C_2} = 1 - X_{1,C_1}$

Παρόλα αυτά ας το κάνουμε αναλυτικά για να το δούμε ως παράδειγμα (Πιθανότητες απορρόφησης στη C_2: X_{0,C_2}, X_{1,C_2})

- $X_{0,C_2} = \frac{1}{3} \cdot X_{1,C_2} + \frac{2}{3} \cdot X_{5,C_2}^{=1}$ ← η κατάσταση 5 ανήκει στην κλάση C_2, επομένως έχει απορροφηθεί.

  με πιθ. 1/3 πάει από τη 0 στην 1 επί το X_{1,C_2}

  με πιθ 2/3 πάει από τη 0 στην 5 επί το X_{5,C_2}

- $X_{1,C_2} = \frac{1}{2} \cdot X_{1,C_2} + \frac{1}{2} \cdot X_{3,C_2}^{=0}$ ← η κατάσταση 3 ανήκει στην κλάση C_1, επομένως είναι αδύνατο να απορροφηθεί στη C_2.

  με πιθ. 1/2 παραμένει στην 1 επί το X_{1,C_2}

  με πιθ 1/2 πάει στην 3 επί το X_{3,C_2}

Στάσιμες κατανομές στις C_1, C_2

$$C_1: \begin{cases} \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{5} \quad , \quad \pi_4 = \frac{4}{5}$$

C_2: Η κατάσταση 5 είναι απορροφητική οπότε $\pi_5 = 1$

Οριακές πιθανότητες | 1ον Έστω C θετικά επαναληπτική κλάση, απεριοδική $\forall i,j \in C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

$2^{ον}$// Έστω $i \in T$, $j \in C_k$ (θετ. επαν. κλάση απεριοδική)

$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = X_{i,C_k} \cdot \pi_j$

Προσοχή Αν η κλάση αυτή είναι περιοδική, τότε το όριο $\nexists$.

$3^{ον}$// Έστω $i \in T$, $j \in T$ (δηλαδή και οι δύο ανήκουν στο παροδικό σύνολο)

τότε $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

Ας τα δούμε αυτά στο προηγούμενο παράδειγμα:

- $\lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = 0$ (περίπτωση 3)
- $\lim_{n\to\infty} p_{43}^{(n)} = \pi_3$ (περίπτωση 1)
- $\lim_{n\to\infty} p_{04}^{(n)} = X_{0,C_1} \cdot \pi_4$ (περίπτωση 2)
- $\lim_{n\to\infty} p_{15}^{(n)} = X_{1,C_2} \cdot \pi_5$ (περίπτωση 2
- $\lim_{n\to\infty} p_{35}^{(n)} = 0$ (αφού $3 \in C_1$ και $5 \in C_2$)

{ Λ_2 Αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης V_{ij} ή f_i }

T_{ij} : Χρόνος πρώτης μετάβασης

$E[T_{ij}] = V_{ij}$ = αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης

Για $i=j$ $\quad E(T_j) = V_j$

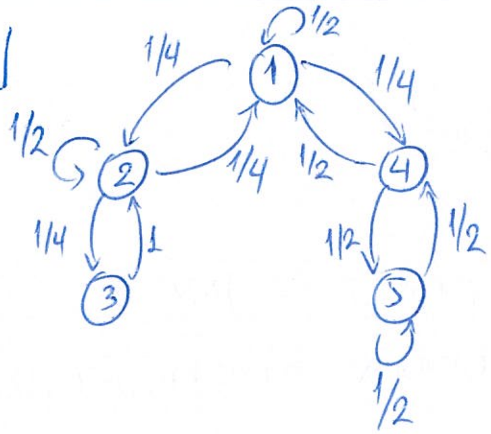
Έχουμε $V_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} V_{kj}$

πάλι δεν χρησιμοποιούμε τον τύπο, αλλά το πηγαίνουμε οπτικά από το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης

Λύνουμε πάλι το αντίστοιχο σύστημα που προκύπτει.

- Προσέχουμε πάντα να προσθέτουμε το ένα βήμα που χρειάζεται για να πάει από τη μια κατάσταση σε μια άλλη.

ΠΧ1



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη => θετικά επαναληπτική. Ακόμα είναι απεριοδική αφού $p_{11}>0$ => 1 απεριοδική και άρα και οι άλλες είναι απεριοδικές αφού ανήκουν στην ίδια κλάση)

Να βρεθεί ο αναμενόμενος χρόνος μετάβασης από την 3 στην

↳ Θα πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα με άγνωστους τους αναμενόμενους χρόνους των καταστάσεων 1,2,3,5 στο 4

Λύση

Για να βρούμε το χρόνο αυτό πρέπει να βρούμε τους χρόνους όλων των καταστάσεων στο 4 (V_{i4})

Έχουμε: • $V_{14} = 1 + \frac{1}{2} V_{14} + \frac{1}{4} \cancel{V_{44}}^{0} + \frac{1}{4} V_{24}$

- 1: προσθέτουμε ένα
- $\frac{1}{2} V_{14}$: με πιθ $\frac{1}{2}$ παραμένει στην 1 επί V_{14}
- $\frac{1}{4} V_{44}$: με πιθ $\frac{1}{4}$ πάει στην 4 επί V_{44} (=0 αφού έχει φτάσει)
- $\frac{1}{4} V_{24}$: με πιθ $\frac{1}{4}$ πάει στην 2 επί V_{24}

• $V_{24} = 1 + \frac{1}{2} V_{24} + \frac{1}{4} V_{34} + \frac{1}{4} V_{14}$

- 1: προσθ. ένα
- $\frac{1}{2} V_{24}$: με πιθ $\frac{1}{2}$ παραμένει στη 2 επί V_{24}
- $\frac{1}{4} V_{34}$: με πιθ $\frac{1}{4}$ πάει στην 3 επί V_{34}
- $\frac{1}{4} V_{14}$: με πιθ $\frac{1}{4}$ πάει στην 1 επί V_{14}

• $V_{34} = 1 + 1 \cdot V_{24}$

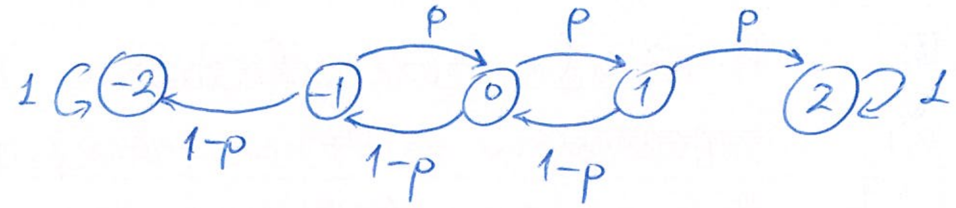
- 1: προσθ. ένα
- $1 \cdot V_{24}$: με πιθ. 1 πάει στην 2 επί V_{24} (αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από τη 2 στην 4

• $V_{54} = 1 + \frac{1}{2} V_{54} + \frac{1}{2} \cancel{V_{44}}^{0}$

- 1: προσθ. ένα
- $\frac{1}{2} V_{54}$: με πιθ $\frac{1}{2}$ παραμένει στην 5 επί V_{54}
- $\frac{1}{2} V_{44}$: με πιθ $\frac{1}{2}$ πάει στην 4 επί V_{44} (=0 αφού έχει φτάσει)

Επιλύοντας το παρακάτω σύστημα βρίσκουμε το V_{34}

<u>πχ 2</u>



Να βρεθεί ο αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης σε μια από τις καταστάσεις $-2, 2$ → απορροφητικές εφόσον βρίσκεσαι στη 0.

<u>Λύση</u>

Οι καταστάσεις $-1, 0, 1$ είναι παροδικές.

Έστω f_i ο αναμενόμενος χρόνος. Έχουμε:

$$f_{-1} = 1 + p f_0 + (1-p)\cdot 0$$

προσθέτω ένα — με πιθ. p πηγαίνεις στη 0 επί το f_0 — με πιθ. $(1-p)$ πηγαίνεις στην -2 επί 0 (αφού απορροφήθηκες ήδη)

$$f_0 = 1 + (1-p) f_{-1} + p f_1$$

προσθ. ένα — με πιθ $(1-p)$ πηγαίνεις στην -1 επί f_{-1} — με πιθ p πηγαίνεις στην 1 επί f_1

$$f_1 = 1 + (1-p) f_0 + p\cdot 0$$

προσθ. ένα — με πιθ $(1-p)$ πηγαίνεις στην 0 επί f_0 — με πιθ. p πηγαίνεις στην 2 επί 0 (αφού απορροφήθηκες ήδη)

Αντικαθιστώντας την πρώτη και την τρίτη εξίσωση στη δεύτερη παίρνουμε:

$$f_0 = 1 + (1-p) + (1-p)p f_0 + p + p(1-p) f_0 = 2 + 2p(1-p) f_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{2}{1-2p(1-p)}}$$

Επομένως, για ένα συγκεκριμένο j που σου ζητείται βρίσκεις τα f_i $i \neq j$ και λύνεις κάθε φορά το αντίστοιχο σύστημα.

M Μαρκοβιανές αλυσίδες και αμοιβές

• Έστω R_n αμοιβή την περίοδο n.

• $E[R_n \mid X_n = i] = r_i$

πιθανότητα μετάβασης από i σε j

Έχουμε $r_i = \sum_0 r_{ij} P_{ij}$ αμοιβή σε ένα βήμα

αμοιβή μετάβασης από i σε j

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} r_i \pi_i \quad \text{μέση αμοιβή συνολικών βημάτων}$$

(αν αντί για κέρδος έχεις κόστος $\bar{c}$)

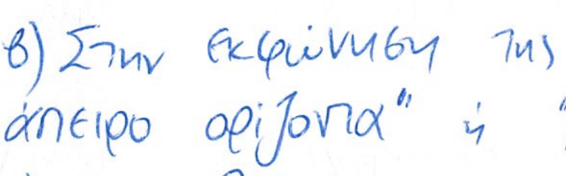
Παρατήρηση α) Το r_i βρίσκεται πολλές φορές άμεσα από τα δεδομένα της άσκησης.

β) Στην εκφώνηση της άσκησης θα λέει συνήθως "σε μεγάλο, άπειρο ορίζοντα" ή "μακροπρόθεσμα".

γ) Σε κάθε περίπτωση για να βρούμε την αμοιβή θα βρίσκουμε την στάσιμη κατανομή $\underline{\pi}$ (υπάρχει αν η Μ.Α. είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική)

πχ 1) Έστω μηχάνημα με $X_n = \begin{cases} 0, & \text{δεν λειτουργεί} \\ 1, & \text{λειτουργεί} \end{cases}$

με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης:



Η αλυσίδα είναι θετ. επαν. και αδιαχώριστη, απεριοδική. Βρίσκουμε στάσιμες π_0, π_1.

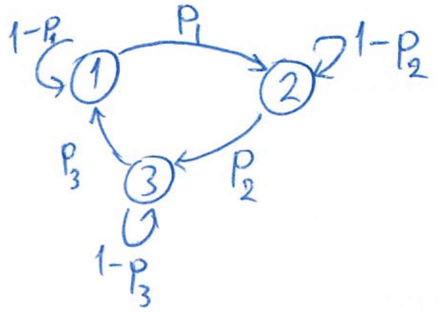
Ερώτημα

Έστω ότι όταν το μηχάνημα είναι χαλασμένο κοστίζει 30 μονάδες για την επισκευή του, ενώ όταν λειτουργεί επιφέρει έσοδο 70 μονάδες. Να βρεθεί το μέσο έσοδο μακροπρόθεσμα ανά περίοδο.

Έχουμε τότε $r_0 = -30$ και $r_1 = 70$ (αμοιβές ενός βήματος)

Άρα $\bar{R} = \sum r_i \pi_i = -30\pi_0 + 70\pi_1$

Πχ 2 Έστω



διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος

Έχουμε τρία νομίσματα 1, 2, 3. Αν $X_n = i$, τότε το νόμισμα i είναι σε χρήση, $i = 1, 2, 3$. Αν το νόμισμα φέρει γράμματα η κατάσταση θα παραμένει ίδια με πιθανότητα $1-p_i$, ενώ αν φέρει κεφάλι η κατάσταση θα αλλάζει στο επόμενο νόμισμα με πιθανότητα p_i.

Ερώτημα

Αν κάθε φορά που φέρνουμε κεφάλι κερδίζουμε 1 ευρώ, ποιο είναι το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα;

<u>Απάντηση</u> Βρίσκουμε πρώτα την οριακή κατανομή $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ως γνωστόν.

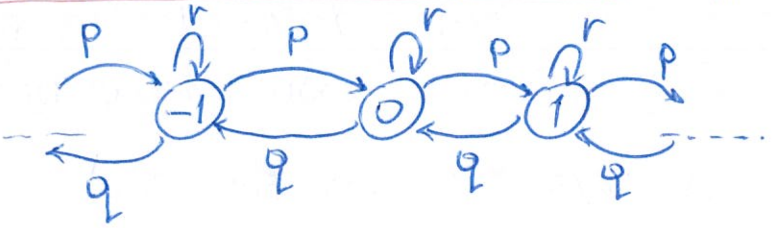
Σε κάθε κατάσταση το κέρδος είναι ίσο με 1 αν η επόμενη μετάβαση γίνει σε διαφορετική κατάσταση (αν έρθει κεφάλι) και 0 αν η κατάσταση παραμένει η ίδια. Οπότε:

$$r_i = \underset{r_{ij}}{\underset{\shortparallel}{1}} \cdot \underset{p_{ij}}{\underset{\shortparallel}{p_i}} + \underset{r_{ii}}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot \underset{p_{ii}}{\underset{\shortparallel}{(1-p_i)}} = p_i \qquad \forall\, i = 1, 2, 3$$

Οπότε η αναμενόμενη αμοιβή ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι $R = \sum_{i \in S} r_i \pi_i \Rightarrow R = p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + p_3 \pi_3 = \ldots$

N Τυχαίος περίπατος

<u>Ο απλός τυχαίος περίπατος</u> έχει διάγραμμα μεταβάσεων:

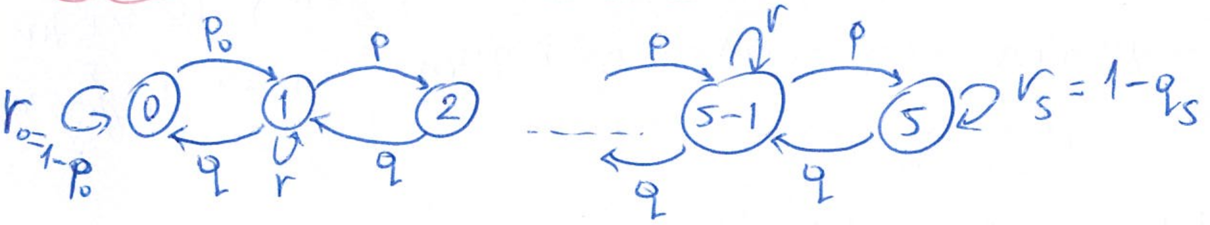


Τώρα αν $p=0$, $q>0$ παροδική $(\to -\infty)$
αν $p>0$, $q=0$ παροδική $(\to +\infty)$

Έστω ότι $p,q>0 \Rightarrow$ αδιαχώριστη αλυσίδα → όλες οι καταστάσεις θα είναι ίδιου τύπου

<u>Περιοδικότητα</u> · Αν $r>0 \Rightarrow$ απεριοδική
· Αν $r=0 \Rightarrow$ περιοδική με $d=2$

Περιορισμένος τυχαίος περίπατος



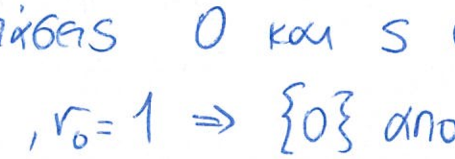
Οι καταστάσεις 0 και s είναι φράγματα

- Αν $p_0=0$, $r_0=1 \Rightarrow \{0\}$ απορροφητική κλάση
- Αν $q_s=0$, $r_s=1 \Rightarrow \{s\}$ απορροφητική κλάση
- Αν $p_0=0 \Rightarrow 0$: απορ. φράγμα
  Αν $p_0=1 \Rightarrow 0$: ανακλαστικό φράγμα
  Αν $0<p_0<1 \Rightarrow 0$: ελαστικό φράγμα

} αντίστοιχα για το s

<u>πχ</u> Για $S=\{0,1\}$ $p+q=1$ $\mathbb{P}=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

$\pi_0, \pi_1 = ;$



Έχουμε: $\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 p + \pi_1 \cdot q \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$

- Για περισσότερες ασκήσεις ΜΑΔΧ διαβάστε τα μαθήματα 14, 23, 24 από e-class σημειώσεις 2014-2015

⊕ Σειρά ασκήσεων 1 <u>Ομάδα Α</u>: 2, 3, 4, 5, 8
<u>Ομάδα Β</u>: 1, 6, 7, 9, 10, 11

⊕ Παλιά θέματα Εξετάσεων

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου (Μ.Α.Σ.Χ.)

$\boxed{\text{I}}$ Βασικές έννοιες στις ΜΑΣΧ

- Χώρος καταστάσεων $S \subseteq \mathbb{N}_0$
- Στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ όπου $X(t)$ = η κατάσταση τη χρονική στιγμή t.

- Μαρκοβιανή ιδιότητα → πρέπει να ισχύει για να έχουμε στοχαστική ανέλιξη.

Έχουμε ότι δοθέντος του $X(t) = i$ → παρόν οι τυχαίες μεταβλητές $X(t+s)$ → μέλλον, $X(t-u)$ → παρελθόν είναι ανεξάρτητες για κάθε $u, s > 0$.

Δηλαδή δεδομένου του παρόντος ισχύει ότι το μέλλον είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος.

Παρατήρηση: Την μαρκοβιανή ιδιότητα θα πρέπει να την γράφετε είτε ζητείται είτε όχι από την άσκηση, όπως και στις ΜΑΔΧ.

- T_i = χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i \in S$

$T_i \sim Exp(q_i)$ $\qquad f_i(t) = q_i e^{-q_i t}, \; t \geq 0$

↳ ρυθμός στην κατάσταση i

Άρα αφού ακολουθεί εκθετική κατανομή

$E(T_i) = \dfrac{1}{q_i}$ όπου $q_i < \infty \quad \forall i \in S$

- Πιθανότητα μετάβασης από την i στην j

$P_{ij} = P(X(t^+) = j \mid X(t^-) = i)$

Υπενθύμιση από πιθανότητες

Εκθετική κατανομή $\quad T \sim Exp(\lambda) \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t \geq 0$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad P(T > t) = e^{-\lambda t}$

Θ Δύο βασικές εφαρμογές με τον χρόνο παραμονής

Πχ1 Έστω $T_1 \sim Exp(\lambda)$, $T_2 \sim Exp(\mu)$ με T_1, T_2 ανεξάρτητες
Τότε ο χρόνος παραμονής είναι το $\min(T_1, T_2)$
Άρα $T = \min(T_1, T_2)$

$$P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\min(T_1, T_2) > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) \overset{\text{ανεξ.}}{=}$$
$$1 - [P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t)] = 1 - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} \Rightarrow T \sim Exp(\lambda+\mu)$$

Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος παραμονής ακολουθεί εκθετική με το άθροισμα των ρυθμών $(\lambda+\mu)$.

Πχ2

$$\underbrace{P(T = T_1)}_{\text{η πιθανότητα ο χρόνος παραμονής να είναι ο } T_1} = P(T_1 < T_2) = \int_{u=0}^{\infty} P(T_1 < T_2 \mid T_2 = u) \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} du =$$

$$= \int_0^{\infty} P(T_1 < u) \cdot \mu e^{-\mu u} du = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda u}) \mu e^{-\mu u} du = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

λ → ο ρυθμός του T_1, $\lambda+\mu$ → ο συνολικός ρυθμός

Ενώ, αντίστοιχα: $P(T = T_2) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

μ → ο ρυθμός του T_2, $\lambda+\mu$ → ο συνολικός ρυθμός

Π Πίνακας ρυθμών μετάβασης – διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

- q_{ij} : ο ρυθμός μετάβασης από την i στη j με $i, j \in S$, $i \neq j$

- $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ (ρυθμός στην κατάσταση i)

Έχουμε ακόμα $p_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{q_i} \Rightarrow \boxed{q_{ij} = q_i \cdot p_{ij}}$

p_{ij}: όταν συμβαίνουν μεταβάσεις γίνονται με πιθανότητα p_{ij}

Όπως είχαμε στις ΜΑΔΧ πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, έτσι έχουμε στις ΜΑΣΧ πίνακα ρυθμών μετάβασης που είναι ο εξής:

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & \boxed{q_{01} \quad q_{02} \quad q_{03} \quad \cdots} \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma = q_0$

← στοχαστικός πίνακας ρυθμών

Για να τον κατασκευάσουμε βάζουμε στη διαγώνιο το $-q_i$, το οποίο το βρίσκουμε προσθέτοντας τα υπόλοιπα στοιχεία της γραμμής.

πχ) $q_0 = q_{01} + q_{02} + q_{03} + \ldots$

$q_1 = q_{10} + q_{12} + q_{13} + \ldots$

δηλαδή: $q_{ii} = -q_i = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$

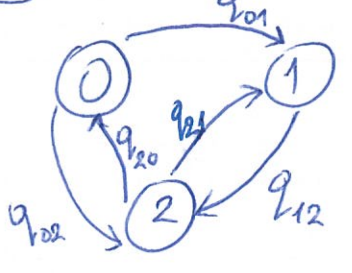
Παρατήρηση α) Στον πίνακα Q το άθροισμα κάθε γραμμής είναι ίσο με το μηδέν.

β) Τα μη διαγώνια στοιχεία είναι ≥ 0.

γ) Οι ρυθμοί δεν είναι πιθανότητες, άρα δεν είναι αναγκαστικά ≤ 1.

• Από τον πίνακα ρυθμών μετάβασης μπορούμε να φτιάξουμε αντίστοιχα το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

πχ1) Έστω το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης τριών καταστάσεων



$q_{10} = 0$

πχ 2] Έστω μηχάνημα που εναλλάσσεται μεταξύ λειτουργίας και επισκευής. Άρα $\{X(t), t \geq 0\}$, $X(t) = \begin{cases} 0 & \text{επισκευή} \\ 1 & \text{λειτουργία} \end{cases}$

Έστω ότι ο χρόνος επισκευής $\sim Exp(2)$

χρόνος λειτουργίας $\sim Exp(3)$

Να βρεθεί ο πίνακας ρυθμών μετάβασης και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

Λύση

$S = \{0, 1\}$

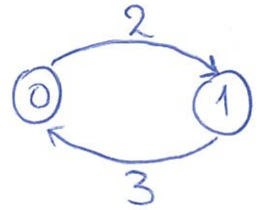
$q_0 = 2$

$q_1 = 3$

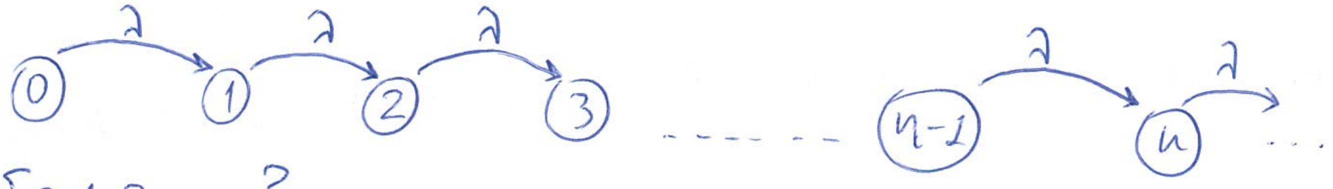
$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} \\ q_{10} & -q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\left(P_{01} = \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{2}{2} = 1 \right.$, όπως και $\left. P_{10} = \frac{q_{10}}{q_1} = \frac{3}{3} = 1 \right)$

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



πχ 3] Διαδικασία Poisson(λ)



$S = \{0, 1, 2, \dots\}$

οπότε, $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$

$q_i = \lambda$

$T_i \sim Exp(\lambda)$

Πχ 4) Έστω βιβλιοθήκη $\begin{cases} 1, \text{ μεγάλη αίθουσα} \\ 2, \text{ μικρές αίθουσες} \end{cases}$

Χρόνος παραμονής: εκθετικός $\begin{cases} \text{μεγάλη αίθουσα } E(T) = 2 \text{ ώρες.} \\ \text{κάθε μικρή 30 λεπτά.} \end{cases}$

Δίνονται οι πιθανότητες μετάβασης από μεγάλη σε μικρή $1/2$, από μικρή $\begin{cases} \text{σε μεγάλη } 3/4 \\ \text{σε άλλη μικρή } 1/4 \end{cases}$

Να βρεθεί ο πίνακας Q και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

<u>Λύση</u>

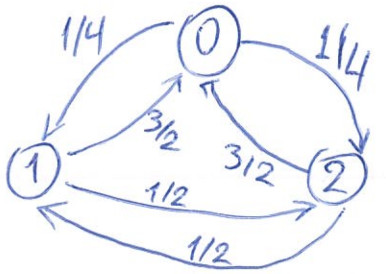
Έστω $X(t)$ = αίθουσα τη στιγμή t $\{\overset{\text{μεγάλη}}{0}, \underbrace{1, 2}_{\text{μικρές}}\}$

$E(T_0) = 2 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{2}$

$E(T_1) = E(T_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 = 2$

$P_{01} = P_{02} = \frac{1}{2}$ $\qquad P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4}$ $\qquad P_{10} = P_{20} = \frac{3}{4}$

Από τη σχέση $\boxed{q_{ij} = q_i \cdot P_{ij}}$ βρίσκουμε τους ρυθμούς μετάβασης



$q_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad q_{21} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$q_{02} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

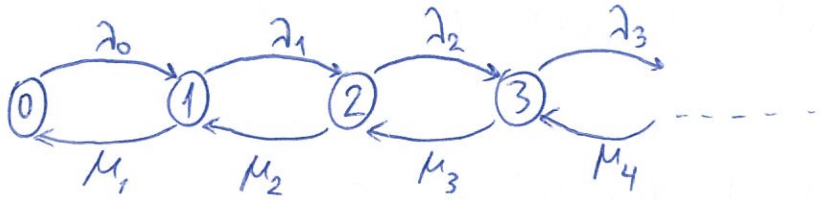
$q_{10} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

$q_{20} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

$q_{12} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

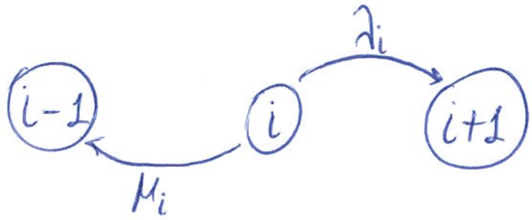
πχ 5 Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων



Έχουμε $q_{i,i+1} = \lambda_i \quad i=0,1,\dots$ (ρυθμοί γεννήσεων)

$q_{i,i-1} = \mu_i \quad i=1,2,\dots$ (ρυθμοί θανάτων)

$X(t)=i$ άτομα



με $q_i = i\lambda + i\mu$

$$P_{i,i+1} = \frac{i\lambda}{i\lambda + i\mu} \quad \text{(Εφαρμογή 2)}$$

Άρα $q_{i,i+1} = q_i \cdot P_{i,i+1} = (i\lambda + i\mu)\dfrac{i\lambda}{i\lambda+i\mu} = i\lambda$

<u>Ειδική περίπτωση</u> $\lambda_i = \lambda, \ \mu_i = \mu \quad \forall i$

Τότε έχουμε διαδικασία γεννήσεων-θανάτων, όπου κάθε άτομο στον πληθυσμό δημιουργεί νέο με $T \sim Exp(\lambda)$ και αποχωρεί με $T \sim Exp(\mu)$.

P Η μεταβατική κατανομή

<u>Ορσ</u> Μια ΜΑΣΧ ονομάζεται κανονική αν έχουμε ότι:
$\sum_{j \in S} P(X(t)=j \mid X(0)=i) = 1$ (δηλαδή πάντα γίνεται πεπερασμένος αριθμός μεταβάσεων σε κάθε χρονικό διάστημα)

$P_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i)$ πιθανότητα μετάβασης

• Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(t+s) = P(X(t+s)=j \mid X(0)=i) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)\, p_{kj}(s) \quad \forall i,j\in S \quad \forall t,s\geq 0$$

• Διαφορικές εξισώσεις: (α) $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\cdot Q \rightarrow$ προδρομικές

(β) $\mathbb{P}'(t) = Q\cdot \mathbb{P}(t) \rightarrow$ αναδρομικές

Ή σε αναλυτική μορφή (α) $p'_{ij}(t) = -q_j p_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\, q_{kj}$

(β) $p'_{ij}(t) = -q_i\, p_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{ik}\, p_{kj}(t)$

με αρχικές συνθήκες $p_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

Αν ζητηθούν σε άσκηση βρίσκεις το q_j και χρησιμοποιείς τους τύπους.

Παρατήρηση α) Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t\geq 0\}$, $N(t)$= αριθμός συμβάντων ή γεγονότων στο διάστημα $[0,t]$, τότε $N(t)\sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

β) Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών συμβάντων $\sim \text{Exp}(\lambda)$ εφόσον έχουμε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (α.ι.τ.μ.)

$\boxed{\Sigma}$ Ταξινόμηση καταστάσεων στις ΜΑΣΧ

Έστω $S_{ij} = \min\{t>0 : X(t)=j \mid X(0)=i\}$ ο χρόνος πρώτης επίσκεψης στην j δεδομένου ότι βρίσκεσαι στην i.

Για $i=j$ $S_{jj} = \min\{t : X(t)=j, \exists s<t \ X(s)\neq j \mid X(0)=j\}$ ο χρόνος πρώτης επανόδου στη j.

• Έχουμε $f_{ij} = P(S_{ij}<\infty)$ η πιθανότητα ο χρόνος πρώτης επίσκεψης να είναι πεπερασμένος

Αν $f_{jj}=1 \Rightarrow j$ επαναληπτική, ενώ αν

$f_{jj}<1 \Rightarrow j$ παροδική

Έστω $\sigma_j = E(S_{jj})$ ο μέσος χρόνος πρώτης επανόδου στη j

- Αν j είναι παροδική $\Rightarrow \sigma_j = \infty$ (θα χρειαστεί άπειρο θεωρητικά χρόνο να επανέλθει στην κατάσταση j).
- Αν j είναι επαναληπτική $\rightarrow \sigma_j < \infty$ θετικά επαναληπτική
  $\searrow \sigma_j = \infty$ μηδενικά επαναληπτική

Θεωρ α) Αν j παροδική ή μηδενικά επαναληπτική, τότε $\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t) = 0$ (όπως στις ΜΑΔΧ).

β) Αν j θετικά επαναληπτική, τότε $\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t) = \dfrac{1}{q_j \sigma_j}$ (εδώ αλλάζει, στις ΜΑΔΧ είχαμε $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \dfrac{1}{\nu_j} = \pi_j$).

Παρατήρηση α) Το $\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t)$ εκτός από οριακή πιθανότητα εκφράζει το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα παραμένει στην κατάσταση j.

β) Στο συνεχή χρόνο δεν υπάρχει περιοδικότητα.

$\boxed{T}$ Εμφυτευμένη διαδικασία διακριτού χρόνου

Έστω $0 < t_1 < t_2 < \dots$ διαδοχικές χρονικές στιγμές μεταβάσεων με $X_n = X(t_n^+)$ $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ΜΑΔΧ

και $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$

κατάσταση αμέσως μετά τη n-οστή μετάβαση

Προσοχή Ισχύει πάντα $p_{ii} = 0$, αφού στο συνεχή χρόνο αντίθετα με το διακριτό, όταν λέμε μετάβαση από μια κατάσταση σε άλλη δεν συμπεριλαμβάνουμε την επιστροφή στην κατάσταση που βρισκόμασταν.

πχ1| Poisson έχει διάγραμμα ρυθμού $0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \cdots$, τότε έχει εμφυτευμένη ΜΑΔΧ $0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 2 \cdots$, αφού

$$P_{01} = \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1 = P_{12}$$

πχ2| Έστω μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$
Δίνεται το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left, "5"] \arrow[dr, "2"'] & & 1 \arrow[ll, "3"] \\
& 2 \arrow[ur, "4"'] &
\end{tikzcd}$$

$$q_0 = q_{01} + q_{02} = 7$$

$$q_1 = q_{10} + q_{12} = 3 \qquad \left(q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \right)$$

$$q_2 = q_{20} + q_{21} = 4$$

Τότε η εμφυτευμένη ΜΑΔΧ θα είναι:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left, "5/7"] \arrow[dr, "2/7"'] & & 1 \arrow[ll, "1"] \\
& 2 \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

αφού $P_{01} = \frac{q_{01}}{q_0} = \frac{5}{7}$ $\quad P_{02} = \frac{q_{02}}{q_0} = \frac{2}{7}$

$P_{10} = \frac{q_{10}}{q_1} = \frac{3}{3} = 1$ $\quad P_{21} = \frac{q_{21}}{q_2} = \frac{4}{4} = 1$

• Μια κατάσταση j είναι προσιτή από την i $(i \to j)$ $P_{ij}(t) > 0$ • Αν $i \to j$ και $j \to i$, τότε $i \leftrightarrow j$ δηλαδή οι καταστάσεις i, j της $\{X(t)\}$ επικοινωνούν αν και μόνο αν οι καταστάσεις i, j της εμφυτευμένης ΜΑΔΧ $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ επικοινωνούν.

• Μια κατάσταση j είναι παροδική (επαναληπτική) στη $\{X(t), t \geq 0\}$ αν και μόνο αν είναι παροδική (επαναλ.) στη $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$.

V Στάσιμες και οριακές κατανομές στις ΜΑΣΧ

Έστω $\underline{p}$ η οριακή κατανομή της ΜΑΣΧ (είχαμε πει ότι $\underline{\pi}$ οριακή κατανομή της ΜΑΔΧ).

Έχουμε ότι $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \dfrac{1}{q_j \sigma_j} = p_j > 0$ για θετικά επαναληπτική

Έχουμε το εξής σύστημα
$$\begin{cases} \circledast\ p_j q_j = \sum\limits_{k\neq j} p_k q_{kj}\,,\ j\in S & \leftarrow \text{εξισώσεις ισορροπίας} \\ \sum\limits_{j\in S} p_j = 1 & \leftarrow \text{εξίσωση κανονικοποίησης} \end{cases}$$

Παρατήρηση

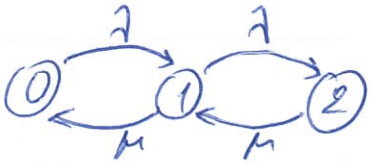
⊛ Βολεύει να το βρίσκουμε πάλι οπτικά από το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης. Παρατηρώντας, έχουμε ότι φεύγει (έξοδος) από μια κατάσταση (γινόμενο κατάλληλου p_j επί το ρυθμό εξόδου) και ισούται με αυτό που επιστρέφει (είσοδος).

γινόμενο κατάλληλου p_j επί το ρυθμό εισόδου

Θεωρ Έχουμε αδιαχώριστη ΜΑΣΧ θετικά επαναληπτική εάνν το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική θετική λύση $\{p_j > 0\,,\ j\in S\}$.

Παρατήρηση Η $\underline{p}$ είναι στάσιμη αν $\underline{p}(0)=\underline{p} \Rightarrow \underline{p}(t)=\underline{p}\ \forall t$

πχ1/ Γέννηση - Θάνατος



Για $i=0$ έχουμε $p_0\cdot\lambda = p_1\cdot\mu$ (1)

Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το $q_{01}(\lambda)$

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το $q_{10}(\mu)$

Για $\underline{i=1}$ έχουμε $p_1\lambda + p_1\mu = p_0\lambda + p_2\mu$ (2)

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στη 2 (λ)

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στην 0 (μ)

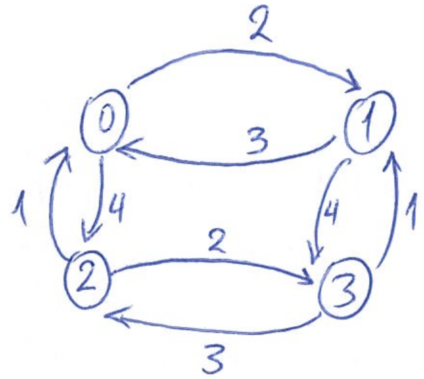
Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 (λ)

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 (μ)

$p_0 + p_1 + p_2 = 1$ (3)

Λύνοντας το σύστημα βρίσκεις τα p_0, p_1, p_2.

πχ 2| Δίνεται το ακόλουθο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έχουμε για $\underline{i=0}$: $2p_0 + 4p_0 = 3p_1 + 1\cdot p_2$

Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εξόδου στην 1 που είναι 2

Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εξόδου στη 2 που είναι 4

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εισόδου στη 0 που είναι 3

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εισόδου στη 0 που είναι 1

Για $\underline{i=1}$: $3p_1 + 4p_1 = 2p_0 + 1\cdot p_3$

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στη 0 που είναι 3

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στην 3 που είναι 4

Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 που είναι 2

Είμαι στην 3 άρα p_3 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 που είναι 1

Για $\underline{i=2}$: $1\cdot p_2 + 2\cdot p_2 = 4p_0 + 3p_3$

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εξόδου στη 0 που είναι 1

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εξόδου στην 3 που είναι 2

Είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εισόδου στη 2 που είναι 4

Είμαι στην 3 άρα p_3 επί το ρυθμό εισόδου στη 2 που είναι 3

Για εξάσκηση κάνουμε και για $\underline{i=3}$ αν και δεν χρειάζεται (περιττή εξίσωση)

$$1\cdot p_3 + 3\cdot p_3 = 4p_1 + 2\cdot p_2$$

είμαι στην 3 άρα p_3 επί το ρυθμό εξόδου στην 1 που είναι 1

είμαι στην 3 άρα p_3 επί το ρυθμό εξόδου στη 2 που είναι 3

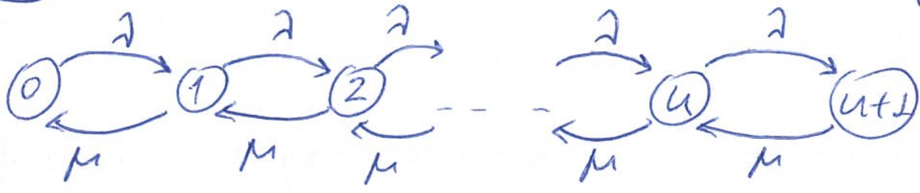
είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εισόδου στην 3 που είναι 4

είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εισόδου στην 3 που είναι 2.

Τέλος, $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Λύνοντας αυτό το σύστημα των εξισώσεων βρίσκουμε τα p_0, p_1, p_2, p_3.

$\underline{\text{πχ 3)}}$ Διαδικασία γεννήσεων-θανάτων για $n=0,\dots,n+1$



Έχουμε για $\underline{i=0}$: $p_0\cdot\lambda = p_1\cdot\mu$

είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εξόδου στην 1 που είναι λ

είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εισόδου στη 0 που είναι μ.

$\underline{i=1}$: $p_1\cdot\lambda + p_1\cdot\mu = p_0\cdot\lambda + p_2\cdot\mu$

είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στη 2 που είναι λ

είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εξόδου στη 0 που είναι μ

είμαι στη 0 άρα p_0 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 που είναι λ

είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εισόδου στην 1 που είναι μ

$\underline{i=2}$: $p_2 \cdot \lambda + p_2 \cdot \mu = p_1 \cdot \lambda + p_3 \cdot \mu.$

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εξόδου στην 3 που είναι λ.

Είμαι στη 2 άρα p_2 επί το ρυθμό εξόδου στην 1 που είναι μ.

Είμαι στην 1 άρα p_1 επί το ρυθμό εισόδου στη 2 που είναι λ

Είμαι στην 3 άρα p_3 επί το ρυθμό εισόδου στη 2 που είναι μ.

$\vdots$

$\underline{i=n}$: $p_n \lambda + p_n \mu = p_{n-1} \lambda + p_{n+1} \mu$

Είμαι στην n άρα p_n επί το ρυθμό εξόδου στην $n+1$ που είναι λ

Είμαι στην n άρα p_n επί το ρυθμό εξόδου στην $n-1$ που είναι μ

Είμαι στην $n-1$ άρα p_{n-1} επί το ρυθμό εισόδου στην n που είναι λ

Είμαι στην $n+1$ άρα p_{n+1} επί το ρυθμό εισόδου στην n που είναι μ.

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n+1} = 1$$

Αν τώρα σε αυτές τις εξισώσεις αντικαταστήσουμε τη μια με την προηγούμενη έχουμε:

$\underline{i=0}$ $\quad p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu$

$\underline{i=1}$ $\quad p_1 \cdot (\lambda + \mu) = p_0 \cdot \lambda + p_2 \mu \Rightarrow p_1 \lambda + \cancel{p_1 \mu} = \cancel{p_1 \mu} + p_2 \cdot \mu \Rightarrow p_1 \cdot \lambda = p_2 \mu$

$\underline{i=2}$ $\quad p_2 (\lambda + \mu) = p_1 \cdot \lambda + p_3 \cdot \mu \Rightarrow p_2 \lambda + \cancel{p_2 \mu} = \cancel{p_2 \mu} + p_3 \cdot \mu \Rightarrow p_2 \cdot \lambda = p_3 \cdot \mu$

κτλ.

Άρα προκύπτει:

$$\begin{array}{l} i=0 \\ i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{array} \begin{cases} p_0 \lambda = p_1 \cdot \mu \\ p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot \mu \\ \vdots \\ p_n \lambda = p_{n+1} \mu \end{cases} \quad n \geq 0$$

$$\Sigma p_n = 1$$

Για $n=\infty$ έχουμε $p_1 = \theta p_0$, όπου $\theta = \lambda/\mu$

$$p_2 = \theta p_1 = \theta^2 p_0$$
$$\vdots$$
$$p_n = \theta^n p_0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Έτσι αντικαθιστώντας στην εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = 1 \Rightarrow p_0 \cdot \frac{1}{1-\theta} = 1 \Rightarrow p_0 = 1-\theta \, , \quad \theta < 1$$

δηλαδή $p_n = \theta^n p_0 = \theta^n (1-\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta}$

άρα η οριακή κατανομή είναι γεωμετρική με παράμετρο $1-\theta$

$\boxed{\Phi}$ Σύνδεση των δύο στάσιμων κατανομών

p_j : Εκφράζει το ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}$ μένει στην κατάσταση j.

π_j : Εκφράζει το ποσοστό των μεταβάσεων της $\{X(t)\}$ προς ή από την κατάσταση j στις n πρώτες μεταβάσεις.

Τύποι σύνδεσης : $\quad p_j = \dfrac{\pi_j / q_j}{\sum_{j \in S} \pi_j / q_j} \quad , \quad \pi_j = \dfrac{p_j q_j}{\sum_{j \in S} p_j q_j}$

πχ/ Έστω $S = \{0, 1\}$. Δίνεται το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης

$$\begin{tikzcd} ⓪ \arrow[r, bend left, "\lambda"] & ① \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

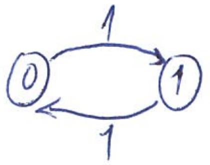
Έχουμε ότι $q_{01} = \lambda$, $q_{10} = \mu$. Άρα $q_0 = \lambda$, $q_1 = \mu$ και έχουμε πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$

Οπότε $p_0 = \dfrac{\pi_0/q_0}{\dfrac{\pi_0}{q_0}+\dfrac{\pi_1}{q_1}}$ (1)

Για να βρούμε το π_0, π_1 φτιάχνουμε την εμφυτευμένη ΜΑΔΧ.

Έχουμε $P_{01} = \dfrac{q_{01}}{q_0} = 1$, $P_{10} = \dfrac{q_{10}}{q_1} = 1$

Αυτή έχει διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης



Άρα $\pi_0 = \pi_1 = \dfrac{1}{2}$

άρα $(1) \Rightarrow p_0 = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ και αντίστοιχα

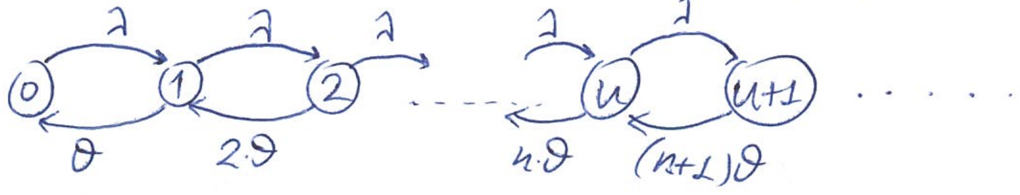
$p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

X] Εύρεση κάποιων ρυθμών μετάβασης

πχ1/ Πολίτες έρχονται σε μια πλατεία σύμφωνα με διαδικασία Poisson(λ). Κάθε άτομο παραμένει στην πλατεία (χρόνος παραμονής) χρόνο που ακολουθεί Exp(θ). Ακόμα έστω X(t) ο αριθμός των ατόμων στην πλατεία τη χρονική στιγμή t.

Λύση

Προκύπτει το εξής διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έστω ότι $X(t)=n$. Τότε μπορούν να συμβούν τα εξής:

① Να έρθει ένα νέο άτομο (με ρυθμό λ)

② Να φύγει ένα άτομο. Όμως πρέπει να προσέξουμε το εξής: από τα ήδη υπάρχοντα άτομα μπορεί να φύγει το οποιοδήποτε με ρυθμό θ το καθένα. Άρα ο χρόνος παραμονής n ατόμων θα ακολουθεί $Exp(n\theta)$ όπως φαίνεται και από την εφαρμογή 1 στο κεφάλαιο 0. Αυτό γιατί ο χρόνος παραμονής n ατόμων που ακολουθεί το καθένα $Exp(\theta)$ θα είναι

$$Exp(\underbrace{\theta+\theta+\ldots+\theta}_{n \text{ φορές}}) = Exp(n\theta)$$

Ανάλογα βρίσκεις και τους υπόλοιπους ρυθμούς του διαγράμματος.

<u>Πχ 2</u> Μια εταιρεία ηλεκτρονικών έχει ένα μοντέλο tablet σε απόθεμα. Αρχικά στο κατάστημα υπάρχουν k μονάδες του προϊόντος. Οι πελάτες που ζητούν το προϊόν έρχονται με διαδικασία Poisson(λ). Κάθε φορά που το κατάστημα πουλάει ένα κομμάτι, κάνει μια παραγγελία στον προμηθευτή για την αντικατάστασή του. Οι χρόνοι παραλαβής των παραγγελιών ακολουθούν $Exp(\mu)$. Εάν κάποιος πελάτης δεν βρει το προϊόν στο κατάστημα φεύγει χωρίς να το αγοράσει. Να βρεθεί το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

<u>Λύση</u>

Έστω $X(t)=$ ο αριθμός προϊόντων στο κατάστημα τη στιγμή t. $X(t)\leq k$ $\forall t$.

Στην κατάσταση $X(t)=i$, $i>0$ έχουν γίνει $k-i$ παραγγελίες.

Έχουμε τα εξής γεγονότα:

① Πώληση ενός tablet (με ρυθμό λ) και μετάβαση στην $i-1$.

② Άφιξη μιας από τις $k-i$ εκκρεμείς παραγγελίες (κάθε μια ακολουθεί $Exp(\mu)$). Ο χρόνος μέχρι την άφιξη κάποιας παραγγελίας ακολουθεί $Exp((k-i)\mu)$. Αυτό γιατί από τις $k-i$ παραγγελίες ο χρόνος άφιξης μιας εκκρεμούς ακολουθεί $Exp(\underbrace{\mu+\mu+\dots+\mu}_{k-i \text{ φορές}})$.

Ψ-Ω Κάποιες βασικές σειρές

- $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta}$
- $\sum_{n=0}^{k} \theta^n = \frac{1-\theta^{k+1}}{1-\theta}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = e^{\alpha}$

Περισσότερες ασκήσεις στις ΜΑΣΧ:

- Μάθημα 22 e-class σημειώσεις 2014-2015.
- Σετ ασκήσεων 2 e-class.

Ομάδας Α: 1, 2, 3α), 3β)

Ομάδας Β: 3γ), 4, 5, 6, 7

+ Παλαιά θέματα εξετάσεων (θέματα 4)