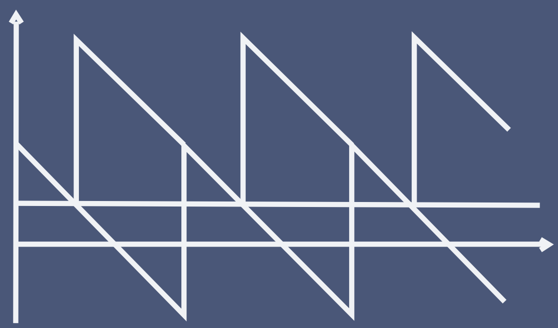
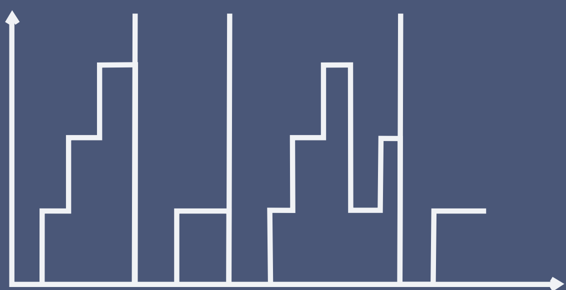
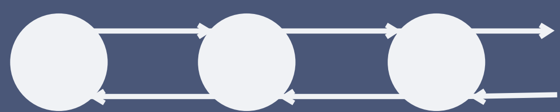
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Απόστολος Ν. Μπουρνέτας
Αντώνιος Θ. Οικονόμου







ΚΑΛΛΙΠΟΣ ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις
Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

Αθήνα 2024

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Απόστολος Μπουρνέτας
Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αντώνιος Οικονόμου
Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
www.kallipos.gr

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:	Δημήτρης Καλλιάρας
Τεχνική επεξεργασία:	Απόστολος Μπουρνέτας, Αντώνιος Οικονόμου
Καλλιτεχνική επιμέλεια εξωφύλλου:	Αντωνία Κόρακα

Κεντρική Ομάδα Υποστήριξης

Γλωσσικός Έλεγχος:	Γεωργία Τριανταφυλλίδου
Γραφιστικός Έλεγχος:	Χρήστος Κεντρωτής
Βιβλιοθηκονομική Επεξεργασία:	Μενέλαος Γουρνιζάκης

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9
15780 Ζωγράφου
www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική αναφορά:	Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ., (2024). *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα* [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις
Διαθέσιμο στο:	http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497
ISBN:	**978-618-228-207-6**

Αφιερώνεται

στη Μαρία, στον Νίκο, στην Καίτη,
στη Σοφία, στον Γιάννη και στον Θανάση

Απόστολος Μπουρνέτας

στα παιδιά μου,
Θοδωρή και Κυριακή Βασιλική

Αντώνιος Οικονόμου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*».
Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΟΜΕΥΣΕΩΝ - ΑΚΡΩΝΥΜΙΩΝ

ΜΔΑ	Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων
ΜΚΔ	Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης
ATC	Avoid-the-Crowd
BR	Best Response
D	Deterministic
E_r	Erlang-r
FCFS	First-Come-First-Served
FIFO	First-In-First-Out
FTC	Follow-the-Crowd
G	General
GI	General-Independent
LAS	Least-Attained-Service
LCFS	Last-Come-First-Served
LCFS-PR	Last-Come-First-Served-Preemptive-Resume
LIFO	Last-In-First-Out
LS	Laplace-Stieltjes
M	Memoryless, Markovian
PASTA	Poisson Arrivals See Time Averages
SIRO	Service-In-Random-Order
SSTF	Shortest-Service-Time-First

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα

Η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων για την αποτίμηση απόδοσης και τη βελτιστοποίηση συστημάτων και διαδικασιών. Το στοχαστικό μέρος της επικεντρώνεται σε συστήματα και διαδικασίες με κάποιον βαθμό αβεβαιότητας. Ο στόχος του παρόντος συγγράμματος είναι μια σύντομη εισαγωγή στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα. Για τον σκοπό αυτό, παρουσιάζονται η βασική θεωρία και αρκετές εφαρμογές δύο βασικών μεθοδολογικών εργαλείων: των Στοχαστικών Διαδικασιών με Δομή Κόστους και του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού. Επίσης, γίνεται μια εισαγωγή σε δύο βασικές περιοχές εφαρμογών: στη Θεωρία Ουρών Αναμονής και στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.

Η διδασκαλία της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας και, επακόλουθα, η συγγραφή ενός εισαγωγικού συγγράμματος γι' αυτήν, θέτει μια σειρά από ερωτήματα και προβληματισμούς, που δεν επιδέχονται μοναδική απάντηση.

Τα προβλήματα που τίθενται είναι τα εξής:

1. Η Επιχειρησιακή Έρευνα, και ειδικότερα το στοχαστικό μέρος της, είναι ένα διεπιστημονικό αντικείμενο, το οποίο εντάσσεται σε προγράμματα σπουδών Τμημάτων Μαθηματικών, Οικονομικών, Πληροφορικής και Μηχανικών (Βιομηχανίας, Παραγωγής και Διοίκησης, Ηλεκτρολόγων, Μηχανολόγων κλπ.), καθώς και Σχολών Διοίκησης Επιχειρήσεων. Δεδομένου ότι το υπόβαθρο των φοιτητών που προέρχονται από τέτοιες σχολές είναι πολύ διαφορετικό, σε ποιο επίπεδο μαθηματικής λεπτομέρειας πρέπει να αναπτυχθεί η εισαγωγή και ποια πρέπει να θεωρηθούν τα ελάχιστα προαπαιτούμενα;

2. Η Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα συνδυάζει έννοιες και μεθόδους από τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τις Στοχαστικές Διαδικασίες με τα Μαθηματικά της Βελτιστοποίησης (Μαθηματικό Προγραμματισμό). Επομένως, μια εισαγωγή στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα απαιτεί ανασκόπηση των περιοχών αυτών, ώστε να παρουσιαστεί το αναγκαίο υπόβαθρο και να εισαχθεί ο αναγκαίος συμβολισμός. Σε τι έκταση, βάθος και λεπτομέρεια πρέπει να γίνει αυτή η ανασκόπηση;

Υπάρχουν πολλά βιβλία στη βιβλιογραφία που απαντάνε στα παραπάνω ερωτήματα κατά τον έναν ή τον άλλον τρόπο. Π.χ., υπάρχουν κλασικά βιβλία που παρουσιάζουν μια ευρύτατη επισκόπηση των κυριότερων μεθόδων και εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας, που περιλαμβάνει τόσο προσδιοριστικά όσο και στοχαστικά μοντέλα, και στα οποία τα μαθηματικά προαπαιτούμενα είναι ελάχιστα. Τα βιβλία αυτά απευθύνονται σε ένα ευρύ κοινό με πολύ διαφορετικό μαθηματικό υπόβαθρο. Στα βιβλία αυτά, η ροή του κειμένου είναι συνεχής, χωρίς το συνηθισμένο για τα μαθηματικά βιβλία σχήμα «Θεώρημα - Απόδειξη». Επιπλέον, πολλά από

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*».
Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

τα αποτελέσματα περιγράφονται μέσω παραδειγμάτων και δεν δίνεται ξεκάθαρα κάποια γενική διατύπωσή τους. Ή, σε κάποιες περιπτώσεις, διατυπώνονται τα αποτελέσματα με σαφήνεια, αλλά οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν δεν αναφέρονται σαφώς ή παρουσιάζονται κάτω από κάποιες περιοριστικές συνθήκες. Τα βιβλία αυτά είναι ιδιαίτερα φιλικά στον αναγνώστη και πολύ χρήσιμα για μια πρώτη επαφή με το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Από την άλλη πλευρά, όμως, έχουν το μειονέκτημα ότι ο αναγνώστης δεν αποκομίζει ξεκάθαρη εικόνα για τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες ισχύουν τα αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό κάνει τον προσεκτικό αναγνώστη (ιδιαίτερα αυτόν που έχει μαθηματικές ανησυχίες) επιφυλακτικό στο κατά πόσο οι παρουσιαζόμενες μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες σε γενικότερα πλαίσια, τα οποία μπορεί να συναντήσει αργότερα στις σπουδές του. Επίσης, ο αναγνώστης δυσκολεύεται να προσαρμόσει τις μεθόδους ώστε να λειτουργήσουν, όταν κάποια εφαρμογή απαιτεί κάπως διαφορετικό πλαίσιο από αυτό που έχει αναπτυχθεί στο βιβλίο.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν τα βιβλία εκείνα που εστιάζονται στο στοχαστικό μέρος της Επιχειρησιακής Έρευνας και παρουσιάζουν μια μαθηματική ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας, διανθισμένη με εφαρμογές. Τα βιβλία αυτά προσφέρουν στον αναγνώστη ένα στέρεο υπόβαθρο, που τον κάνει να αισθάνεται ασφαλής στην εφαρμογή των παρουσιαζόμενων μεθόδων σε ποικίλα, γενικά πλαίσια. Το μειονέκτημά τους είναι ότι αναγκαστικά δαπανούν το μεγαλύτερο μέρος τους για την αυστηρή ανάπτυξη της θεωρίας και επομένως αφήνουν λίγο χώρο για την ανάπτυξη εφαρμογών και την επίλυση περίπλοκων προβλημάτων. Έτσι, δίνουν στον αναγνώστη την εντύπωση ότι η Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα ταυτίζεται με τη θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών (κυρίως Μαρκοβιανών, ανανεωτικών και ημι-Μαρκοβιανών) με κάποια μορφή βελτιστοποίησης στο τελευταίο μέρος της μελέτης ενός στοχαστικού συστήματος. Επιπλέον, ο αναγνώστης έρχεται σε επαφή με μικρότερο εύρος εφαρμογών και προβλημάτων, χάνοντας έτσι την ευκαιρία να πάρει μια πραγματική γεύση από την ομορφιά και τη δυσκολία πιο περίπλοκων μοντέλων.

Ο δρόμος που ακολουθεί το παρόν σύγγραμμα είναι ενδιάμεσος των παραπάνω δυο δρόμων, προσπαθώντας να αποφύγει τα μειονεκτήματά τους. Η φιλοσοφία του συγγράμματος δίνει τις εξής απαντήσεις στα δυο ερωτήματα που τέθηκαν:

1. Ένα πρώτο μάθημα στις Πιθανότητες και ένα στον Απειροστικό Λογισμό μίας και πολλών μεταβλητών θα πρέπει να θεωρούνται ως τα ελάχιστα προαπαιτούμενα μιας εισαγωγής στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα.

2. Από μεθοδολογική σκοπιά, τα κυριότερα εργαλεία της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας για την αποτίμηση της απόδοσης συστημάτων και διαδικασιών είναι οι ανανεωτικές διαδικασίες και, ειδικότερα, η διαδικασία Poisson, καθώς και οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού και συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, από τη μεριά της βελτιστοποίησης, τα κυριότερα εργαλεία είναι ο Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός, καθώς και κάποιες έννοιες Θεωρίας Παιγνίων. Τα μεθοδολογικά αυτά εργαλεία, θα πρέπει να αναπτυχθούν τόσο στην εννοιολογική όσο και στην τεχνική τους διάσταση στο πλαίσιο μιας πρώτης εισαγωγής στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα. Αυτό θα πρέπει να γίνει, ακόμη κι αν υπάρχει μια πρώτη επαφή μέσω της ανάγνωσης ενός ξεχωριστού συγγράμματος ή της παρακολούθησης ενός ξεχωριστού μαθήματος. Όμως, θα πρέπει να βρεθεί μια βέλτιστη ισορροπία βάθους-έκτασης στον τρόπο που θα παρουσιαστούν αυτά τα αντικείμενα.

Η επιλογή που έχει γίνει στο πλαίσιο του συγκεκριμένου συγγράμματος είναι να παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της θεωρίας κατά τρόπο ακριβή, τόσο όσον αφορά τις προϋποθέσεις, όσο και τα αποτελέσματα, σε μορφή θεωρημάτων. Με άλλα λόγια, κάθε θεωρητικό πλαίσιο περιγράφεται με λεπτομέρεια και διατυπώνουμε τι ακριβώς ισχύει και υπό ποιες προϋποθέσεις. Δεν δίνουμε, όμως, πλήρεις αποδείξεις των αποτελεσμάτων που αφορούν τα μεθοδολογικά εργαλεία (Στοχαστικές Διαδικασίες, Στοχαστικό Δυναμικό Προγραμματισμό), γιατί κάτι τέτοιο θα συνεπαγόταν υπερβολική αύξηση του όγκου του βιβλίου και, επιπλέον, θα έδινε την ψευδή εντύπωση, για την οποία μιλήσαμε παραπάνω, ότι η Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα περίπου ταυτίζεται με τη θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών. Αντί πλήρων αποδείξεων των θεωρητικών αποτελεσμάτων, δίνονται απλούστερες αποδείξεις υπό επιπλέον συνθήκες κανονικότητας ή αιτιολογήσεις των αποτελεσμάτων χωρίς πολλές τεχνικές λεπτομέρειες. Από την άλλη πλευρά, οι αποδείξεις στις εφαρμογές είναι πλήρεις με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί.

Πιστεύουμε ότι η επιλογή αυτή δίνει στον αναγνώστη του βιβλίου τη δυνατότητα να μάθει πώς θα εφαρμόζει τα βασικά μεθοδολογικά εργαλεία της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας κατά τρόπο ακριβή και, επιπλέον, του παρέχει τη δυνατότητα να μελετήσει έναν μεγάλο αριθμό εφαρμογών, χωρίς η έκταση του βιβλίου να γίνει απαγορευτική. Κατά κάποιον τρόπο, τα θεωρητικά αποτελέσματα που είναι θεωρήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων και των Στοχαστικών Διαδικασιών γίνονται τα «αξιώματα» πάνω στα οποία θα οικοδομηθεί η Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα. Έτσι, η προσοχή μετακινείται από την αυστηρή απόδειξη των θεωρητικών αποτελεσμάτων, προς την αυστηρή χρήση τους (ελέγχοντας τις αναγκαίες προϋποθέσεις), ώστε να αποδειχθεί η βελτιστότητα συστημάτων και διαδικασιών σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας στα οποία υπεισέρχεται αβεβαιότητα.

Βεβαίως, για τον αναγνώστη που θέλει να εμβαθύνει περαιτέρω στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα, είναι απαραίτητο σε κάποιο στάδιο να μελετήσει συγγράμματα που αναφέρονται στην αυστηρή ανάπτυξη της θεωρίας των Στοχαστικών Διαδικασιών, του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού και της Θεωρίας Παιγνίων και/ή να παρακολουθήσει σχετικά μαθήματα.

Όσον αφορά τις περιοχές των εφαρμογών, παρουσιάζουμε οργανωμένα, στο τελευταίο μέρος του βιβλίου, βασικά αποτελέσματα και μοντέλα από δυο σημαντικές περιοχές της Επιχειρησιακής Έρευνας: τη Θεωρία Ουρών Αναμονής και τη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων. Στα άλλα μέρη του βιβλίου (Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη και Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων) παρουσιάζουμε και άλλα πεδία εφαρμογών που καλύπτουν μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας.

Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη

Στοχαστική διαδικασία είναι κάθε συλλογή τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητας που παραμετροποιούνται από τον χρόνο, που μπορεί να θεωρείται διακριτός ή συνεχής.

Οι σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου που υπεισέρχονται στα προβλήματα της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας είναι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ έχει αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων (χωρίς βλάβη μπορεί να υποτεθεί κάποιο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}_0$ των μη-αρνητικών ακεραίων). Επιπλέον, έχει τη λεγόμενη Μαρκοβιανή ιδιότητα, που απαιτεί η μελλοντική εξέλιξή της, δεδομένης της παρούσας κατάστασής της, να είναι ανεξάρτητη από την παρελθούσα ιστορία της. Τέτοιου είδους διαδικασίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση συστημάτων που εξελίσσονται σε διακριτό χρόνο (μέρες, μήνες, έτη κλπ.) και τα οποία έχουν αριθμήσιμο (δηλαδή διακριτό) χώρο καταστάσεων. Συνήθως, η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφει στην περίπτωση αυτή τον αριθμό των διακριτών μονάδων που υπάρχουν σε αυτό, όπως πελάτες, προϊόντα κλπ. και/ή τον χαρακτηρισμό της κατάστασης των μονάδων του, όπως ενεργές, ανενεργές κλπ.

Οι σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου που εμφανίζονται στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα είναι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου και οι ανανεωτικές διαδικασίες. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (δηλαδή αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων και τη Μαρκοβιανή ιδιότητα), με τη διαφορά ότι ο χρόνος είναι συνεχής. Τέτοιου είδους διαδικασίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση συστημάτων που εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο και τα οποία έχουν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων. Από την άλλη μεριά, οι ανανεωτικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται για την απαρίθμηση γεγονότων που συμβαίνουν τυχαία στον χρόνο με κάποια μορφή «περιοδικότητας». Μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ καταγράφει το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι τη χρονική στιγμή t για κάθε $t \geq 0$. Η βασική απαίτηση - υπόθεση που μοντελοποιεί τη διαισθητική έννοια της περιοδικότητας είναι οι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών γεγονότων να είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι.

Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου συγγράμματος θα γίνει μια επισκόπηση των βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων που αφορούν τις ανανεωτικές διαδικασίες και τις Μαρκοβιανές αλυσίδες και θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στη μελέτη τους, όταν εφοδιαστούν με κάποιες δομές κόστους. Πέρα από την παρουσίαση της αναγκαίας θεωρίας, θα αναπτυχθεί μια σειρά από εφαρμογές σε συγκεκριμένα προβλήματα Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας, που σχετίζονται με τη βέλτιστη πολιτική συντήρησης - αντικατάστασης μηχανήματος, τη βέλτιστη πολιτική εκκαθάρισης μιας αποθήκης κλπ.

Δυναμικός προγραμματισμός

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μια μεθοδολογία βελτιστοποίησης στο πλαίσιο ακολουθιακής λήψης αποφάσεων για συστήματα που εξελίσσονται στον χρόνο. Στη βασική εκδοχή του, ένα τέτοιο σύστημα μοντελοποιείται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, που όμως μπορεί να επηρεαστεί από αποφάσεις που λαμβάνονται, αφού παρατηρείται σε κάθε στάδιο - χρονική στιγμή η κατάστασή της.

Στα περιορισμένα πλαίσια αυτής της εισαγωγής θα περιοριστούμε αρχικά σε προβλήματα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, όταν δηλαδή χρειάζεται να πάρουμε ακολουθιακά έναν συγκεκριμένο αριθμό αποφάσεων, παρατηρώντας την εξέλιξη του συστήματος για $t < \infty$ στάδια. Η βασική ιδέα του δυναμικού προγραμματισμού είναι να λύσουμε το πρόβλημα αναδρομικά, δηλαδή να βρούμε τις βέλτιστες αποφάσεις όταν απομένει 1 στάδιο, 2 στάδια κ.ο.κ. Η ιδέα αυτή βασίζεται στην αρχή βελτιστότητας του Bellman, του θεμελιωτή του δυναμικού προγραμματισμού. Σύμφωνα με αυτήν την αρχή, αν έχουμε μια βέλτιστη «τροχιά» καταστάσεων K_n και αποφάσεων $A_n, n = t, t-1, t-2, \ldots, 1, 0$ (το n αναφέρεται στο πόσα στάδια απομένουν για να τελειώσει ο χρονικός ορίζοντας), έστω την

$$K_t \to A_t \to K_{t-1} \to A_{t-1} \to \cdots \to K_1 \to A_1 \to K_0,$$

τότε, από κάθε (ενδιάμεσο) σημείο και μετά, η υπολειπόμενη τροχιά είναι επίσης βέλτιστη για το πρόβλημα αποφάσεων που απομένει. Με άλλα λόγια, αν φθάσουμε στην κατάσταση K_1 πριν την τελευταία απόφασή μας ($n = 1$), η βέλτιστη απόφαση είναι η A_1, ό,τι κι αν έγινε στα προηγούμενα βήματα. Επομένως, έχοντας βρει τη βέλτιστη απόφαση για κάθε κατάσταση K_1 που μπορεί να έχει προκύψει πριν την τελευταία απόφασή μας, μπορούμε μετά να προχωρήσουμε στην εύρεση της βέλτιστης απόφασης A_2 για κάθε κατάσταση K_2 που μπορεί να έχει προκύψει πριν την προτελευταία απόφασή μας ($n = 2$) κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα επιλογής βέλτιστων αποφάσεων, βρίσκοντας τη βέλτιστη τελευταία απόφασή μας για κάθε δυνατή κατάσταση και πηγαίνοντας προς τα πίσω στον χρόνο.

Στο πλαίσιο του συγγράμματος αυτού θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες του δυναμικού προγραμματισμού σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και θα αιτιολογήσουμε την αναδρομική λύση των προβλημάτων με βάση την αρχή του Bellman. Κατόπιν θα παρουσιαστεί μια σειρά από εφαρμογές που σχετίζονται με ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας. Τα προβλήματα αυτά αφορούν την επιλογή βέλτιστης πολιτικής κατανάλωσης-επένδυσης, βέλτιστης στοιχηματικής πολιτικής και βέλτιστων πολιτικών σε προβλήματα παραγωγής. Επιπλέον, γίνεται μια εισαγωγή στις Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων με άπειρο ορίζοντα, αρχίζοντας με το κριτήριο ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου συνολικού αποπληθωρισμένου κόστους.

Ουρές αναμονής

Οι ουρές αναμονής είναι μαθηματικά μοντέλα εισόδου - εξόδου με διακριτές οντότητες (πελάτες) στα οποία υπεισέρχεται τυχαιότητα και αναπαριστούν συστήματα εξυπηρέτησης. Η θεωρία τους βρίσκεται στην καρδιά της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας και άρχισε να αναπτύσσεται στις αρχές του 20ού αιώνα με τις πρωτοποριακές εργασίες του Erlang που ασχολήθηκε με τη μαθηματική μοντελοποίηση του συνωστισμού σε τηλεφωνικά δίκτυα. Έκτοτε, ο όγκος των δημοσιευμένων εργασιών βαίνει συνεχώς αυξανόμενος και οι εφαρμογές των ουρών εκτείνονται σε όλους τους τομείς της παραγωγής και των υπηρεσιών όπου υπεισέρχονται ο συνωστισμός και η τυχαιότητα.

Μια ουρά χαρακτηρίζεται από τη διαδικασία των αφίξεων των πελατών, τον μηχανισμό της εξυπηρέτησης (αριθμό υπηρετών, δυναμικότητα υπηρετών, χρόνους εξυπηρέτησης), τη δομή και τη χωρητικότητα του χώρου αναμονής και από τη λεγόμενη πειθαρχία ουράς που αναφέρεται στη σειρά με την οποία θα εξυπηρετηθούν οι αναμένοντες πελάτες.

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στο πλαίσιο της Θεωρίας Ουρών μπορεί να είναι προβλήματα αποτίμησης απόδοσης, σύγκρισης συστημάτων, βέλτιστου σχεδιασμού, βέλτιστου δυναμικού ελέγχου και παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης. Τα προβλήματα αποτίμησης απόδοσης αφορούν τον υπολογισμό μέτρων απόδοσης του συστήματος (π.χ., του μέσου αριθμού πελατών σε ένα σύστημα ή του μέσου χρόνου παραμονής ενός πελάτη), όταν οι παράμετροι του συστήματος είναι γνωστές και όλες οι εμπλεκόμενες οντότητες (διαχειριστής - πελάτες - υπηρέτες) θεωρούνται παθητικές, υπό την έννοια ότι δεν λαμβάνουν αποφάσεις που επηρεάζουν το σύστημα. Στα προβλήματα σύγκρισης συστημάτων ο σκοπός είναι να αιτιολογηθεί γιατί ένας σχεδιασμός ενός συστήματος είναι καλύτερος από έναν άλλο, χωρίς να υπολογιστούν κατ' ανάγκη τα μέτρα απόδοσης των συγκρινόμενων συστημάτων. Π.χ., όταν έχουμε ένα σύστημα με 2 όμοιους υπηρέτες, είναι καλύτερο να υπάρχει μια κοινή ουρά (χώρος αναμονής) ή ο καθένας να έχει τη δικιά του; Στα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού, ο κατασκευαστής του συστήματος καλείται να πάρει κάποια απόφαση για παραμέτρους του συστήματος που δεν μπορεί να αλλάξει αργότερα, όταν το σύστημα τεθεί σε λειτουργία. Π.χ., πόσες θέσεις παράλληλων υπηρετών πρέπει να έχει ένα σύστημα δεδομένης της διαδικασίας αφίξεων των πελατών ώστε να παρέχει ένα επίπεδο εξυπηρέτησης με το ελάχιστο δυνατό κόστος; Στα προβλήματα δυναμικού ελέγχου, ο διαχειριστής του συστήματος καλείται να παίρνει διαρκώς αποφάσεις για τη λειτουργία του συστήματος, παρατηρώντας την εξέλιξη της κατάστασής του. Π.χ., βλέποντας τον αριθμό των πελατών σε αναμονή, ο διαχειριστής μπορεί να έχει τη δυνατότητα να προσαρμόσει τον ρυθμό εξυπηρέτησης ή τον αριθμό των υπηρετών που παρέχουν εξυπηρέτηση. Τέλος, στα προβλήματα παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης, περισσότερες από μία οντότητες (π.χ., οι πελάτες και ο διαχειριστής) θεωρούνται ενεργές οντότητες που αποφασίζουν και αντιδρούν στις αποφάσεις των άλλων. Στην περίπτωση αυτή, τα προβλήματα αφορούν την εύρεση στρατηγικών καταστάσεων ισορροπίας για τις ενεργές οντότητες, δηλαδή συνόλων στρατηγικών, τέτοιων ώστε κανένας να μην έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς στρατηγική. Υπό μία έννοια, το πρόβλημα είναι να προβλέψουμε ποιες συμπεριφορές θα υιοθετηθούν από τις ενεργές οντότητες, όταν η καθεμία προσπαθεί να βελτιστοποιήσει το δικό της όφελος, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλες κάνουν το ίδιο.

Στο πλαίσιο του συγγράμματος αυτού θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής, με αναφορά σε όλους τους τύπους αυτών των προβλημάτων, με το κύριο βάρος, όμως, να δίνεται στη μοντελοποίηση και στην αποτίμηση της απόδοσής τους.

Έλεγχος αποθεμάτων

Η Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων ασχολείται με μαθηματικά μοντέλα που αναπαριστούν συστήματα παραγωγής ή αποθηκών. Αρκετά μοντέλα που εμπίπτουν σε αυτήν την περιοχή είναι προσδιοριστικά, θεωρώντας ότι η ζήτηση των προϊόντων είναι εκ των προτέρων γνωστή, όπως και οι χρόνοι παράδοσης των παραγγελιών. Εμείς, όμως, θα επικεντρωθούμε σε στοχαστικά μοντέλα, μια και στις περισσότερες εφαρμογές είναι σημαντικό να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα στη ζήτηση των προϊόντων.

Τα κύρια ερωτήματα στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων είναι πότε και πόσο να παραγγείλουμε. Η αποθήκευση μεγάλου αριθμού προϊόντων έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα η ζήτηση, αλλά από την άλλη πλευρά συνδέεται με υψηλά κόστη αποθήκευσης. Επομένως, είναι σημαντικό να υπάρχει στην αποθήκη ένας αριθμός προϊόντων που να είναι ισορροπημένος ως προς αυτούς τους δυο παράγοντες. Πρέπει, επίσης, να ληφθούν υπόψη παράγοντες που αφορούν τη φύση των προϊόντων, όπως η εποχικότητα ή η μικρή διάρκεια ζωής τους. Τέλος, πρέπει να ληφθούν υπόψη παράγοντες που συνδέονται με τη διαδικασία παραγγελίας και παραλαβής των προϊόντων (πάγια κόστη ανά παραγγελία, μεταφορικά κόστη, εκπτώσεις για μεγάλες ποσότητες παραγγελίας, χρόνος παράδοσης κλπ.).

Στο πλαίσιο αυτού του συγγράμματος θα δούμε μερικά μοντέλα ελέγχου αποθεμάτων που αξιοποιούν τα εργαλεία και τις μεθόδους που αναπτύσσονται στα άλλα κεφάλαια. Με τον τρόπο αυτό, αυτή η σύντομη εισαγωγή μας στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα θα ολοκληρωθεί δείχνοντας την αλληλεξάρτηση και την ενότητα των διαφόρων περιοχών εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ευχαριστίες

Κλείνοντας αυτήν τη σύντομη εισαγωγή, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τους επιβλέποντες των διδακτορικών μας διατριβών κ.κ. Μιχάλη Κατεχάκη και Δημήτρη Φακίνο, που μας εισήγαγαν στην έρευνα στην περιοχή των Στοχαστικών Μοντέλων στην Επιχειρησιακή Έρευνα, τους διδακτορικούς φοιτητές μας Γιάννη Δημητρακόπουλο, Σπύρο Δήμου, Δημήτρη Ζήση, Οδυσσέα Καναβέτα, Σπυριδούλα Κάντα, Στέλλα Καποδίστρια, Δημήτρη Λογοθέτη, Αθανασία Μάνου, Μύρωνα Μπενιουδάκη, Όλγα Μπούνταλη και Αλέξανδρο Πασιούρα, και τους μεταπτυχιακούς και προπτυχιακούς φοιτητές μας που όλα αυτά τα χρόνια παρακολούθησαν μαθήματα Στοχαστικών Μοντέλων στην Επιχειρησιακή Έρευνα στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Επίσης, ευχαριστούμε θερμά του συν-συγγραφείς μας και όλους αυτούς που διάβασαν παλαιότερες εκδόσεις του παρόντος βιβλίου και/ή το χρησιμοποίησαν σε μαθήματα που δίδαξαν και μας υπέδειξαν λάθη και παραλείψεις. Όλοι αυτοί συνέβαλαν και συμβάλλουν ώστε να διατηρούμε τον ενθουσιασμό μας για το αντικείμενο. Ευχαριστούμε πολύ το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών που προσφέρει ένα δημιουργικό και γεμάτο ερεθίσματα περιβάλλον που προάγει την επιστημονική μας δραστηριότητα. Θερμές ευχαριστίες, επίσης, στην κα. Αντωνία Κόρακα που επιμελήθηκε το εξώφυλλο, καθώς και στις Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις Κάλλιπος και σε όλους τους συντελεστές τους, ιδιαίτερα στον κ. Ιωάννη Παπαδόγγονα για την τεχνική βοήθεια με το LaTex και τον κ. Δημήτρη Καλλιάρα για τη γλωσσική επιμέλεια.

Καλή Ανάγνωση!

Απόστολος Ν. Μπουρνέτας και Αντώνιος Θ. Οικονόμου Αθήνα, 28 Αυγούστου 2023.

Μέρος I

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ: ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται μια ευρεία παρουσίαση των ανανεωτικών διαδικασιών ως μοντέλων για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο με τυχαίο τρόπο. Καταρχάς, παρουσιάζονται οι ορισμοί και κάποια βασικά αποτελέσματα για υπολογισμούς σε πεπερασμένες χρονικές στιγμές. Κατόπιν, αναπτύσσεται η τεχνική του ανανεωτικού συλλογισμού που οδηγεί στη διατύπωση ανανεωτικών εξισώσεων και καταδεικνύεται ο τρόπος επίλυσης αυτών των εξισώσεων. Τέλος, εστιάζουμε στην οριακή θεωρία των ανανεωτικών διαδικασιών και παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα. Η ειδική περίπτωση της ανανεωτικής διαδικασίας Poisson παρουσιάζεται σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

Στη συνέχεια, εισάγεται η έννοια των ανανεωτικών διαδικασιών κόστους. Παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα και διατυπώνεται το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη που αποτελεί το βασικό εργαλείο για τον προσδιορισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους σε συστήματα που μοντελοποιούνται με ανανεωτικές διαδικασίες κόστους. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια σύντομη εισαγωγή και παρουσίαση των αναγεννητικών διαδικασιών ως μοντέλων για τη μελέτη διαδικασιών που εμφανίζουν στοχαστική περιοδικότητα στον χρόνο. Εστιάζουμε, κυρίως, στο εργοδικό θεώρημα των αναγεννητικών διαδικασιών που χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό ρυθμών κόστους.

Προαπαιτούμενη γνώση

Η μόνη προαπαιτούμενη γνώση για το κεφάλαιο αυτό είναι ένα εισαγωγικό μάθημα Θεωρίας Πιθανοτήτων, όπως αυτά που περιλαμβάνονται στα προγράμματα σπουδών Τμημάτων Θετικών Επιστημών, Πολυτεχνικών Σχολών, καθώς και Σχολών Οικονομικών και Διοίκησης Επιχειρήσεων.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

1.1 Επισκόπηση των ανανεωτικών διαδικασιών

Ένα γενικό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο με τυχαίο τρόπο δίνουν οι λεγόμενες σημειακές διαδικασίες και οι αντίστοιχες απαριθμήτριές τους. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε μια ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ μπορούμε να ορίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $S_0 = 0$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} S_n$, $n \geq 1$, για τις οποίες ισχύει $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots$. Η στοχαστική διαδικασία $\{S_n : n \geq 0\}$ αναφέρεται ως σημειακή διαδικασία με χρόνους γεγονότων S_n, $n \geq 0$, και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων X_n, $n \geq 1$. Η απαριθμήτρια (σημειακή) διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ της $\{S_n : n \geq 0\}$ ορίζεται από τη σχέση

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \ t \geq 0,$$

δηλαδή, η $N(t)$ μετράει το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$.

Το πιο απλό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο, με τυχαίο τρόπο, με κάποια μορφή πιθανοθεωρητικής περιοδικότητας, είναι μια ανανεωτική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1 (Ανανεωτική διαδικασία) *Έστω $\{S_n : n \geq 0\}$ σημειακή διαδικασία με $S_0 = 0$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, όπου $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $F_X(t) = \Pr[X_i \leq t]$, που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων. Έστω, επίσης, $\{N(t)\}$ η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία με*

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \ t \geq 0,$$

να είναι το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$. Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ αναφέρεται ως (απαριθμήτρια) ανανεωτική διαδικασία που γεννάται από την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 1\}$. Η συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$ που δίνει τον μέσο αριθμό γεγονότων στο $(0, t]$, για κάθε χρονική στιγμή t, αναφέρεται ως ανανεωτική συνάρτηση.

Σε πρώτο επίπεδο, οι βασικοί υπολογισμοί που μας ενδιαφέρουν αφορούν τις κατανομές του χρόνου του n-οστού γεγονότος, S_n, και του αριθμού των γεγονότων μέχρι τη χρονική στιγμή t, $N(t)$, καθώς και την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ για σταθερά n και t. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1 (Βασικοί ανανεωτικοί υπολογισμοί σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$ και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$, με κατανομή $F_X(t) = \Pr[X_i \leq t]$. Τότε έχουμε:*

(i) *Η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος είναι*

$$F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] = F_X^{*k}(t), \quad k \geq 1, \quad t \geq 0,$$

όπου $F_X^{*k}(t) = (F_X * F_X * \cdots * F_X)(t)$ είναι η k-οστή συνέλιξη της $F_X(t)$, με $(G * F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x)$.

(ii) *Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t είναι*

$$p_k(t) = \Pr[N(t) = k] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*k+1}(t), \quad k \geq 1, \quad t \geq 0,$$

με τη σύμβαση $F_X^{*0}(t) = 1$, $t \geq 0$.

(iii) *Η ανανεωτική συνάρτηση είναι*

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t), \quad t \geq 0.$$

Το (i) είναι προφανές αφού η τυχαία μεταβλητή S_k είναι το άθροισμα k ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $F_X(t)$, και η συνέλιξη $(G * F)(t)$ δύο κατανομών $G(t)$ και $F(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τις κατανομές αυτές.

Για το (ii), αρκεί να παρατηρήσουμε την ισότητα ενδεχομένων $\{N(t) = k\} = \{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \{S_k \leq t\} \setminus \{S_{k+1} \leq t\}$, να πάρουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες και να χρησιμοποιήσουμε το (i). Πράγματι, το ενδεχόμενο να έχουν συμβεί k γεγονότα ως τη στιγμή t ισοδυναμεί με το ότι το k-οστό γεγονός συνέβη το πολύ ως και τη στιγμή t, ενώ το $(k+1)$-οστό γεγονός θα συμβεί μετά από αυτή. Οπότε,

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \Pr[N(t) = k] = \Pr[S_k \leq t < S_{k+1}] \\ &= \Pr[S_k \leq t] - \Pr[S_{k+1} \leq t] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*k+1}(t). \end{aligned}$$

Τέλος, το (iii) προκύπτει παρατηρώντας ότι $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}$ και χρησιμοποιώντας το (i):

$$m(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \leq t] = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$

Επειδή η συνέλιξη κατανομών είναι ασύμφορη από υπολογιστική σκοπιά, συχνά στις εφαρμογές χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes των αντίστοιχων ποσοτήτων. Μετασχηματίζοντας τους τύπους του Θεωρήματος 1.1, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.2 (Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes βασικών ανανεωτικών ποσοτήτων) *Οι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes των $F_{S_k}(t)$, $p_k(t)$ και $m(t)$ δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους*

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{S_k}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{S_k}(t) = (\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 1, \\ \tilde{p}_k(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dp_k(t) = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \quad k \geq 0, \\ \tilde{m}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}. \end{aligned}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{S_k}(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k, \\ \tilde{p}_k(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) - \widetilde{F_X^{*k+1}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1} = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \\ \tilde{m}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{F_X^{*k}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}. \end{aligned}$$

Όσον αφορά την οριακή συμπεριφορά της $\{N(t)\}$, έχουμε τα αποτελέσματα που περιγράφονται παρακάτω, στα θεωρήματα 1.3 και 1.4. Το θεώρημα 1.3 αναφέρεται στην κατανομή του συνολικού πλήθους των ανανεώσεων μιας ανανεωτικής διαδικασίας στο διάστημα $(0, \infty)$. Το θεώρημα 1.4 δίνει κάποια αντίστοιχα των κλασικών αποτελεσμάτων της Θεωρίας Πιθανοτήτων, του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, στο πλαίσιο της θεωρίας των ανανεωτικών διαδικασιών.

Θεώρημα 1.3 (Κατανομή συνολικού πλήθους ανανεώσεων) *Έστω $N(\infty)$ το πλήθος των ανανεώσεων της $\{N(t)\}$ στο $(0, \infty)$ και $F_X(\infty) = \lim_{t \to \infty} F_X(t) = \Pr[X_n < \infty]$.*

(i) *Αν $F_X(\infty) = 1$, τότε $\Pr[N(\infty) = \infty] = 1$.*

(ii) *Αν $F_X(\infty) < 1$, τότε $\Pr[N(\infty) = \infty] = 0$ και $\Pr[N(\infty) = k] = (1 - F_X(\infty))F_X(\infty)^k$, $k \geq 0$.*

Πράγματι, αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι πεπερασμένοι με πιθανότητα 1, τότε είναι βέβαιο ότι μετά από κάθε ανανέωση ακολουθεί και άλλη σε πεπερασμένο χρόνο. Επομένως, το συνολικό πλήθος των ανανεώσεων σε άπειρο χρονικό ορίζοντα είναι άπειρο με πιθανότητα 1. Αν, όμως, υπάρχει θετική πιθανότητα $1-F_X(\infty)$ ένας ενδιάμεσος χρόνος να είναι άπειρος, τότε, μετά από κάθε ανανέωση, ακολουθεί και άλλη μόνο με πιθανότητα $F_X(\infty)$. Στην περίπτωση αυτή, το συνολικό πλήθος των ανανεώσεων είναι γεωμετρικά κατανεμημένο με τη συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται στο (ii).

Θεώρημα 1.4 (Οριακά θεωρήματα στην ανανεωτική θεωρία) *Έστω ανανεωτική διαδικασία, $\{N(t) : t \geq 0\}$, με ενδιάμεσους χρόνους X_k, $k \geq 1$, με $E[X_k] = \mu$, $Var[X_k] = \sigma^2$, $k \geq 1$, και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Τότε:*

(i) *Νόμος μεγάλων αριθμών: Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό (μακροπρόθεσμη συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα: Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό (μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

(iii) *Κεντρικό οριακό θεώρημα: Αν $\mu < \infty$ και $\sigma^2 \in (0, \infty)$, έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x\right) = \Phi(x), \ x \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

Μια θεμελιώδης τεχνική για τη μελέτη των ανανεωτικών διαδικασιών και των εφαρμογών τους είναι ο ανανεωτικός συλλογισμός. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $h(t)$ που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0, t]$ (π.χ., η $h(t)$ μπορεί να είναι κάποια πιθανότητα ή μέση τιμή που εξαρτάται από το t, όπως η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ή ο μέσος χρόνος $E[S_{N(t)+1} - t]$ που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός τη στιγμή t). Ο ανανεωτικός συλλογισμός συνίσταται στη δέσμευση στον χρόνο $S_1 = u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας. Αυτή η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου για την $h(t)$, που αναφέρονται ως ανανεωτικές εξισώσεις. Για να γίνει κατανοητή η τεχνική δίνουμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1 (Η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση) *Έστω $h(t) = m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$ και $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$. Δεσμεύοντας στον S_1, έχουμε*

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u]dF_X(u). \tag{1.1}$$

Όμως, όταν $u \leq t$, η δεσμευμένη κατανομή της $N(t)$, δεδομένου του ενδεχομένου $\{S_1 = u\}$ είναι η ίδια με την κατανομή της $1 + N(t-u)$. Συμβολικά γράφουμε $(N(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} 1 + N(t-u)$, για $u \leq t$, ώστε να δηλώσουμε την ισότητα κατά κατανομή (το d πάνω από την ισότητα παραπέμπει στη λέξη distribution). Επομένως, έχουμε

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στη (1.1), παίρνουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) \\ &= F_X(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u). \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου η $h(t)$ είναι η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα, ενώ η $d(t)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση και η $F_X(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας. Τέτοιες (ολοκληρωτικές) εξισώσεις αναφέρονται ως ανανεωτικές εξισώσεις.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $d(t) = F_X(t)$, αλλά στη γενική περίπτωση μιας ανανεωτικής εξίσωσης η $d(t)$ δεν είναι κατ' ανάγκη κάποια συνάρτηση κατανομής, αλλά μια γνωστή συνάρτηση που έχει υπολογιστεί.

Παράδειγμα 1.2 (Η ανανεωτική εξίσωση για τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης) *Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία και $h(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός από τη στιγμή t. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$ και $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$. Δεσμεύοντας στον S_1, έχουμε*

$$h(t) = E[S_{N(t)+1} - t] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} - t | S_1 = u]dF_X(u). \tag{1.2}$$

Όμως, όταν $u \leq t$, η δεσμευμένη κατανομή του $S_{N(t)+1} - t$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{S_1 = u\}$ είναι η ίδια με την κατανομή του $S_{N(t-u)+1} - (t-u)$. Δηλαδή, έχουμε $(S_{N(t)+1} - t | S_1 = u) \stackrel{d}{=} S_{N(t-u)+1} - (t-u)$, για $u \leq t$. Αυτό συμβαίνει, διότι κάθε φορά που συμβαίνει ένα ανανεωτικό γεγονός, ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης επανεκκινεί. Με άλλα λόγια, μετά από ένα ανανεωτικό γεγονός, ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης έχει την ίδια συμπεριφορά, σαν όλα να ξεκινούν από την αρχή. Επομένως, έχουμε

$$E[S_{N(t)+1} - t | S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[S_{N(t-u)+1} - (t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.2), παίρνουμε

$$h(t) = \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u).$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

είναι, δηλαδή, μια ανανεωτική εξίσωση (με την έννοια που είπαμε στο προηγούμενο παράδειγμα). Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u)dy = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy. \end{aligned}$$

Τα δύο αυτά παραδείγματα δείχνουν πώς η τεχνική του ανανεωτικού συλλογισμού οδηγεί σε ανανεωτικές εξισώσεις. Υπάρχουν βέβαια ανανεωτικές εξισώσεις για πολλές συναρτήσεις $h(t)$ που συνδέονται με την εξέλιξη μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Έχοντας τώρα μια εξίσωση για μια τέτοια συνάρτηση, μας ενδιαφέρει η λύση της, δηλαδή η εύρεση κάποιου τύπου για την $h(t)$, καθώς και η οριακή συμπεριφορά της λύσης για $t \to \infty$.

Όσον αφορά τη λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.5 (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης) *Έστω η ανανεωτική εξίσωση*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0.$$

Η ανανεωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση, που δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t),$$

όπου $m_X(t)$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος στη γενική περίπτωση έχει κάποια τεχνικά σημεία, αλλά σε τυπικό επίπεδο μπορεί να γίνει πολύ εύκολα μετασχηματίζοντας την ανανεωτική εξίσωση, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\tilde{h}(s)$, $\tilde{d}(s)$ και $\tilde{F}_X(s)$ τους μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes των $h(t)$, $d(t)$ και $F_X(t)$, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned}
& h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{F}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.
\end{aligned}$$

Όμως, από το θεώρημα 1.2, ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της ανανεωτικής συνάρτησης είναι $\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & h(t) = d(t) + (d * m_X)(t).
\end{aligned}$$

Η ανανεωτική εξίσωση και η λύση της έχουν, επίσης, την εξής «φυσική» ερμηνεία: Έστω ότι κάθε γεγονός επάγει μια επίδραση, της οποίας η ένταση είναι $d(t)$, t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωσή του και έστω $h(t)$ η ένταση της συνολικής επίδρασης από όλα τα γεγονότα μέχρι τη χρονική στιγμή t. Θεωρούμε, επίσης, ότι τη χρονική στιγμή 0 έχει συμβεί γεγονός (το γεγονός-0), του οποίου η επίδραση λαμβάνεται υπόψη στην $h(t)$. Τότε, ο ανανεωτικός συλλογισμός δίνει για την $h(t)$ την ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u),$$

η οποία εκφράζει ότι η ένταση της συνολικής επίδρασης τη στιγμή t ισούται με την ένταση της επίδρασης του αρχικού γεγονότος της στιγμής 0 συν την ένταση της συνολικής επίδρασης των υπόλοιπων γεγονότων (από το γεγονός-1 και μετά, που συνέβη κάποια στιγμή στο $(0, t]$). Όμως, η $h(t)$ μπορεί να μετρηθεί εναλλακτικά, προσθέτοντας τις εντάσεις των γεγονότων, δεσμεύοντας στις στιγμές που συνέβησαν. Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned}
h(t) &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)dF_{S_k}(u) = d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)dF_X^{*k}(u) \\
&= d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u).
\end{aligned}$$

Όπως έχει προαναφερθεί, συχνά μας ενδιαφέρει το $\lim_{t\to\infty} h(t)$, όπου $h(t)$ είναι η λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης. Το όριο αυτό υπάρχει κάτω από κάποιες συνθήκες κανονικότητας και υπολογίζεται με έναν σχετικά εύκολο τρόπο. Το σχετικό θεώρημα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως βασικό ανανεωτικό θεώρημα (key renewal theorem). Η διατύπωσή του εξαρτάται από μια ιδιότητα της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων (περιοδικότητα - απεριοδικότητα). Συγκεκριμένα, δίνουμε για την ιδιότητα αυτή τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.2 (Περιοδική μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή) *Μια μη-αρνητική, γνήσια τυχαία μεταβλητή X (δηλαδή $\Pr[0 \le X < \infty] = 1$) λέγεται περιοδική, αν υπάρχει $p > 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$. Ο μεγαλύτερος αριθμός p με αυτήν την ιδιότητα αναφέρεται ως περίοδος της X. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός p, η X λέγεται απεριοδική. Για την αντίστοιχη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούμε τους ίδιους όρους (περιοδική - απεριοδική).*

Οι συνεχείς και οι μεικτές κατανομές (αυτές, δηλαδή, που έχουν κάποιο συνεχές και κάποιο διακριτό μέρος) είναι απεριοδικές. Από τις διακριτές κατανομές, κάποιες είναι περιοδικές και κάποιες όχι. Π.χ., οι κλασικές διακριτές κατανομές, όπως η διωνυμική, η γεωμετρική, η Poisson κλπ. είναι περιοδικές και μάλιστα με περίοδο 1. Από την άλλη μεριά, μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα μόνο τις τιμές 1 και $\sqrt{2}$ είναι απεριοδική. Μια διακριτή που παίρνει με θετική πιθανότητα όλες τις τιμές $\frac{1}{n}$, $n \ge 1$, είναι επίσης απεριοδική.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα:

Θεώρημα 1.6 (Βασικό ανανεωτικό θεώρημα) *Έστω $h(t)$ η μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \ge 0.$$

Έστω, επίσης, ότι η $d(t)$ γράφεται ως διαφορά δυο μη-αρνητικών, φραγμένων, φθινουσών συναρτήσεων και

$$\int_0^\infty |d(u)|du < \infty.$$

(i) *Αν η $F_X(t)$ είναι απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0$, τότε*

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

(ii) *Αν η $F_X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0$, τότε*

$$\lim_{t\to\infty} h(tp + x) = \frac{p\sum_{t=0}^{\infty} d(tp+x)}{\mu}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Σε πολλές εφαρμογές του θεωρήματος ελέγχεται ότι η $d(t)$ είναι μη-αρνητική, φραγμένη και φθίνουσα με την απόλυτη τιμή της να έχει πεπερασμένο ολόκληρωμα στο $(0, \infty)$. Τότε γράφεται τετριμμένα ως διαφορά της ιδίας και της μηδενικής συνάρτησης (που πληροί επίσης τις ίδιες συνθήκες) και το βασικό ανανεωτικό θεώρημα είναι άμεσα εφαρμόσιμο.

Η απόδειξη του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος είναι ιδιαίτερα τεχνική. Όμως, είναι σχετικά εύκολο να δούμε γιατί ένα τέτοιο αποτέλεσμα είναι εύλογο να ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι η $F_X(t)$ είναι απεριοδική. Η $h(t)$, ως λύση της ανανεωτικής εξίσωσης, δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

Έχουμε άμεσα ότι $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$, αφού $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$, και επομένως

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

Επιλέγοντας ένα $\epsilon \in (0,t)$, το παραπάνω ολοκλήρωμα σπάει σε δυο όρους $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ και $\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u)$. Η τεχνική απόδειξη επιλέγει το ϵ κατάλληλα ώστε το $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ να τείνει στο 0, καθώς $t \to \infty$. Πράγματι, αυτό είναι εύλογο, αφού για μικρά u (στο $[0,\epsilon]$) το $d(t-u)$ θα είναι κοντά στο 0, αφού $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$. Επίσης, για μεγάλα u (στο (ϵ, t)), έχουμε $m_X(u) \simeq \frac{u}{\mu}$, από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (θεώρημα 1.4(ii)), οπότε

$$\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u) \simeq \frac{1}{\mu}\int_\epsilon^t d(t-u)du = \frac{1}{\mu}\int_0^{t-\epsilon} d(y)dy \to \frac{\int_0^\infty d(y)dy}{\mu},$$

καθώς $t \to \infty$.

Ως παράδειγμα εφαρμογής του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος, συνεχίζουμε το παράδειγμα 1.2.

Παράδειγμα 1.3 (Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης) *Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με απεριοδικούς ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων. Ένας ενδιάμεσος χρόνος γεγονότων X έχει κατανομή $F_X(t)$, με μέση τιμή $\mu \in (0,\infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 1.2, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, $h(t)$, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$

με

$$d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy, \quad t \geq 0.$$

Η $d(t)$ είναι μη-αρνητική και φθίνουσα, αφού $1 - F_X(y) \geq 0$, για $y \geq 0$. Επίσης, είναι φραγμένη, αφού $d(t) \leq \int_0^\infty (1-F_X(y))dy = \mu < \infty$, $t \geq 0$. Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |d(u)|du &= \int_0^\infty d(u)du \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty (1 - F_X(y))dydu \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty \int_y^\infty dF_X(x)dydu \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \int_0^y dudydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x ydydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2}{2}dF_X(x) \\
&= \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Επομένως, το βασικό ανανεωτικό θεώρημα είναι εφαρμόσιμο και έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} h(t) &= \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu} \\
&= \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Το αποτέλεσμα αυτό λέει ότι, αν αφήσουμε να περάσει αρκετός χρόνος ώστε το σύστημα να βρεθεί σε κάποια κατάσταση «ισορροπίας», οπότε έχει χαθεί η αρχική επίδραση της ύπαρξης γεγονότος τη στιγμή 0, ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος για το επόμενο γεγονός είναι $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$, δηλαδή μεγαλύτερος από μισό αναμενόμενο ενδιάμεσο χρόνο. Αυτό μοιάζει παράδοξο και, μάλιστα, αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ανανεωτικό παράδοξο. Την κατάσταση αυτή θα τη συζητήσουμε εκτενώς στην ενότητα 2.5.

1.2 Επισκόπηση της διαδικασίας Poisson

Η στοχαστική διαδικασία Poisson είναι η ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων έχουν την εκθετική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.3 (Ανανεωτικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με την $Exp(\lambda)$ κατανομή, με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ γεγονότων, και $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ο χρόνος του n-οστού γεγονότος για $n \geq 1$ και $S_0 = 0$. Η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με*

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0,$$

που καταγράφει το πλήθος των γεγονότων στο $(0, t]$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

Οι εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι της στοχαστικής διαδικασίας Poisson επιτρέπουν κλειστές μορφές για τις βασικές ποσότητες σε πεπερασμένη χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας το θεώρημα 1.1, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.7 (Βασικοί υπολογισμοί στοχαστικής διαδικασίας Poisson σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω διαδικασία Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$, με χρόνους $S_1, S_2, \ldots$ και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $Exp(\lambda)$. Τότε έχουμε:*

(i) *Η κατανομή του S_k είναι $Erlang(k, \lambda)$, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής είναι*

$$F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!},\ t \geq 0,\ k \geq 1,$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_{S_k}(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ k \geq 1.$$

(ii) *Η κατανομή της $N(t)$ είναι Poisson με παράμετρο λt, οπότε*

$$p_k(t) = \Pr[N(t) = k] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ t \geq 0,\ k \geq 0.$$

(iii) *Η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται ως*

$$m(t) = E[N(t)] = \lambda t.$$

Η στοχαστική διαδικασία Poisson μπορεί να οριστεί εναλλακτικά με δύο ακόμη τρόπους:

Ορισμός 1.4 (Ολικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, αν*

(i) *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,*

(ii) *έχει ομοιογενείς προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t + s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,*

(iii) *η κατανομή της $N(t)$ είναι Poisson(λt), δηλαδή*

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n \geq 0.$$

Ορισμός 1.5 (Τοπικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson) *Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, αν*

(i) *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,*

(ii) *έχει ομοιογενείς προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,*

(iii) *Ισχύει*

$$\Pr[N(h) = n] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & \text{αν } n = 0, \\ \lambda h + o(h) & \text{αν } n = 1, \\ o(h) & \text{αν } n \geq 2, \end{cases}$$

για $h \to 0^+$ (όπου $o(h)$ είναι μια συνάρτηση του h με $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$).

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των τριών ορισμών είναι κάπως μακροσκελής, οπότε περιοριζόμαστε στην παρουσίασή της σε αδρές γραμμές.

Από τον ανανεωτικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε χρονική στιγμή s, η $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$ και η $\{N_s(u) = N(s+u) - N(s) : u \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες και επιπλέον η διαδικασία $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, όμοια με την αρχική. Δηλαδή, δοθείσης μιας χρονικής στιγμής, το μέλλον της διαδικασίας (που αντιστοιχεί στην $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν της (που αντιστοιχεί στην $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$) και επιπλέον οποιαδήποτε χρονική στιγμή η διαδικασία είναι σαν να ξεκινάει από την αρχή. Πραγματικά, η $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$ καθορίζεται πλήρως από τους ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots, X_k$ της αρχικής διαδικασίας και το ενδεχόμενο $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$, για κάποιο k (οπότε ισχύει $N(s) = k$). Η $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ καθορίζεται από τον υπολειπόμενο χρόνο για το πρώτο γεγονός που είναι ο $X_{k+1} - (s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k)$ και τους ενδιάμεσους χρόνους $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$ της αρχικής διαδικασίας. Λόγω της ανεξαρτησίας των ενδιάμεσων χρόνων της αρχικής διαδικασίας και της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής που εξασφαλίζει ότι η κατανομή του $X_{k+1} - (s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k)$, δεδομένου ότι $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$, είναι $\mathrm{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots, X_k$ και του ενδεχομένου $\{X_{k+1} > s - X_1 - X_2 - \cdots - X_k\}$ έχουμε τη ζητούμενη ανεξαρτησία. Επιπλέον, έχουμε ότι η $\{N_s(u) : u \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους με την $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομή. Επομένως, έχουμε και ότι ισχύουν οι ιδιότητες (i) και (ii) του ολικού ορισμού της διαδικασίας Poisson, ενώ η ιδιότητα (iii) ισχύει από το θεώρημα 1.7(ii). Επομένως, ο ανανεωτικός ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον ολικό ορισμό.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον ολικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων της $\{N(t)\}$. Θα δικαιολογήσουμε ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του ανανεωτικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Έχουμε

$$\Pr[X_1 > t] = \Pr[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

που είναι η συνάρτηση επιβίωσης της $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομής. Επομένως, η X_1 έχει την $\mathrm{Exp}(\lambda)$ κατανομή. Επίσης, για τη δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης της X_{k+1}, δοθέντος ότι $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, ... $X_k = x_k$, έχουμε

$$\begin{aligned} & \Pr[X_{k+1} > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k] \\ = \ & \Pr[0 \text{ γεγονότα στο } (x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]] \\ = \ & \Pr[N(t) = 0] \\ = \ & e^{-\lambda t}, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Πράγματι, η ισχύς της πρώτης ισότητας γίνεται φανερή μεταφράζοντας τα ενδεχόμενα που αφορούν τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$ με όρους της $\{N(t)\}$: Το ενδεχόμενο $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k\}$ δίνει την ιστορία της $\{N(t)\}$ στο διάστημα $[0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k]$. Είναι $N(t) = 0$ για $t \in [0, x_1)$, $N(t) = 1$ για $t \in [x_1, x_1 + x_2)$ κ.ο.κ. Το ενδεχόμενο $\{X_{k+1} > t\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{0$ γεγονότα στο $(x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]\}$, υπό τη δέσμευση. Οπότε, από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις της $\{N(t)\}$ (ιδιότητα (i) του ολικού ορισμού) η ιστορία της $\{N(t)\}$ στο διάστημα $[0, x_1 + x_2 + \cdots + x_k]$ είναι ανεξάρτητη από το ενδεχόμενο $\{0$ γεγονότα στο $(x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k + t]\}$ και έχουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα έπεται άμεσα από την ιδιότητα ομογενών προσαυξήσεων της $\{N(t)\}$ (ιδιότητα (ii) του ολικού ορισμού). Τέλος, η τρίτη ισότητα έπεται από το ότι η $N(t)$ έχει την κατανομή Poisson(λ) (ιδιότητα (iii) του ολικού ορισμού). Επομένως, η (1.4) δείχνει ότι η X_{k+1} έχει την Exp(λ) κατανομή και είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Θα αιτιολογήσουμε, τώρα, την ισοδυναμία του ολικού και του τοπικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Δεδομένου ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) είναι κοινές σε αυτούς τους δυό ορισμούς, επικεντρωνόμαστε στην ιδιότητα (iii).

Έστω, ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον ολικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\Pr[N(h) = 0] &= e^{-\lambda h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^k}{k!} = 1 - \lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \\
\Pr[N(h) = 1] &= e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1 - \lambda h + o(h))\lambda h = \lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \\
\Pr[N(h) = n] &= e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} = o(h), \quad h \to 0^+, \quad n \geq 2,
\end{aligned}$$

που δείχνουν ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) του τοπικού ορισμού της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Επομένως ο ολικός ορισμός της διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον τοπικό ορισμό.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{N(t)\}$ ικανοποιεί τον τοπικό ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Τότε, εξετάζοντας την εξέλιξη της $\{N(t)\}$ στο $(0, t + h]$ και δεσμεύοντας στην $N(t)$, μπορούμε να πάρουμε κάποιες διαφορικές εξισώσεις για την $p_n(t) = \Pr[N(t) = n]$. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$p_0(t + h) = p_0(t)p_0(h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)), \quad h \to 0^+,$$

οπότε

$$\frac{p_0(t + h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ έχουμε

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad t \geq 0,$$

η οποία μαζί με την αρχική συνθήκη $p_0(0) = 1$ δίνει

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Ομοίως, για $n \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
p_n(t + h) &= p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)p_k(h) \\
&= p_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(t)o(h) \\
&= p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \quad h \to 0^+,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ έχουμε

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad t \geq 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} & p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow \quad & e^{\lambda t} p_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} p_n(t) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \\ \Rightarrow \quad & e^{\lambda t} p_n(t) - p_n(0) = \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{n-1}(u) du. \end{aligned}$$

η οποία μαζί με την αρχική συνθήκη $p_n(0) = 0$, $n \geq 1$ δίνει

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{n-1}(u) du, \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Χρησιμοποιούμε, τώρα, τις σχέσεις (1.5) και (1.6), οπότε αποδεικνύεται εύκολα επαγωγικά ότι $p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n \geq 0$, δηλαδή ισχύει η ιδιότητα (iii) του ολικού ορισμού της Poisson για τη διαδικασία $\{N(t)\}$. Επομένως, ο τοπικός ορισμός της διαδικασίας Poisson συνεπάγεται τον ολικό ορισμό.

Είδαμε, λοιπόν, ότι οι τρεις ορισμοί της στοχαστικής διαδικασίας Poisson είναι ισοδύναμοι και δίνουν κάποιες διαφορετικές όψεις της ιδέας ότι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ μοντελοποιεί την εκδήλωση γεγονότων στον χρόνο που συμβαίνουν «εντελώς τυχαία» και «ομοιογενώς» με ρυθμό λ. Το «εντελώς τυχαία» αποδίδεται στον πρώτο ορισμό με την απαίτηση οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων να είναι ανεξάρτητοι και εκθετικοί. Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, αυτό σημαίνει ότι δοθείσης της μέχρι τώρα ιστορίας της διαδικασίας, ο χρόνος που απομένει ως το επόμενο γεγονός είναι εκθετικός με παράμετρο λ. Δηλαδή, το παρελθόν της διαδικασίας δεν προσφέρει κάποια πληροφορία για το μέλλον της. Ανάλογα το «εντελώς τυχαία» αποδίδεται στους άλλους δυο ορισμούς με την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Η ομοιογένεια της διαδικασίας στον χρόνο αποδίδεται στον πρώτο ορισμό με το ότι οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων είναι ισόνομοι, ενώ στους άλλους δύο ορισμούς με την ιδιότητα των ομοιογενών προσαυξήσεων.

Πρέπει, εδώ, να τονιστεί ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson έχει μια πιο ειδική δομή από μια αυθαίρετη ανανεωτική διαδικασία. Η δομή αυτή επάγει επιπλέον ιδιότητες. Έτσι, π.χ., μια αυθαίρετη ανανεωτική διαδικασία δεν έχει την ιδιότητα των ανεξάρτητων, ούτε των ομοιογενών προσαυξήσεων. Δεν υπάρχουν, δηλαδή, αντίστοιχοι των τελευταίων δυο ορισμών της διαδικασίας Poisson για ανανεωτικές διαδικασίες.

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τη διαδικασία Poisson και δεν έχει αντίστοιχο στις άλλες ανανεωτικές διαδικασίες είναι το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.8 (Δεσμευμένη κατανομή χρόνων γεγονότων διαδικασίας Poisson)
Η από κοινού κατανομή των χρόνων των γεγονότων $S_1, S_2, \ldots, S_n$ μιας στοχαστικής διαδικασίας Poisson $\{N(t)\}$, δεδομένου ότι $N(t) = n$, ισούται με την από κοινού κατανομή των διατεταγμένων τυχαίων μεταβλητών από n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφες στο $(0, t]$. Πιο συγκεκριμένα η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, δεδομένου ότι $N(t) = n$, δίνεται ως

$$f_{(S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)=n)}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq t, \\ 0, & \textit{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Πράγματι, για $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n \le t$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n}(s_1,s_2,\dots,s_n) \\ = & \lim_{h_1,h_2,\dots,h_n\to 0^+} \frac{\Pr[s_1 < S_1 \le s_1+h_1,\dots,s_n < S_n \le s_n+h_n|N(t)=n]}{h_1h_2\cdots h_n} \\ = & \lim_{h_1,h_2,\dots,h_n\to 0^+} \frac{\Pr[s_1 < S_1 \le s_1+h_1,\dots,s_n < S_n \le s_n+h_n, N(t)=n]}{h_1h_2\cdots h_n \Pr[N(t)=n]}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Όμως, το ενδεχόμενο $\{s_1 < S_1 \le s_1+h_1,\dots,s_n < S_n \le s_n+h_n, N(t)=n\}$ είναι ισοδύναμο με το ότι συμβαίνουν 0 γεγονότα στο $(0,s_1]$, 1 γεγονός στο $(s_1,s_1+h_1]$, 0 γεγονότα στο $(s_1+h_1,s_2]$, 1 γεγονός στο $(s_2,s_2+h_2]$, 0 γεγονότα στο $(s_2+h_2,s_3]$, κ.ο.κ., 1 γεγονός στο $(s_n,s_n+h_n]$, 0 γεγονότα στο $(s_n+h_n,t]$. Επομένως, λόγω των ανεξάρτητων και ομοιογενών προσαυξήσεων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \Pr[s_1 < S_1 \le s_1+h_1,\dots,s_n < S_n \le s_n+h_n, N(t)=n] \\ = & \Pr[N(s_1)=0]\Pr[N(h_1)=1]\Pr[N(s_2-s_1-h_1)=0]\Pr[N(h_2)=1] \\ & \cdots \Pr[N(h_n)=1]\Pr[N(t-s_n-h_n)=0] \\ = & e^{-\lambda s_1}\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}\lambda h_2 e^{-\lambda h_2}\cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-s_n-h_n)} \\ = & \lambda^n e^{-\lambda t} h_1 h_2\cdots h_n. \end{aligned}$$

Οπότε η (1.8) γίνεται

$$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(s_1,s_2,\dots,s_n) = \lim_{h_1,h_2,\dots,h_n\to 0^+} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} h_1h_2\cdots h_n}{h_1h_2\cdots h_n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

που συνεπάγεται τον πρώτο κλάδο της (1.7). Ο δεύτερος κλάδος είναι βέβαια προφανής.

Το θεώρημα 1.8 μας επιτρέπει υπολογισμούς δεσμευμένων πιθανοτήτων της μορφής $\Pr[(S_1,S_2,\dots,S_n)\in A|N(t)=n]$, καθώς και δεσμευμένων μέσων τιμών της μορφής $\mathrm{E}[g(S_1,S_2,\dots,S_n)|N(t)=n]$. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})$ το διάνυσμα των διατεταγμένων παρατηρήσεων από τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές U_i, $i=1,2,\dots,n$, με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,t]$, τότε

$$\begin{aligned} \Pr[(S_1,S_2,\dots,S_n)\in A|N(t)=n] &= \Pr[(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})\in A], \\ \mathrm{E}[g(S_1,S_2,\dots,S_n)|N(t)=n] &= \mathrm{E}[g((U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n}))]. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής, τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη δεσμευμένη μέση τιμή της S_i, δεδομένου ότι $N(t)=n$, για $i=1,2,\dots,n$, έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} F_{(S_i|N(t)=n)}(s_i) &= F_{U_{i:n}}(s_i) = \sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{s_i}{t}\right)^k\left(1-\frac{s_i}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 < s_i \le t, \\ f_{(S_i|N(t)=n)}(s_i) &= f_{U_{i:n}}(s_i) = \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!}\left(\frac{s_i}{t}\right)^{i-1}\frac{1}{t}\left(1-\frac{s_i}{t}\right)^{n-i}, \quad 0 < s_i \le t, \\ E[S_i|N(t)=n] &= \frac{it}{n+1}, \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Όταν έχουμε απαριθμήτριες διαδικασίες διαφόρων τύπων γεγονότων, μπορούμε να δημιουργήσουμε την απαριθμήτρια διαδικασία όλων των γεγονότων που αναφέρεται ως η υπέρθεσή τους. Αντίστροφα, από μία απαριθμήτρια διαδικασία μπορούμε να δημιουργήσουμε τη διάσπασή της σε απαριθμήτριες γεγονότων συγκεκριμένων τύπων. Υπό κάποιες προϋποθέσεις, οι δύο αυτές διαδικασίες, της υπέρθεσης και της διάσπασης, διατηρούν την ιδιότητα μιας απαριθμήτριας διαδικασίας να είναι Poisson. Συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα δυο αποτελέσματα.

Θεώρημα 1.9 (Υπέρθεση (superposition) διαδικασιών Poisson) *Αν $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \ldots, \{N_r(t)\}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ και η $\{N(t)\}$ είναι η υπέρθεσή τους, με $N(t) = \sum_{j=1}^{r} N_j(t)$, τότε η $\{N(t)\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$. Επιπλέον, έστω Z_k ο τύπος του k-οστού γεγονότος της υπέρθεσης, δηλαδή το ενδεχόμενο $\{Z_k = i\}$ αντιστοιχεί στο ότι το k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από γεγονός της $\{N_i(t)\}$. Τότε, οι Z_k, $k \geq 1$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και επιπλέον $\Pr[Z_k = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Θεώρημα 1.10 (Διάσπαση (splitting) διαδικασιών Poisson) *Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{1, 2, \ldots, r\}$ και $\Pr[Z_k = i] = p_i, 1 \leq i \leq r$. Έστω, επίσης $N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k = i\}}$, $t \geq 0, 1 \leq i \leq r$. Οι διαδικασίες $\{N_i(t)\}, 1 \leq i \leq r$ αποτελούν μια τυχαία διάσπαση της $\{N(t)\}$ και είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς $\lambda p_i, 1 \leq i \leq r$.*

Τα Θεωρήματα 1.9 και 1.10 αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους τρεις ισοδύναμους ορισμούς της Poisson. Ειδικότερα με τον τοπικό ορισμό της Poisson προκύπτουν ιδιαίτερα εύκολες αποδείξεις. Δεν υπάρχουν ανάλογα αυτών των θεωρημάτων για γενικές ανανεωτικές διαδικασίες.

1.3 Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους και παραδείγματα

Έστω $\{N(t)\}$ μια ανανεωτική διαδικασία, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ και κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$. Θεωρούμε, επίσης, διαδικασία $\{C(t)\}$, την οποία ονομάζουμε διαδικασία κόστους και η οποία μπορεί να είναι εξαιρετικά γενική. Για κάθε συγκεκριμένη σταθερή στιγμή t σκεφτόμαστε την τυχαία μεταβλητή $C(t)$ ως το κόστος που έχει συσσωρευτεί στο διάστημα $(0, t]$ στο υπό εξέταση σύστημα. Το κόστος αυτό μπορεί να μην είναι μονότονη συνάρτηση του t για μια πραγματοποίηση της διαδικασίας. Το κόστος μπορεί να σχετίζεται με κάποιον τρόπον με τα γεγονότα της $\{N(t)\}$ και να συσσωρεύεται με συνεχή τρόπο ή με άλματα στις στιγμές των γεγονότων. Το κόστος μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, οπότε τότε μπορεί να ερμηνεύεται ως αμοιβή.

Η διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$ λέγεται συμβατή με την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, αν οι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές (X_n, C_n) με $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες για $n \geq 1$, με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x, y)$. Αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι το κόστος C_n που συσσωρεύεται σε έναν ανανεωτικό κύκλο δεν εξαρτάται από το τι συμβαίνει στους άλλους ανανεωτικούς κύκλους αλλά μπορεί, βέβαια, να εξαρτάται από το τι συμβαίνει στον τρέχοντα ανανεωτικό κύκλο. Είναι σημαντικό για τις εφαρμογές οι C_n και X_n να επιτρέπεται να είναι εξαρτημένες. Δίνουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.6 (Ανανεωτική διαδικασία κόστους) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{C(t)\}$ που είναι συμβατή με μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία κόστους. Η συνάρτηση κατανομής $F_{X,C}(x, y)$ των τυχαίων μεταβλητών (X_n, C_n) που δίνουν τις διάρκειες των ανανεωτικών κύκλων και τα αντίστοιχα κόστη αναφέρεται ως γεννώσα συνάρτηση κατανομής της $\{C(t)\}$.*

Παράδειγμα 1.4 (Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους) *Αν έχουμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$, μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, \ldots$, ανεξάρτητων της $\{N(t)\}$ και μια συνάρτηση $g(x, y)$, τότε η διαδικασία $\{C(t)\}$ με*

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i), \ t \geq 0,$$

αναφέρεται ως αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = g(X_n, Y_n),$$

οπότε οι τυχαίες μεταβλητές $(X_n, C_n) = (X_n, g(X_n, Y_n))$, $n \geq 1$ *είναι ανεξάρτητες και επομένως η* $C(t)$ *είναι πράγματι ανανεωτική διαδικασία κόστους.*

Η φυσική ερμηνεία της αλματικής ανανεωτικής διαδικασίας κόστους είναι ότι το κόστος συσσωρεύεται με άλματα που συμβαίνουν τις στιγμές των γεγονότων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$. *Το κόστος που επάγεται τη στιγμή* S_n *που τελειώνει ο* n*-οστός ανανεωτικός κύκλος εξαρτάται από τη διάρκεια* X_n *του ανανεωτικού κύκλου και τυχαίους παράγοντες που εκφράζονται μέσω της τυχαίας μεταβλητής* Y_n. *Η συνάρτηση* $g(x, y)$ *εκφράζει τη σύνδεση του κόστους που επάγεται στο τέλος του* n*-οστού ανανεωτικού κύκλου με τη διάρκειά του και τους τυχαίους παράγοντες που υπεισήλθαν σε αυτόν.*

Παράδειγμα 1.5 (Ανανεωτική διαδικασία) *Μια ανανεωτική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους με* $Y_i = 0$ *(ή γενικά κάποια αυθαίρετη τιμή) και* $g(x, y) = 1$. *Στην περίπτωση αυτή* $C_n = 1, n \geq 1$ *και* $C(t) = N(t)$.

Παράδειγμα 1.6 (Σύνθετη ανανεωτική διαδικασία) *Η περίπτωση της αλματικής ανανεωτικής διαδικασίας κόστους με* $f(x, y) = y$ *αναφέρεται ως σύνθετη ανανεωτική διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή* $C_n = Y_n$, $n \geq 1$ *και* $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. *Η διαδικασία αυτή είναι χρήσιμη για να περιγράψουμε τη συσσώρευση κόστους λόγω εκδήλωσης γεγονότων, καθένα από τα οποία επάγει κόστος ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, όταν τα κόστη των γεγονότων είναι ισόνομα.*

Μια ειδική περίπτωση προκύπτει όταν η $\{N(t)\}$ *είναι διαδικασία Poisson που μοντελοποιεί τις απαιτήσεις αποζημίωσης που φθάνουν σε μια ασφαλιστική εταιρεία και* $Y_1, Y_2, \ldots$ *είναι τα χρηματικά ποσά των απαιτήσεων. Ομοίως, η* $\{N(t)\}$ *μπορεί να είναι μια διαδικασία που μοντελοποιεί τις αφίξεις παραγγελιών σε μια αποθήκη και* $Y_1, Y_2, \ldots$ *είναι τα μεγέθη των παραγγελιών.*

Μια άλλη περίπτωση προκύπτει όταν οι $Y_1, Y_2, \ldots$ *είναι ακέραιες, μη-αρνητικές. Στην περίπτωση αυτή η* $\{N(t)\}$ *μπορεί να μοντελοποιεί τη διαδικασία αφίξεων ομάδων πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και* $Y_1, Y_2, \ldots$ *είναι τα μεγέθη των ομάδων.*

1.4 Μέσος ρυθμός κόστους - Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη

Οι ανανεωτικές διαδικασίες κόστους είναι το κατάλληλο μοντέλο για να περιγραφούν στοχαστικά περιοδικά φαινόμενα κατά τα οποία συσσωρεύεται κόστος. Κατόπιν, το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους (δηλαδή του μέσου κόστους ανά χρονική μονάδα). Το βασικό αποτέλεσμα για τον υπολογισμό αυτόν είναι το παρακάτω στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη που καταδεικνύει ότι ο υπολογισμός μπορεί να γίνει επικεντρώνοντας την προσοχή μας σε έναν τυπικό ανανεωτικό κύκλο. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής:

Θεώρημα 1.11 (Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη) *Έστω* $\{C(t)\}$ *ανανεωτική διαδικασία κόστους, με τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής* (X, C), *με κατανομή* $F_{X,C}(x, y)$. *Υποθέτουμε επίσης ότι* $E[X] < \infty$ *και* $E[C] < \infty$. *Τότε:*

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{E}[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

1.5 Επισκόπηση των αναγεννητικών διαδικασιών

Το κατάλληλο μοντέλο για την καταγραφή της κατάστασης ενός συστήματος που εξελίσσεται στον χρόνο με τυχαίο τρόπο με κάποια μορφή περιοδικότητας είναι μια αναγεννητική διαδικασία. Διαισθητικά μια διαδικασία $\{X(t)\}$ είναι αναγεννητική, αν υπάρχει μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων S_n, έτσι ώστε η εξέλιξη της $\{X(t)\}$ σε κάθε ανανεωτικό κύκλο της $\{N(t)\}$ να είναι πιθανοθεωρητικά ίδια και ανεξάρτητη από ό,τι συμβαίνει στους άλλους κύκλους. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.7 (Αναγεννητική διαδικασία) *Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ λέγεται αναγεννητική διαδικασία, αν υπάρχει μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή S_1 με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < \infty] = 1$, τέτοια ώστε*

(i) *οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ να είναι στοχαστικά ισοδύναμες (δηλαδή για οποιεσδήποτε επιλογές χρονικών στιγμών να έχουν τις ίδιες από κοινού κατανομές) και*

(ii) *οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ να είναι ανεξάρτητες.*

Ο ορισμός αυτός συνεπάγεται την ύπαρξη μιας αύξουσας ακολουθίας χρόνων $S_1, S_2, \dots$ τέτοιων ώστε οι διαδικασίες $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ να είναι στοχαστικά ισοδύναμες. Επιπλέον, για κάθε $n \geq 1$, έχουμε ότι οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως, οι χρόνοι $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$ (με τη σύμβαση $S_0 = 0$) είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι και, συνεπώς, οι S_n μπορούν να θεωρηθούν ως οι χρόνοι των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας. Σε κάθε τέτοιο γεγονός, η διαδικασία $\{X(t\}$ «ξεχνά» το παρελθόν της (αφού οι $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες) και ξαναρχίζει την εξέλιξή της σαν να ξεκινούσαν όλα όπως τη χρονική στιγμή 0 (αφού οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες). Για τον λόγο αυτό λέμε ότι η $\{X(t)\}$ αναγεννάται στοχαστικά σε αυτά τα σημεία και αναφέρεται ως αναγεννητική διαδικασία.

Παραδείγματα αναγεννητικών διαδικασιών θα δούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Συγκεκριμένα, η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία, $\{X(t)\}$, που καταγράφει την κατάσταση μιας μηχανής που εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αντικατάστασης, όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.2, είναι αναγεννητική διαδικασία. Οι στιγμές αναγέννησης είναι οι στιγμές που τελειώνουν οι χρόνοι αντικατάστασης της μηχανής. Ομοίως, οι διαδικασίες που καταγράφουν το ύψος αποθέματος μιας αποθήκης που εκκαθαρίζεται περιοδικά, όπως περιγράφονται στις παραγράφους 2.3 και 2.4 είναι αναγεννητικές διαδικασίες που αναγεννώνται τις στιγμές εκκαθάρισης της αποθήκης. Τέλος, οι διαδικασίες $\{A(t)\}$ (ηλικία), $\{R(t)\}$ (υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης) και $\{T(t)\}$ (t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης) που περιγράφονται στην ενότητα 2.5 και σχετίζονται με την εξέλιξη μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ είναι αναγεννητικές και αναγεννώνται τις στιγμές των γεγονότων της $\{N(t)\}$.

Δοθείσης μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια, ορίζουμε την οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ ως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du\right]}{t}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Η οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ σε ένα σημείο x εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες του x.

Μια άλλη κατανομή που περιγράφει την οριακή συμπεριφορά της $\{X(t)\}$ είναι η οριακή κατανομή της που ορίζεται ως

$$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x], \ x \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναγεννήσεων της διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι απεριοδικοί, η οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της $\{X(t)\}$ ταυτίζεται με την οριακή συνάρτηση κατανομής $F_{X(\infty)}(x)$ της $\{X(t)\}$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.12 (Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών) *Έστω μια αναγεννητική διαδικασία $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια. Έστω, επίσης, S ο χρόνος 1ης αναγέννησης της $\{X(t)\}$ και $1_{\{X(u)\leq x\}}$ η δείκτρια τυχαία μεταβλητή του ενδεχομένου $\{X(u) \leq x\}$ «η $X(u)$ να μην υπερβαίνει το x». Τότε, η τυχαία μεταβλητή $\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}}du$ εκφράζει τον συνολικό χρόνο στο $(0, S]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x. Αν $E[S] < \infty$, ορίζουμε*

$$F_X(x) \quad = \quad \frac{E[\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}}du]}{E[S]}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$. Τότε έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du}{t} \quad = \quad F_X(x), \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

(δηλαδή το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}$ είναι μικρότερη ή ίση με x είναι ίσο με $F_X(x)$),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du]}{t} \quad = \quad F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

(δηλαδή το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}$ είναι μικρότερη ή ίση με x είναι ίσο με $F_X(x)$), και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x]du}{t} \quad = \quad F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

(δηλαδή η C-οριακή πιθανότητα η $\{X(t)\}$ να είναι μικρότερη ή ίση με x είναι ίση με $F_X(x)$).

Αν, επιπλέον, η κατανομή του S είναι απεριοδική, δηλ. δεν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} \Pr[S = na] = 1$, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x] \quad = \quad F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

(δηλαδή η οριακή πιθανότητα η $\{X(t)\}$ να είναι μικρότερη ή ίση με x δίνεται από την $F_X(x)$).

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού γίνεται με εφαρμογή του στοιχειώδους ανανεωτικού θεωρήματος με κόστη στην ανανεωτική διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}}du$$

που καταγράφει τον χρόνο που η αναγεννητική διαδικασία πέρασε σε καταστάσεις μικρότερες ή ίσες της x στο διάστημα $(0, t]$ για κάθε t. Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις (1.10), (1.11) και (1.12). Η απόδειξη της (1.13) προκύπτει με χρήση του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος.

Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι διακριτός, π.χ., το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να επικεντρωνόμαστε στην οριακή μέση δειγματική συνάρτηση πιθανότητας της $\{X(t)\}$ που ορίζεται ως

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du\right]}{t}, \ j \in \mathbb{N}_0.$$

Η p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η διαδικασία $\{X(t)\}$ περνάει στην κατάσταση j. Ισχύει, επίσης, ότι

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du}{t}, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

δηλαδή, για σχεδόν κάθε πραγματοποίηση της $\{X(t)\}$, το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που περνάει στην j ισούται επίσης με p_j. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u)=j]du}{t},\ j \in \mathbb{N}_0,$$

και, τέλος,

$$p_j = \frac{E[\int_0^S 1_{\{X(u)=j\}}du]}{E[S]},\ j \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $\int_0^S 1_{\{X(u)=j\}}du$ ο συνολικός χρόνος παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $(0, S]$. Δηλαδή, η p_j είναι ίση με τον μέσο χρόνο παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j σε έναν αναγεννητικό κύκλο διά τη μέση διάρκεια του αναγεννητικού κύκλου. Αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναγέννησης της ανανεωτικής διαδικασίας είναι απεριοδικοί, έχουμε και ότι η p_j είναι η οριακή πιθανότητα να βρίσκεται η $\{X(t)\}$ στην κατάσταση j, δηλαδή,

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t)=j],\ j \in \mathbb{N}_0.$$

1.6 Μέσος ρυθμός κόστους

Δοθείσης μιας αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα κόστος $c(x)$ ανά χρονική μονάδα παραμονής στην x. Μπορούμε, τώρα, χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη να δούμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους βρίσκεται επικεντρώνοντας την προσοχή μας σε έναν τυπικό αναγεννητικό κύκλο.

Θεώρημα 1.13 (Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους σε αναγεννητική διαδικασία) *Έστω $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$. Έστω, επίσης, άνω ή κάτω φραγμένη συνάρτηση $c(x)$, που εκφράζει το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση x (δηλαδή τον ρυθμό κόστους παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση x) και*

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du,\ t \ge 0, \tag{1.14}$$

είναι το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στο $(0, t]$. Έστω ότι X είναι μια τυχαία μεταβλητή με την κατανομή ισορροπίας (1.9) της $\{X(t)\}$.

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = E[c(X)],\ \text{με πιθανότητα 1.} \tag{1.15}$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = E[c(X)]. \tag{1.16}$$

Η μέση τιμή $E[c(X)]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E[c(X)] &= \frac{E[\int_0^S c(X(u))du]}{E[S]} = \frac{E[C(S)]}{E[S]} &(1.17)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(x)dF_X(x) &(1.18)\\ &= \begin{cases} \sum_x c(x)f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή με συν. πιθ. } f_X(x),\\ \int_{-\infty}^{\infty} c(x)f_X(x)dx & \text{αν } X \text{ συνεχής με συν. πυκν. πιθ. } f_X(x), \end{cases} &(1.19)\end{aligned}$$

όπου S ο χρόνος 1ης αναγέννησης της $\{X(t)\}$. Αν επιπλέον η κατανομή του S είναι απεριοδική, έχουμε και ότι

$$E[c(X)] = \lim_{t\to\infty} E[c(X(t))].$$

Στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων της αναγεννητικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ είναι διακριτός, π.χ. $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να απλοποιήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την οριακή μέση δειγματική συνάρτηση πιθανότητας (p_j) της $\{X(t)\}$. Τότε έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} c(j)p_j, \text{ με πιθανότητα } 1,$$

και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}[C(t)]}{t} = \sum_{j=0}^{\infty} c(j)p_j.$$

1.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Erlang(r,λ), δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$ και η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{kr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

Άσκηση 1.2 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Hyperexp$(p, 1-p, \lambda, \mu)$, δηλαδή, μείξη δυο κατανομών Exp(λ) και Exp(μ), με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων είναι, επομένως,*

$$f_X(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt + Ce^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A, B και C.

Άσκηση 1.3 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, όπου ένας ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης είναι 0 με πιθανότητα p, και έχει την $Exp(\lambda)$ κατανομή με πιθανότητα $1-p$. Δηλαδή, η συνάρτηση κατανομής του είναι μεικτή, με μάζα πιθανότητας p στο 0 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(1-p)\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Η συνάρτηση κατανομής του είναι*

$$F_X(t) = p + (1-p)(1-e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\widetilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A και B.

Άσκηση 1.4 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $Uniform([0,1])$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_X(t) = 1, \; 0 \leq t \leq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ισχύει

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Άσκηση 1.5 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$, με μέση τιμή μ και έστω $h(t) = E[S_{N(t)+1}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = \mu(1 + m(t)), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Άσκηση 1.6 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = 2(m * m)(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Άσκηση 1.7 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = \Pr[N(t)$ περιττός$]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να λυθεί. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$.*

Άσκηση 1.8 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, ...$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Έστω $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Θεωρούμε κάποιο σταθερό $x \geq 0$ και έστω $h(t) = \Pr[R(t) > x]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = \Pr[R(t) > x] = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t (1 - F_X(x+t-u))dm(u), \quad t, x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί, επίσης, ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) > x] = \frac{\int_x^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x \geq 0.$$

Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Δικαιολογήστε την ισότητα ενδεχομένων $\{A(t) > x\} = \{R(t-x) > x\}$ και, χρησιμοποιώντας την, βρείτε το $\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x]$. Ομοίως, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x, R(t) > y] = \frac{\int_{x+y}^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x, y \geq 0.$$

Άσκηση 1.9 *Έστω μια ανανεωτική διαδικασία* $\{N(t)\}$, *με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων* $F_X(t)$ *με μέση τιμή* $\mu \in (0,\infty)$ *και διασπορά* $\sigma^2 \in [0,\infty)$. *Έστω, επίσης,* $m(t)$ *η ανανεωτική συνάρτηση και* $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. *Να αποδειχθεί ότι η* $h(t)$ *ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση*

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\mu} dF_X(u) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_t^\infty (1 - F_X(u))du - (1 - F_X(t)). \end{aligned}$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty}\left(m(t) - \frac{t}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

δηλαδή η ευθεία $\frac{1}{\mu}t + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της* $m(t)$.

Άσκηση 1.10 *Έστω μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ, $0 < s < t$ *και* n *μη αρνητικός ακέραιος. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες* $\Pr[N(s) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. *Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της* $N(s)$ *δεδομένου του ότι* $N(t) = n$; *Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;*

Άσκηση 1.11 *Έστω δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson,* $\{N_1(t)\}$ *και* $\{N_2(t)\}$, *με ρυθμούς* λ_1 *και* λ_2, *αντίστοιχα. Έστω, επίσης* $\{N(t)\}$ *η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες* $\Pr[N_1(t) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. *Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της* $N_1(t)$ *δεδομένου του ότι* $N(t) = n$; *Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;*

Άσκηση 1.12 *Έστω* $\{N(t)\}$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ *και* X *μια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της* $\{N(t)\}$, *με κατανομή* $Exp(\mu)$. *Έστω* N *το πλήθος των γεγονότων της* $\{N(t)\}$ *στο (τυχαίο) διάστημα* $[0, X]$. *Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της* N. *Τι κατανομή είναι;*

Άσκηση 1.13 *Έστω* $\{N(t)\}$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ *και* $S_1, S_2, \ldots$ *οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, δηλαδή η* $E[S_{N(t)}]$.

Άσκηση 1.14 *Έστω ότι ένα μηχάνημα έχει εκθετικό χρόνο ζωής με παράμετρο* λ *και ότι μπορεί να επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε* $\tau = \frac{1}{\mu}$ *χρονικές μονάδες,*

1. *είτε στις στιγμές* $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ *μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας επιθεωρήσεων*

2. *είτε στις στιγμές μιας Poisson διαδικασίας επιθεωρήσεων με ρυθμό* μ.

Έστω Y_α *και* Y_β *ο χρόνος στον οποίο θα ανακαλυφθεί ότι το μηχάνημα είναι χαλασμένο με τις διαδικασίες* (α) *και* (β) *αντίστοιχα, δηλαδή οι στιγμές των πρώτων επιθεωρήσεων μετά το πέρας του χρόνου ζωής του μηχανήματος. Να υπολογιστούν οι* $E[Y_\alpha]$ *και* $E[Y_\beta]$. *Ποια διαδικασία επιθεωρήσεων είναι προτιμότερη;*

Άσκηση 1.15 *Θεωρήστε έναν δρόμο και μια συγκεκριμένη διάβαση πεζών επί αυτού. Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ *αυτοκίνητα το λεπτό. Ο δρόμος έχει πλάτος* x *μέτρα. Ένας πεζός που περπατάει με ταχύτητα* u *μέτρα το λεπτό, θέλει να διασχίσει τον δρόμο και για λόγους ασφαλείας αρχίζει να τον διασχίζει μόνο όταν βλέπει ότι δεν θα περάσουν αυτοκίνητα από τη διάβαση ενόσω θα την περνάει ο ίδιος (υποθέτουμε ότι ο δρόμος είναι ευθύς και ο πεζός έχει εποπτεία των αυτοκινήτων που έρχονται και μπορεί να εκτιμήσει με απόλυτη ακρίβεια πότε θα περάσει το επόμενο αυτοκίνητο από τη διάβαση). Βρείτε τον μέσο χρόνο που απαιτείται από την άφιξή του στη διάβαση μέχρι να την περάσει.*

1.8 Σχόλια

Η αναγεννητικότητα των υποκείμενων στοχαστικών διαδικασιών είναι μια βασική υπόθεση που διατρέχει το σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας στα Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα. Τα εισαγωγικά βιβλία Wolff 1989, Φακίνος 2007, Tijms 2008 και Kulkarni 2010 δίνουν έμφαση σε αυτήν την οπτική. Επίσης, η οπτική αυτή συνδέεται με τη μελέτη των στοχαστικών μοντέλων εστιάζοντας σε μια πραγματοποίησή τους (sample-path analysis). Ένα σύγγραμμα που αναπτύσσει αυτήν τη θεώρηση στο πλαίσιο της Θεωρίας Ουρών είναι το El-Taha και Stidham 1998.

Άλλα συγγράμματα ακολουθούν μια πιο αναλυτική προσέγγιση. Εκεί η έμφαση δίνεται στη μοντελοποίηση των συστημάτων μέσω κάποιων στοχαστικών διαδικασιών με ανεπτυγμένη θεωρία (π.χ. ως Μαρκοβιανές διαδικασίες συνεχούς χρόνου) και κατόπιν χρησιμοποιούνται κυρίως αναλυτικές τεχνικές. Π.χ., για την ανάλυση στοχαστικών μοντέλων που περιγράφουν ουρές αναμονής και υιοθετούν μια πιο αναλυτική προσέγγιση, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να δει π.χ. τα Kleinrock 1975, Kleinrock 1976 και Cohen 1969.

Οι δύο θεωρήσεις, η κλασική-αναλυτική και η σύγχρονη-πιθανοθεωρητική με έμφαση στην αναγεννητικότητα, είναι συμπληρωματικές και είναι σημαντικό ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να έρθει σε επαφή και με τις δύο.

Για πιο λεπτομερείς εισαγωγές στην ανανεωτική θεωρία με αποδείξεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων, μπορεί κανείς να ανατρέξει σε κλασικά εισαγωγικά βιβλία στις στοχαστικές διαδικασίες, όπως τα Kao 1997, Kulkarni 2010, Ross 1995, and Tijms 2008.

Βιβλιογραφία

[1] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[2] Δ. Φακίνος. *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2007. ISBN: 978-9602661956.

[3] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[4] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[5] M. El-Taha και S.Jr. Stidham. *Sample-path Analysis of Queueing Systems*. Kluwer, 1998. ISBN: 978-0792382102.

[6] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley, 1975. ISBN: 978-0471491101.

[7] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 2: Computer Applications*. Wiley, 1976. ISBN: 978-0471491118.

[8] J.W. Cohen. *The Single Server Queue*. Amsterdam: North-Holland, 1969. ISBN: 978-0720423587.

[9] E.P.C. Kao. *An Introduction to Stochastic Processes*. New York: Duxbury Press, 1997. ISBN: 978-0534255183.

[10] S. Ross. *Stochastic Processes, 2nd Edition*. Wiley, 1995. ISBN: 978-0471120629.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μερικές τυπικές εφαρμογές του στοιχειώδους ανανεωτικού θεωρήματος με κόστη σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας. Αρχικά, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα υπολογισμού μακροπρόθεσμου μέσου κόστους για μια πολιτική συντήρησης - αντικατάστασης μηχανήματος. Κατόπιν, μελετάται μια εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία που παριστάνει τις εναλλασσόμενες φάσεις λειτουργίας και αργίας μιας μηχανής και προσδιορίζεται το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται δύο μοντέλα εκκαθάρισης αποθήκης, στην οποία αποθήκη συσσωρεύονται αντικείμενα που δημιουργούνται μέσω μιας παραγωγικής διαδικασίας. Υπολογίζονται τα μακροπρόθεσμα μέσα κόστη λειτουργίας της αποθήκης και προσδιορίζονται οι βέλτιστες πολιτικές εκκαθάρισης της αποθήκης. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση ενός θεωρητικού θέματος. Πρόκειται για τη μελέτη των οριακών κατανομών του παρελθόντος, του υπολειπόμενου και του t-εξαρτώμενου χρόνου ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας, η οποία βασίζεται στο στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των ανανεωτικών διαδικασιών με κόστη, όπως αυτή περιγράφεται στο κεφάλαιο 1.

2.1 Συντήρηση - αντικατάσταση μηχανήματος

Θεωρούμε μια μηχανή η οποία έχει χρόνους ζωής (λειτουργίας) $O_1, O_2, \ldots$. Η μηχανή αντικαθίσταται όταν χαλάσει ή όταν περάσει χρόνος s. Το κόστος αντικατάστασης είναι c_f αν η αντικατάσταση γίνει λόγω βλάβης ($f \to$ failure) ή c_p αν η αντικατάσταση γίνει προληπτικά ($p \to$ preventive maintenance) μετά από s χρονικές μονάδες από την έναρξη της λειτουργίας της. Οι χρόνοι που απαιτούνται για την αντικατάσταση της μηχανής

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

είναι οι $D_1, D_2, \ldots$. Οι τυχαίες μεταβλητές (O_n, D_n), $n \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητητες και ισόνομες με κατανομή $F_{O,D}(x, y)$. Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος για τις αντικαταστάσεις της μηχανής στο $(0, t]$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους.

Αν συμβολίσουμε με S_n τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η n-οστή αντικατάσταση, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = \min(O_n, s) + D_n, \ n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = c_f 1_{\{O_n \leq s\}} + c_p 1_{\{O_n > s\}}, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αφού οι (O_n, D_n), $n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Οπότε, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεωρήμα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λόγω αντικαταστάσεων είναι

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} E[X] &= E[\min(O, s)] + E[D] = \int_0^\infty \Pr[\min(O, s) > t]dt + \int_0^\infty \Pr[D > t]dt \\ &= \int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt, \\ E[C] &= c_f \Pr[O_n \leq s] + c_p \Pr[O_n > s] = c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s)), \end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s))}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

Συμβολίζουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του s ως $c(s)$.

Αν $c_f \leq c_p$, δηλαδή αν το κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης είναι μικρότερο ή ίσο του κόστους προληπτικής αντικατάστασης, τότε το $c(s)$ είναι λόγος μιας φθίνουσας μη-αρνητικής προς μια αύξουσα μη-αρνητική συνάρτηση του s, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση του s. Επομένως, η βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης είναι για $s = \infty$, δηλαδή το μηχάνημα να αντικαθίσταται μόνο όταν παθαίνει βλάβη.

Αν $c_f > c_p$, όπως είναι λογικό να συμβαίνει στις εφαρμογές, δηλαδή το κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης είναι μεγαλύτερο του κόστους προληπτικής αντικατάστασης, τότε το $c(s)$ είναι λόγος μιας αύξουσας μη-αρνητικής προς μια αύξουσα μη-αρνητική συνάρτηση του s, οπότε δεν είναι σαφές ποια είναι η βέλτιστη τιμή του s. Ουσιαστικά στην περίπτωση αυτή πρέπει να βρεθεί ένα ιδανικό σημείο ισορροπίας. Μικρό s συνεπάγεται ότι θα γίνονται συχνές αντικαταστάσεις, αλλά σχεδόν όλες θα είναι λόγω προληπτικής αντικατάστασης. Επομένως θα πληρώνεται κυρίως το μικρό c_p, αλλά συχνά. Μεγάλο s συνεπάγεται ότι θα γίνονται κυρίως αντικαταστάσεις λόγω βλάβης και επομένως θα πληρώνεται το μεγάλο c_f, αλλά πιο αραιά. Στη γενική περίπτωση η βέλτιστη τιμή του s δεν είναι υπολογίσιμη. Μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις έχουμε κλειστούς τύπους.

Στην ειδική περίπτωση που οι χρόνοι ζωής της μηχανής είναι $Exp(\lambda)$ και οι αντικαταστάσεις γίνονται ακαριαία, δηλαδή $D_n = 0$ έχουμε

$$c(s) = \frac{c_f(1 - e^{-\lambda s}) + c_p e^{-\lambda s}}{\int_0^s e^{-\lambda t}dt} = \lambda c_f + \frac{\lambda c_p e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda s}} = \lambda(c_f - c_p) + \frac{\lambda c_p}{1 - e^{-\lambda s}},$$

που είναι φθίνουσα συνάρτηση του s. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η βέλτιστη τιμή του s είναι ∞, δηλαδή η μηχανή πρέπει να αντικαθίσταται μόνο όταν υφίσταται βλάβη. Αυτό είναι, βέβαια, αναμενόμενο αφού λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής των χρόνων ζωής της μηχανής, η μηχανή είναι πάντα σαν καινούργια και επομένως δεν έχει νόημα να αντικατασταθεί προληπτικά μετά από χρόνο s για κάποιο $s < \infty$.

2.2 Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία

Θεωρούμε μια μηχανή η οποία έχει χρόνους ζωής (λειτουργίας) $O_1, O_2, \ldots$ που εναλλάσσονται με χρόνους αντικατάστασης (αργίας) $D_1, D_2, \ldots$. Οι τυχαίες μεταβλητές (O_n, D_n), $n \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_{O,D}(x, y)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής.

Είναι φανερό ότι ξεκινώντας από μια μηχανή που έχει μόλις αρχίσει να λειτουργεί, οι ανανεωτικοί κύκλοι αρχίζουν κάθε φορά που η μηχανή ξεκινά έναν νέο χρόνο λειτουργίας. Επομένως, ο χρόνος του n-οστού ανανεωτικού γεγονότος, S_n, είναι ο χρόνος που τελειώνει ο n-οστός χρόνος αντικατάστασης της μηχανής, οπότε η μηχανή ξαναμπαίνει σε λειτουργία. Επίσης, αφού μας ενδιαφέρει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής, είναι φυσικό να ορίσουμε ως $C(t)$ τον συνολικό χρόνο λειτουργίας της μηχανής στο $(0, t]$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = O_n + D_n, \; n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n, \; n \geq 1. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αφού οι (O_n, D_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Συνεπώς, το στοιχειώδες ανανεωγικό θεωρήμα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O] + E[D]}.$$

2.3 Εκκαθάριση αποθήκης I

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία $\{A(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $Y_1, Y_2, \ldots$, με μέση τιμή μ. Μόλις συγκεντρωθούν m προϊόντα, η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα m προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης, υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του m που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ που μετράει το πλήθος των εκκαθαρίσεων της αποθήκης και S_n ο χρόνος της n-οστής εκκαθάρισης. Έστω, επίσης, $C(t)$ το συνολικό κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$. Για ευκολία στον συμβολισμό, ονομάζουμε $Y_{n,i}$ τον ενδιάμεσο χρόνο της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i-οστού αντικειμένου που φθάνει στον n-οστο κύκλο λειτουργίας του συστήματος (δηλαδή μεταξύ $n-1$-οστής και n-οστής εκκαθάρισης). Με άλλα λόγια, έχουμε $Y_{n,i} = Y_{(n-1)m+i}$, $n \geq 1, 1 \leq i \leq m$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}, \; n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = K + mk + h \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}, \; n \geq 1. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος γίνεται φανερός βλέποντας ότι το i-οστό αντικείμενο του n-οστού κύκλου λειτουργίας θα παραμείνει στην αποθήκη για χρόνο $\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}$, μέχρι να συγκεντρωθούν τα αντικείμενα $i+1, i+2, \ldots, m$ για να εκκαθαριστεί και πάλι η αποθήκη. Επομένως έχουμε άμεσα ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right] = m\mu, \quad n \geq 1, \\ E[C_n] &= E\left[K + mk + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}\right] \\ &= K + mk + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu \\ &= K + mk + h\frac{(m-1)m}{2}\mu, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}. \tag{2.1}$$

Έστω ότι συμβολίζουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του m ως $c(m)$. Για την αντίστοιχη συνεχή επέκταση της $c(m)$ στο $(0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{\mu x} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{h}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{\mu x^3}, \end{aligned}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η $c(x)$ είναι κυρτή και ελαχιστοποιείται στο σημείο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}$$

που μηδενίζει την παράγωγό της. Επομένως, το βέλτιστο m είναι το $\lfloor x^* \rfloor$ ή $\lceil x^* \rceil$.

2.4 Εκκαθάριση αποθήκης ΙΙ

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{A(t)\}$ με ρυθμό λ. Κάθε x χρονικές μονάδες η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρουν ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του x που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω η ντετερμινιστική ανανεωτική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ που μετράει το πλήθος των εκκαθαρίσεων της αποθήκης και $S_n = nx$ ο χρόνος της n-οστής εκκαθάρισης. Έστω, επίσης, $C(t)$ το συνολικό κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0,t]$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = x, \ n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) \\ &= K + k(A(nx) - A((n-1)x)) \\ &\quad + h\int_0^x (A((n-1)x+u) - A((n-1)x)du, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Πράγματι, στον n-οστό ανανεωτικό κύκλο λειτουργίας της αποθήκης, εκκαθαρίζονται τα αντικείμενα που έχουν συσσωρευθεί στο χρονικό διάστημα $((n-1)x, nx]$ που είναι συνολικά $A(nx) - A((n-1)x)$. Επιπλέον, στο διάστημα $((n-1)x, nx]$ ο αριθμός των αντικειμένων στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $(n-1)x + u$ είναι $A((n-1)x + u) - A((n-1)x)$, για $u \in (0, x]$. Είναι, επίσης, φανερό λόγω της ιδιότητας των ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων της διαδικασίας Poisson ότι οι (X_n, C_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως, το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης είναι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_n] &= x, \quad n \geq 1, \\ E[C_n] &= K + kE[A(nx) - A((n-1)x)] \\ &\quad + h\int_0^x E[A((n-1)x + u) - A((n-1)x]du \\ &= K + k\lambda x + h\int_0^x \lambda u du \\ &= K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}.$$

Ας συμβολίσουμε με $c(x)$ τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ως συνάρτηση του x. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} c'(x) &= -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{x^3}, \end{aligned}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι η $c(x)$ είναι κυρτή και ελαχιστοποιείται στο σημείο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}$$

που μηδενίζει την παράγωγό της. Επομένως, είναι βέλτιστο να εκκαθαρίζουμε την αποθήκη κάθε x^* χρονικές μονάδες. Σε αυτόν τον χρόνο θα έχουν συσσωρευτεί κατά μέση τιμή λx^* αντικείμενα, δηλαδή $\sqrt{2K\lambda/h}$. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την ενότητα 2.3, όπου η βέλτιστη πολιτική λειτουργίας της αποθήκης ήταν να εκκαθαρίζεται όποτε μαζευτούν περίπου $\sqrt{2K/(h\mu)}$ αντικείμενα, αφού $\mu = \frac{1}{\lambda}$ στην περίπτωση της διαδικασίας Poisson.

2.5 Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F_X(x)$, και χρόνους γεγονότων $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

την ηλικία (παρελθόντα ή αναδρομικό χρόνο ανανέωσης - το $A(t)$ παραπέμπει στον όρο age process), τον υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης (προδρομικό χρόνο ανανέωσης - το $R(t)$ παραπέμπει στον όρο remaining renewal time process ή residual renewal time process) και τον t-εξαρτώμενο (το $T(t)$ παραπέμπει στο total renewal time process), αντίστοιχα.

Η τυχαία μεταβλητή $A(t)$ μετράει τον χρόνο από το τελευταίο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας πριν τη στιγμή t μέχρι τη στιγμή t. Η τυχαία μεταβλητή $R(t)$ μετράει τον χρόνο από τη στιγμή t μέχρι το επόμενο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας. Τέλος, η τυχαία μεταβλητή $T(t)$ μετράει το μήκος του ενδιάμεσου χρόνου ανανέωσης που περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t.

Οι τρεις αυτές διαδικασίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη στοχαστικών συστημάτων που περιλαμβάνουν ανανεωτικές διαδικασίες. Π.χ., σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, όπου οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, η $R(t)$ μετράει τον χρόνο από τη στιγμή t μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη. Σε ένα σύστημα αποθεμάτων, όπου οι παραγγελίες γίνονται σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, η $R(t)$ μετράει τον χρόνο από τη στιγμή t μέχρι την επόμενη πραγματοποίηση παραγγελίας.

Σκοπός μας είναι η μελέτη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς αυτών των διαδικασιών. Ιδιαίτερα, θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της $\{R(t)\}$, που είναι και η πιο σημαντική στις εφαρμογές. Αρχικά, θα προσδιορίσουμε τον μακροπρόθεσμο αναμενόμενο δειγματικό μέσο του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης, δηλαδή την ποσότητα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι κατά κάποιον τρόπο η απάντηση στο ερώτημα: «Αν επιλεγεί τυχαία μια χρονική στιγμή, πόσος χρόνος απομένει μέχρι το επόμενο ανανεωτικό γεγονός;». Ένας άλλος τρόπος για να μοντελοποιηθεί το ίδιο ερώτημα είναι να προσδιορίσουμε την ποσότητα $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$. Ο τρόπος που γίνεται αυτό αναπτύχθηκε στα Παραδείγματα 1.2 και 1.3 της ενότητας 1.1.

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα, ορίζουμε μια διαδικασία κόστους $C(t) = \int_0^t R(u)du$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C_n &= \int_{S_{n-1}}^{S_n} R(u)du = \int_{S_{n-1}}^{S_n} (X_n - (u - S_{n-1}))du \\ &= \int_0^{X_n} (X_n - u)du = \frac{X_n^2}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $E[X_n] = \mu$ και $Var[X_n] = \sigma^2$, τότε εφαρμόζοντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{E[X_n^2]}{2E[X_n]} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}. \tag{2.2}$$

Το γεγονός ότι ο μακροπρόθεσμος αναμενόμενος δειγματικός μέσος του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης δίνεται από αυτόν τον τύπο και επομένως είναι ίσος με $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$ και όχι με $\frac{\mu}{2}$ αναφέρεται ως ανανεωτικό παράδοξο. Πράγματι, αν τα γεγονότα της ανανεωτικής διαδικασίας συμβαίνουν κατά μέσο όρο κάθε μ χρονικές μονάδες και επιλέξουμε μια χρονική στιγμή στην τύχη, φαίνεται λογικό ότι θα περιμένουμε $\frac{\mu}{2}$ χρονικές μονάδες για να δούμε το επόμενο γεγονός. Η αφελής αυτή διαίσθηση είναι σωστή μόνο όταν η ανανεωτική διαδικασία είναι προσδιοριστική (ντετερμινιστική), δηλαδή όταν τα ανανεωτικά γεγονότα συμβαίνουν ακριβώς κάθε μ χρονικές μονάδες (οπότε $\sigma = 0$). Όταν, όμως, υπάρχει τυχαιότητα και οι ενδιάμεσοι χρόνοι των γεγονότων δεν είναι ίσοι με μ, η τυχαία επιλεγμένη χρονική στιγμή παρατήρησης είναι πιθανότερο να πέσει σε μεγάλο ενδιάμεσο χρόνο ανανέωσης και επομένως και ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης θα είναι μεγάλος. Αυτή ακριβώς η παρατήρηση δείχνει ότι ο μακροπρόθεσμος αναμενόμενος δειγματικός μέσος του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης πρέπει να είναι μεγαλύτερος του μ και ο παραπάνω υπολογισμός δίνει την ακριβή του τιμή.

Για να γίνει ακόμα πιο κατανοητή αυτή η σκέψη, σκεφτείτε π.χ. την ακραία περίπτωση οι ενδιάμεσοι χρόνοι να είναι 0 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και 2μ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Τότε μια τυχαία επιλεγμένη χρονική στιγμή είναι αδύνατο να πέφτει σε ενδιάμεσο χρόνο 0, αλλά θα πέφτει πάντα σε ενδιάμεσο χρόνο 2μ, οπότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος θα είναι λογικό να είναι $\frac{2\mu}{2} = \mu$. Πράγματι στην περίπτωση αυτή η διασπορά των ενδιάμεσων χρόνων είναι $\sigma^2 = \frac{1}{2}(0-\mu)^2 + \frac{1}{2}(2\mu-\mu)^2 = \mu^2$ και ο τύπος δίνει $\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \mu$.

Στη συνέχεια, προχωράμε στην οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης, $F_R(x)$, που ορίζεται ως

$$F_R(x) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\leq x\}} du\right]}{t}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια, η ποσότητα $F_R(x)$ εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x.

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα ορίζουμε μια διαδικασία κόστους

$$C(t) = \int_0^t 1_{\{R(u)\leq x\}} du, \; t \geq 0,$$

που για κάθε t καταγράφει τον χρόνο που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης ήταν το πολύ x, στο διάστημα $(0, t]$. Επομένως, το κόστος που συσσωρεύεται σε έναν ανανεωτικό κύκλο ισούται με το διάστημα που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x. Είναι φανερό ότι αν η διάρκεια του κύκλου, X_n, είναι μικρότερη ή ίση του x, τότε καθόλη τη διάρκεια του κύκλου ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x και έχουμε $C_n = X_n$. Αν όμως $X_n > x$, τότε μόνο στις τελευταίες x χρονικές μονάδες του κύκλου ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι το πολύ x και έχουμε $C_n = x$. Επομένως, είναι

$$C_n = \min(X_n, x).$$

Εφαρμόζοντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη έχουμε

$$F_R(x) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\leq x\}} du\right]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} \tag{2.3}$$

$$= \quad \frac{E[\min(X_n, x)]}{E[X_n]} = \frac{\int_0^\infty \Pr[\min(X_n, x) > t] dt}{\mu} \tag{2.4}$$

$$= \quad \frac{\int_0^x (1 - F_X(t)) dt}{\mu}. \tag{2.5}$$

Η κατανομή αυτή αναφέρεται ως κατανομή ισορροπίας της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$. Η σύνδεση, λοιπόν, των δυο κατανομών μέσα στο πλαίσιο της ανανεωτικής θεωρίας είναι η εξής: Αν η $F_X(x)$ είναι η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας, η αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας $F_R(x)$ είναι η κατανομή του χρόνου μέχρι το επόμενο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας, αν την κοιτάξουμε μια τυχαία χρονική στιγμή.

2.6 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 *Σε μια στάση λεωφορείων φθάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Η εταιρεία που εξυπηρετεί τη συγκεκριμένη στάση έχει δυο τύπους λεωφορείων, απλά και φυσούνες, που περνούν εναλλάξ από τη στάση. Ο χρόνος από την αναχώρηση απλού λεωφορείου μέχρι την άφιξη φυσούνας είναι x χρονικές μονάδες, ενώ ο χρόνος από την αναχώρηση φυσούνας μέχρι την άφιξη απλού λεωφορείου είναι y χρονικές μονάδες.*

Το κόστος ανά επίσκεψη στη στάση απλού λεωφορείου είναι K_1 και το κόστος ανά επίσκεψη φυσούνας είναι K_2. Το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα είναι h. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους και να βρεθούν οι τιμές των x και y που τον ελαχιστοποιούν.

Άσκηση 2.2 *Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ζητάνε ένα συγκεκριμένο προϊόν. Το αρχικό απόθεμα του προϊόντος στο κατάστημα είναι S. Κάθε πελάτης που φθάνει στο κατάστημα ικανοποιείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα προϊόντος, αλλιώς χάνεται. Μόλις το απόθεμα του καταστήματος εξαντληθεί, το κατάστημα παραγγέλνει S μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή του, οι οποίες του παραδίδονται μετά από τυχαίο χρόνο με μέση τιμή L. Υποθέτουμε ότι το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα στο κατάστημα είναι h. Το κόστος αγοράς ενός προϊόντος από το κατάστημα είναι c και η τιμή πώλησης είναι p. Το κόστος διεκπεραίωσης μας παραγγελίας είναι d ανεξάρτητα από το μέγεθός της. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του καταστήματος.*

Άσκηση 2.3 *Μια εταιρεία προσφέρει συμβόλαια μακράς διαρκείας στους πελάτες της για ένα συγκεκριμένο προϊόν που εμπορεύεται. Συγκεκριμένα, σε κάθε πελάτη της με συμβόλαιο μακράς διαρκείας προσφέρει την ακόλουθη πολιτική εγγύησης: Αντικαθιστά το προϊόν δωρεάν οσεσδήποτε φορές χαλάσει μέσα σε χρονικό διάστημα g από την αγορά του. Αν το προϊόν χαλάσει μετά από χρόνο g από την αγορά του, τότε ο πελάτης πρέπει να αγοράσει ένα νέο προϊόν με την ίδια πολιτική εγγύησης. Έστω ότι οι χρόνοι ζωής του προϊόντος είναι $Exp(\lambda)$ και ότι c είναι η τιμή αγοράς ενός προϊόντος (όταν δεν αντικαθίσταται δωρεάν). Έστω επίσης d $(d < c)$ το κόστος κατασκευής ενός προϊόντος για την εταιρεία. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους για έναν πελάτη της εταιρείας ο οποίος έχει συμβόλαιο μακράς διαρκείας με αυτήν, καθώς και ο μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους από τον πελάτη αυτόν για την εταιρεία.*

Άσκηση 2.4 *Έστω μια αποθήκη που εξετάζεται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου ως προς το απόθεμα ενός προϊόντος. Έστω X_n η στάθμη του αποθέματος στην αρχή της χρονικής περιόδου n και $X_1 = S > 0$ (S γνωστός αριθμός). Συμβολίζουμε με Y_n τη ζήτηση του προϊόντος τη χρονική περίοδο n. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_Y(x)$. Μόλις το απόθεμα πέσει κάτω από s (s γνωστός αριθμός με $s < S$), τότε αναπληρώνεται αμέσως σε ύψος S. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x] = \frac{1 + m_Y(S - x)}{1 + m_Y(S - s)}, \quad s \leq x \leq S,$$

όπου $m_Y(x)$ η ανανεωτική συνάρτηση ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τις $Y_1, Y_2, \dots$.

Άσκηση 2.5 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του έχει κατανομή $F_X(x)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.*

Άσκηση 2.6 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_A(x)$ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του είναι $Exp(\mu)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.*

Άσκηση 2.7 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων S_n και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων X_n. Έστω, επίσης, $\{C_n\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση κατανομης $F_{X,C}(x, y)$. Το C_n είναι το ονομαστικό κόστος που συσσωρεύεται στον n-οστό ανανεωτικό κύκλο* *και πληρώνεται στο τέλος του. Υποθέτουμε ότι τα κόστη αποπληθωρίζονται με έναν συνεχή αποπληθωριστή* $\alpha > 0$. *Έστω TC το συνολικό αποπληθωρισμένο κόστος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα, δηλαδή*

$$TC = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} C_n.$$

Να αποδείξετε ότι

$$E[TC] = \frac{E[Ce^{-\alpha X}]}{1 - E[e^{-\alpha X}]}.$$

2.7 Σχόλια

Τα συγγράμματα των Kao 1997, Φακίνος 2007, Kulkarni 2010, Ross 1995, καιχ Tijms 2008 αναφέρουν πολλές εφαρμογές των ανανεωτικών διαδικασιών με κόστη σε διάφορα μοντέλα που εμφανίζονται στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα.

Το βιβλίο του Wolff 1989 περιέχει πολλές εφαρμογές στο πλαίσιο της Θεωρίας Ουρών.

Βιβλιογραφία

[1] E.P.C. Kao. *An Introduction to Stochastic Processes*. New York: Duxbury Press, 1997. ISBN: 978-0534255183.

[2] Δ. Φακίνος. *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2007. ISBN: 978-9602661956.

[3] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[4] S. Ross. *Stochastic Processes, 2nd Edition*. Wiley, 1995. ISBN: 978-0471120629.

[5] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[6] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ: ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού και συνεχούς χρόνου, με έμφαση στα αποτελέσματα που αφορούν υπολογισμούς σε δομές κόστους. Αρχικά παρουσιάζονται ορισμοί και αποτελέσματα που αφορούν τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με βασικό στόχο τη μελέτη της οριακής τους συμπεριφοράς. Κατόπιν καταδεικνύεται πώς η οριακή κατανομή μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους σε ένα σύστημα που αναπαρίσταται μέσω αυτής. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αναπτύσσεται η αντίστοιχη θεωρία για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.

Η παρουσίαση που εκτίθεται στο κεφάλαιο αυτό, τόσο για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, όσο και για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου, εστιάζεται στη διατύπωση των ορισμών και των αποτελεσμάτων και στη διαισθητική ερμηνεία τους.

Προαπαιτούμενη γνώση

Πέρα από ένα εισαγωγικό μάθημα Θεωρίας Πιθανοτήτων, όπως αυτά που περιλαμβάνονται στα προγράμματα σπουδών Τμημάτων Θετικών Επιστημών, Πολυτεχνικών Σχολών, καθώς και Σχολών Οικονομικών και Διοίκησης Επιχειρήσεων, το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει την επαφή με τη βασική θεωρία των ανανεωτικών διαδικασιών με κόστη, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 1.

3.1 Επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου

Το πιο απλό μοντέλο για την περιγραφή της κατάστασης ενός στοχαστικού δυναμικού συστήματος με διακριτό χώρο καταστάσεων σε διακριτό χρόνο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Πιο συγκεκρι-

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

μένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1 (Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X_n : n \geq 0\}$ *είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$ *αν*

(i) $X_n \in \mathscr{S}$, $n \geq 0$, *και* $\mathscr{S}$ *αριθμήσιμο,*

(ii) $\Pr[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $n \geq 0$, $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in \mathscr{S}$ *(Μαρκοβιανή ιδιότητα).*

Αν, επιπλέον, οι πιθανότητες $\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$ *δεν εξαρτώνται από το* n, *η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται ομογενής. Συμβολίζουμε τότε τις πιθανότητες αυτές με* p_{ij} *και ο πίνακας* $\mathbf{P} = (p_{ij})$ *αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.*

Η συνάρτηση πιθανότητας $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})$ *με* $\pi_i^{(0)} = \Pr[X_0 = i]$ *αναφέρεται ως αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.*

Η συνάρτηση πιθανότητας $\pi^{(0)}$ θεωρείται διάνυσμα-στήλη και αυτός είναι ο κανόνας και για όλα τα άλλα διανύσματα που εμφανίζονται στο παρόν σύγγραμμα. Όταν χρειάζεται να εμφανιστούν ως διανύσματα-γραμμές χρησιμοποιούμε τον ανάστροφο. Π.χ. το διάνυσμα-γραμμή της αρχικής κατανομής της Μαρκοβιανής αλυσίδας συμβολίζεται ως $(\pi^{(0)})^T$.

Σε ό,τι ακολουθεί θα περιοριστούμε σε ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας προσδιορίζεται πλήρως από την αρχική της κατανομή και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της. Σε πρώτο επίπεδο, μας ενδιαφέρουν οι υπολογισμοί που αφορούν την εξέλιξη μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε πεπερασμένο χρόνο. Ιδιαίτερα, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων μετάβασης n-οστής τάξης, $p_{ij}^{(n)} = \Pr[X_n = j | X_0 = i]$, καθώς και ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων $\pi_j^{(n)} = \Pr[X_n = j]$. Ο πίνακας $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης n-οστής τάξης της Μαρκοβιανής αλυσίδας, ενώ η συνάρτηση πιθανότητας $\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)})$ με $\pi_i^{(n)} = \Pr[X_n = i]$ αναφέρεται ως η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη στιγμή n.

Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1 (Βασικοί υπολογισμοί σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα* $\{X_n : n \geq 0\}$ *με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$, *αρχική κατανομή* $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* $\mathbf{P} = (p_{ij})$. *Τότε έχουμε*

(i) *Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συγκεκριμένου μονοπατιού* $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$ *είναι*

$$\Pr[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = \pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

(ii) *Οι πιθανότητες μετάβασης* n*-οστής τάξης υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \\ p_{ij}^{(1)} &= p_{ij}, \\ p_{ij}^{(n)} &= \sum_{r \in \mathscr{S}} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1, \end{aligned}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}^{(1)} &= \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^{(n)} &= \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{P}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, \ n \geq 0.$$

(iii) *Οι μεταβατικές πιθανότητες υπολογίζονται από τη σχέση*

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

που γράφεται σε πινακική μορφή ως

$$(\pi^{(n)})^T = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^{(n)} = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^n.$$

Το (i) αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητας τομής ενδεχομένων και εφαρμόζοντας τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Οι σχέσεις για τις $p_{ij}^{(0)}$ και $p_{ij}^{(1)}$ είναι προφανείς, ενώ η σχέση για τις $p_{ij}^{(n)}$, $n \geq 2$, προκύπτει με δέσμευση στην X_k από το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Ομοίως και το (iii) προκύπτει δεσμεύοντας στην X_0, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Δοθείσης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου και δυο καταστάσεων i, j λέμε ότι η j είναι προσπελάσιμη από την i (συμβολικά $i \to j$), αν υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^{(n)} > 0$. Αν η i είναι προσπελάσιμη από την j, και, αντίστροφα, η j είναι προσπελάσιμη από την i, λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν (συμβολικά $i \leftrightarrow j$). Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις), όπου όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνούν μεταξύ τους. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου λέγεται αδιαχώριστη, αν έχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας, δηλαδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, διαφορετικά λέγεται διαχωρίσιμη. Μια κλάση επικοινωνίας $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathscr{C}$ και $j \notin \mathscr{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή. Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα εισέλθει κάποια στιγμή σε μια κλειστή κλάση, λέμε ότι απορροφήθηκε σε αυτήν, αφού είναι αδύνατο να ξαναβγεί. Δοθέντος ενός συνόλου καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες εισόδου σε αυτό, ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και τους αντίστοιχους μέσους χρόνους πρώτης εισόδου. Στην περίπτωση που το σύνολο καταστάσεων είναι μια κλειστή κλάση επικοινωνίας, η Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν θα βγει από το σύνολο από τη στιγμή που θα εισέλθει σε αυτό, και για τον λόγο αυτόν μιλάμε για πιθανότητες απορρόφησης και μέσους χρόνους απορρόφησης. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.2 (Πιθανότητες εισόδου/απορρόφησης και μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Έστω, επίσης, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$. Ορίζουμε*

$$T_{\mathscr{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathscr{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathscr{C}$. Επίσης, έστω

$$h_i(\mathscr{C}) = \Pr[T_{\mathscr{C}} < \infty | X_0 = i], \quad i \in \mathscr{S},$$

η πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathscr{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i, και

$$m_i(\mathscr{C}) = E[T_{\mathscr{C}} | X_0 = i], \quad i \in \mathscr{S},$$

ο μέσος χρόνος πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathscr{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i. Τότε:

(i) *Η $\mathbf{h}(\mathscr{C}) = (h_i(\mathscr{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$x_i = 1, \; i \in \mathscr{C}, \tag{3.1}$$

$$x_i = \sum_{j \in \mathscr{S}} p_{ij} x_j, \; i \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{C}. \tag{3.2}$$

(ii) *Η* $\mathbf{m}(\mathscr{C}) = (m_i(\mathscr{C}))$ *είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$\begin{aligned} y_i &= 0, \ i \in \mathscr{C}, && (3.3)\\ y_i &= 1 + \sum_{j\in\mathscr{S}} p_{ij} y_j, \ i \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{C}. && (3.4) \end{aligned}$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις (3.1)-(3.4), δεσμεύοντας στην πρώτη μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Πράγματι, ξεκινώντας από μια κατάσταση $i \in \mathscr{C}$, η απορρόφηση είναι βέβαια και ο μέσος χρόνος απορρόφησης είναι μηδενικός. Αν $i \notin \mathscr{C}$, τότε στο πρώτο βήμα η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα μεταβεί σε κάποια κατάσταση j και θα πρέπει ξεκινώντας από αυτήν να απορροφηθεί στο $\mathscr{C}$. Το γιατί οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης είναι η ελάχιστη λύση των παραπάνω εξισώσεων απαιτεί περισσότερη εργασία.

Δοθείσης μιας κατάστασης j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, ορίζουμε h_j της πιθανότητα επανόδου σε αυτήν και με m_j τον αντίστοιχο μέσο χρόνο επανόδου. Για να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες, θεωρούμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει αν τροποποιήσουμε την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα, κάνοντας την κατάσταση j απορροφητική. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε σε αυτήν τη νέα αλυσίδα τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$ και είναι

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{i\in\mathscr{S}} p_{ji} h_i(\{j\}),\\ m_j &= 1 + \sum_{i\in\mathscr{S}} p_{ji} m_i(\{j\}). \end{aligned}$$

Ορισμός 3.2 (Επαναληπτικότητα - παροδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα* $\{X_n : n \geq 0\}$ *και κατάστασή της, j, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.*

(i) *Η j λέγεται θετικά επαναληπτική, αν $h_j = 1$ και $m_j < \infty$.*

(ii) *Η j λέγεται μηδενικά επαναληπτική, αν $h_j = 1$ και $m_j = \infty$.*

(iii) *Η j λέγεται παροδική, αν $h_j < 1$.*

Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν τότε είναι ίδιου τύπου ως προς τη θετική επαναληπτικότητα, μηδενική επαναληπτικότητα και παροδικότητα.

Ισχύει επίσης ότι οι καταστάσεις μιας ανοικτής κλάσης επικοινωνίας είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις μιας πεπερασμένης κλειστής κλάσης επικοινωνίας είναι θετικά επαναληπτικές. Επομένως, η μόνη περίπτωση που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση είναι αυτή της άπειρης κλειστής κλάσης. Εκεί, είναι ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα: Μπορεί οι καταστάσεις της να είναι όλες παροδικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές ή όλες θετικά επαναληπτικές.

Μια άλλη ιδιότητα μιας κατάστασης είναι η περιοδικότητα/απεριοδικότητα. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.3 (Περιοδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα* $\{X_n : n \geq 0\}$ *και κατάστασή της, j, με*

$$d_j = ΜΚΔ\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

Η j λέγεται απεριοδική αν $d_j = 1$.

Η j λέγεται περιοδική με περίοδο d_j αν $d_j > 1$.

Αν $p_{jj} > 0$ τότε έχουμε προφανώς ότι η j είναι απεριοδική. Αλλά η συνθήκη αυτή είναι ικανή και όχι αναγκαία. Επίσης, οι ιδιότητες της απεριοδικότητας και της περιοδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν τότε $d_i = d_j$.

Προχωράμε, τώρα, στην παρουσίαση της οριακής συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου. Δεδομένου ότι οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν αδιαχώριστες αλυσίδες, θα περιοριστούμε στην περίπτωση αυτή, που είναι και η πιο σημαντική. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3 (Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου) *Έστω $\{X_n : n \geq 0\}$ μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Η $\{X_n : n \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική, αν και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας*

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i p_{ij}, \; j \in \mathscr{S}, \tag{3.5}$$

έχει λύση που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j = 1.$$

Αν υπάρχει τέτοια λύση $\pi = (\pi_j)$, τότε είναι μοναδική. Επιπλέον, όλες της οι συντεταγμένες είναι θετικές και κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\pi$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

(i) *Η πιθανότητα π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}}{n} = \pi_j, \;\; \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X_n\}$.

(ii) *Η πιθανότητα π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}]}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathscr{S}.$$

(iii) *Η πιθανότητα π_j ισούται με τον αντίστροφο του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j:*

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathscr{S}.$$

(iv) *Η πιθανότητα π_j είναι η C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j, \; j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X_n\}$.

(v) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι και απεριοδική, τότε η πιθανότητα π_j είναι η οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:*

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j, \; j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η π είναι η οριακή κατανομή της $\{X_n\}$.

(vi) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει αρχική κατανομή την π, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την π:*

$$\pi^{(0)} = \pi \;\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi,\; n \geq 0.$$

Δηλαδή, η π είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$.

Από το θεώρημα 3.3 γίνεται φανερό ότι η κατανομή π φέρει τη σημαντικότερη πληροφορία για τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου. Αναφέρεται ως οριακή εμπειρική, C-οριακή, οριακή και στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και ως κατανομή ισορροπίας. Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τη στάσιμη κατανομή της ως αρχική, οι μεταβατικές της κατανομές είναι όλες ίσες με τη στάσιμη (βλέπε (vi)) και η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται στάσιμη ή λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι έχει περάσει αρκετός χρόνος που το στοχαστικό σύστημα λειτουργεί και η επίδραση της αρχικής του κατάστασης έχει χαθεί και παρουσιάζει ομοιόμορφη συμπεριφορά στον χρόνο. Για τα (ii), (iv) και (v) ισχύουν και οι αντίστοιχοι τύποι που αφορούν τις δεσμευμένες ποσότητες ως προς την αρχική κατάσταση. Δηλαδή, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}|X_0 = i]}{n} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathscr{S}, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}}{n} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathscr{S}, \\
\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} &= \pi_j, \quad i,j \in \mathscr{S}.
\end{aligned}$$

Μια διαισθητική ερμηνεία του (iv) είναι ότι η στάσιμη πιθανότητα π_j εκφράζει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j μια χρονική στιγμή k που έχει επιλεγεί ομοιόμορφα από το χρονικό διάστημα $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, για μεγάλο n. Δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_{K_n} = j] = \pi_j,\; j \in \mathscr{S},$$

όπου η K_n είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ και ανεξάρτητη της $\{X_n : n \geq 0\}$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr[X_{K_n} = j] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Pr[K_n = k] \Pr[X_{K_n} = j|K_n = k] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \Pr[X_k = j] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathscr{S}.
\end{aligned}$$

Τα περισσότερα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 3.3 μπορούν να δικαιολογηθούν διαισθητικά, παρότι οι αυστηρές αποδείξεις τους δεν είναι απλές. Π.χ., για μια διαισθητική αιτιολόγηση των (i), (ii), ας συμβολίσουμε με π_j το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j. Τότε η ποσότητα $\pi_j p_{ji}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων τύπου $j \to i$, δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j, X_{k+1}=i\}}}{n} = \pi_j p_{ji}, \quad j, i \in \mathscr{S}.$$

Αυτό είναι φανερό αφού η p_{ji} εκφράζει το ποσοστό των φορών που η αλυσίδα μετακινείται προς την i, όταν βρίσκεται στην j. Επομένως, η ποσότητα $\sum_{i\in\mathscr{S}} \pi_j p_{ji}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αναχωρήσεων από την κατάσταση j, ενώ η ποσότητα $\sum_{i\in\mathscr{S}} \pi_i p_{ij}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων στην κατάσταση

j. Αυτοί οι δυο ρυθμοί θα πρέπει να είναι ίσοι, αφού κάθε άφιξη στην j ακολουθείται από μια αναχώρηση από αυτήν, δηλαδή αφίξεις και αναχωρήσεις στην j βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία. Οπότε πρέπει να ισχύει

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i p_{ij}, \ j \in \mathscr{S},$$

δηλαδή τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου π_j που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στις διάφορες καταστάσεις πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας.

Για το (iii), παρατηρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, οπότε οι στιγμές επισκέψεων στην j αντιστοιχούν στα γεγονότα μιας ανανεωτικής διαδικασίας και μάλιστα είναι αναγεννητικές στιγμές για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Εφαρμόζοντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα για την ανανεωτική διαδικασία των επισκέψεων στην j, έχουμε ότι ο μακροπρόθεσμος ρυθμός επισκέψεων στην j, δηλαδή η π_j, ισούται με τον αντίστροφο του μέσου ενδιάμεσου χρόνου της ανανεωτικής διαδικασίας, που στην περίπτωσή μας είναι ο μέσος χρόνος επανόδου στη j, m_j. Ουσιαστικά, η σχέση αυτή λέει ότι η συχνότητα των επισκέψεων στην κατάσταση j είναι το αντίστροφο μιας περιόδου μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην j.

Το (iv) είναι μια απλή αναδιατύπωση του (ii), που προκύπτει αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τη μέση τιμή με το άθροισμα. Για το (v), είναι γνωστό ότι αν το όριο μιας ακολουθίας υπάρχει, τότε υπάρχει και το C-όριό της και είναι ίσα. Επομένως, αν το όριο της $\pi_j^{(n)}$ υπάρχει, τότε θα είναι αναγκαστικά ίσο με π_j, λόγω του (iv). Η απεριοδικότητα είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει αυτό το όριο.

Τέλος, υπολογίζοντας τις πιθανότητες $\pi_j^{(n+1)} = \Pr[X_{n+1} = j]$, δεσμεύοντας στην X_n, έχουμε

$$\pi_j^{(n+1)} = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i^{(n)} p_{ij}, \quad j \in \mathscr{S}. \tag{3.6}$$

Οπότε, αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ υπάρχει, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i^{(n)} p_{ij} = \sum_{i \in \mathscr{S}} \lim_{n\to\infty} \pi_i^{(n)} p_{ij}, \quad j \in \mathscr{S},$$

που δείχνει ότι οι οριακές πιθανότητες $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας (3.5).

Επίσης, οι εξίσωσεις (3.6), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.5), δείχνουν ότι, αν $\pi_i^{(0)} = \pi_i$, $i \in \mathscr{S}$, τότε $\pi_i^{(1)} = \pi_i$, $i \in \mathscr{S}$, και επαγωγικά έχουμε $\pi_i^{(n)} = \pi_i$, $i \in \mathscr{S}$, για $n \geq 0$, οπότε έχουμε το (vi).

Σημειώνουμε, επίσης, ότι, αν ο χώρος καταστάσεων μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου είναι πεπερασμένος, τότε υπάρχει πάντοτε η στάσιμη κατανομή. Αυτό συμβαίνει, διότι, όπως έχουμε αναφέρει, οι κλειστές πεπερασμένες κλάσεις επικοινωνίας είναι πάντα θετικά επαναληπτικές.

Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι η στάσιμη κατανομή π ικανοποιεί, επίσης, και τις λεγόμενες εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας που απαιτούν ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων που εξέρχονται από ένα σύνολο καταστάσεων $\mathscr{A}$ να ισούται με τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων που εισέρχονται στο ίδιο σύνολο, δηλαδή

$$\sum_{j \in \mathscr{A}} \sum_{i \in \mathscr{A}^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in \mathscr{A}^c} \sum_{j \in \mathscr{A}} \pi_i p_{ij}, \ \mathscr{A} \subseteq \mathscr{S}.$$

3.2 Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη - Μέσος ρυθμός κόστους

Η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος που περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου συνδέεται, συνήθως, με κάποια δομή κόστους/αμοιβής. Π.χ., η παραμονή σε κάθε κατάσταση ή η μετάβαση από κατάσταση σε κατάσταση μπορεί να επάγει κόστος. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.4 (Δομή κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Έστω* $\{X_n : n \geq 0\}$ *Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* $\mathbf{P} = (p_{ij})$.

(i) *Μια δομή κόστους παραμονής είναι μια συνάρτηση* $c : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$*, που δίνει για κάθε κατάσταση* j *του* $\mathscr{S}$*, το κόστος* $c(j)$ *μιας επίσκεψης (δηλαδή, χρονικής μονάδας παραμονής) της* $\{X_n\}$ *σε αυτήν.*

(ii) *Μια δομή κόστους μετάβασης είναι μια συνάρτηση* $d : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}$*, που δίνει για κάθε μετάβαση* $i \to j$ *του* $\mathscr{S}$*, το κόστος μετάβασης* $d(i,j)$ *που επάγει η* $\{X_n\}$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους.

Θεώρημα 3.4 (Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου) *Έστω* $\{X_n : n \geq 0\}$ *Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* $\mathbf{P} = (p_{ij})$*. Έστω* $c : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ *μια δομή κόστους παραμονής και* $d : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ *μια δομή κόστους μετάβασης. Ορίζουμε*

$$C(n) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} (c(X_k) + d(X_k, X_{k+1})), \ n \geq 0,$$

το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται μέχρι την n*-οστή μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Υποθέτουμε ότι η* $\{X_n\}$ *είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική με κατανομή ισορροπίας* $\pi = (\pi_j : j \in \mathscr{S})$ *και*

$$\sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j \left(|c_j| + \sum_{k \in \mathscr{S}} p_{jk} |d(j,k)| \right) < \infty.$$

Τότε:

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{C(n)}{n} = \sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \in \mathscr{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{E}[C(n)]}{n} = \sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \in \mathscr{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k).$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι διαισθητικά εύλογο, αφού η π_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j, οπότε και το κόστος θα είναι $c(j)$ για μια χρονική μονάδα. Επομένως ο όρος $\sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j c(j)$ εκφράζει το μέσο κόστος παραμονής ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Από την άλλη μεριά, η $\pi_j p_{jk}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων από την j στην k. Κάθε τέτοια μετάβαση επάγει κόστος $d(j,k)$. Επομένως, ο όρος $\sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \in \mathscr{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k)$ εκφράζει το μέσο κόστος μεταβάσεων ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση j που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα και στην κατάσταση k στην οποία μεταβαίνει.

3.3 Επισκόπηση των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου

Για την περιγραφή της κατάστασης ενός στοχαστικού δυναμικού συστήματος με διακριτό χώρο καταστάσεων σε συνεχή χρόνο, το απλούστερο μοντέλο είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Κατ' αναλογία με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.5 (Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$ *αν*

(i) $X(t) \in \mathscr{S}$, $t \geq 0$, *και* $\mathscr{S}$ *αριθμήσιμο,*

(ii) $\Pr[X(t+s) = j | X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$, $t, s \geq 0$, $i, j \in \mathscr{S}$ *(Μαρκοβιανή ιδιότητα).*

Η πιθανότητα $p_{ij}(s, s+t) = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$ *αναφέρεται ως πιθανότητα μετάβασης από την* i *στη* j *σε χρόνο* t *τη στιγμή* s. *Αν δεν εξαρτάται από το* s *η Μαρκοβιανή αλυσίδα αναφέρεται ως ομογενής. Τότε συμβολίζουμε την* $p_{ij}(s, s+t)$ *με* $p_{ij}(t)$. *Ο πίνακας*

$$\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

αναφέρεται ως πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας (έχοντας υποθέσει, δίχως βλάβη της γενικότητας, ότι $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$*). Είναι φανερό ότι* $\mathbf{P}(0) = \mathrm{I}$, *αφού*

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{p}(0) = (p_i(0) : i \in \mathscr{S})$ *με* $p_i(0) = \Pr[X(0) = i]$, $i \in \mathscr{S}$, *αναφέρεται ως αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας.*

Η συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{p}(0)$ θεωρείται διάνυσμα-στήλη όπως είναι ο κανόνας και για όλα τα άλλα διανύσματα που εμφανίζονται στο παρόν σύγγραμμα. Όταν χρειάζεται να εμφανιστούν ως διανύσματα-γραμμές χρησιμοποιούμε τον ανάστροφο. Π.χ. το διάνυσμα-γραμμή της αρχικής κατανομής της Μαρκοβιανής αλυσίδας συμβολίζεται ως $(\mathbf{p}(0))^T$.

Η Μαρκοβιανή ιδιότητα εκφράζει την απαίτηση το παρελθόν και το μέλλον της διαδικασίας να είναι ανεξάρτητα, δοθέντος του παρόντος. Αυτό σημαίνει ότι η κατάσταση μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας περιέχει όλη την πληροφορία που χρειάζεται για να προβλεφθεί πιθανοθεωρητικά η μελλοντική εξέλιξή της, χωρίς να χρειάζεται επιπλέον πληροφορία για το πώς έφθασε μέχρι την παρούσα κατάσταση.

Σε ό,τι ακολουθεί θα περιοριστούμε σε ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η $\{X(t)\}$ είναι πλήρως καθορισμένη, αν δίνονται η αρχική κατανομή της $(p_i(0) : i \in \mathscr{S})$ με

$$p_i(0) = \Pr[X(0) = i], \ i \in \mathscr{S},$$

και οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης. Ειδικότερα, θα δούμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες $p_j(t) = \Pr[X(t) = j]$. Η συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{p}(t) = (p_i(t) : i \in \mathscr{S})$ με $p_i(t) = \Pr[X(t) = i]$ αναφέρεται ως η μεταβατική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας τη στιγμή t.

Το πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι αντίθετα με τον διακριτό χρόνο όπου χρειαστήκαμε μόνο έναν πίνακα μετάβασης, τον $\mathbf{P} = (p_{ij})$, εδώ χρειαζόμαστε άπειρους πίνακες μετάβασης, τους $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$, έναν για κάθε $t \geq 0$. Αυτό συμβαίνει διότι δεν υπάρχει εδώ πίνακας πιθανοτήτων 1ης τάξης, καθώς ο χρόνος είναι συνεχής και επομένως διαιρετός επ' άπειρον. Για να υπολογιστούν οι πίνακες $\mathbf{P}(t)$ χρειαζόμαστε την έννοια των ρυθμών μετάβασης που περιγράφουν την «τοπική συμπεριφορά» μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου για «μικρά» t. Για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τα όρια

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = p'_{ij}(0), \quad i, j \in \mathscr{S} \text{ με } i \neq j,$$

$$q_i = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = -p'_{ii}(0), \quad i \in \mathscr{S},$$

που αναφέρονται αντίστοιχα ως ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j και ως ο ρυθμός εξόδου από την κατάσταση i. Προφανώς ισχύει

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \quad i \in \mathscr{S},$$

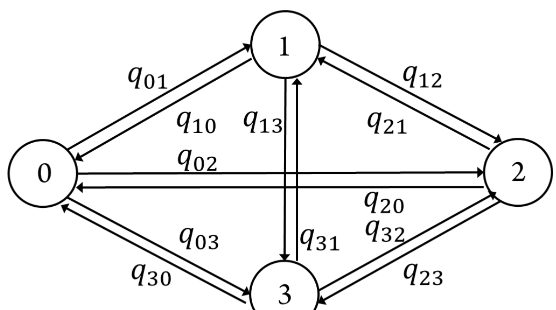
αφού $\sum_j p_{ij}(h) = 1$. Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= q_{ij}h + o(h), \quad h \to 0^+, \quad j \neq i, \\ p_{ii}(h) &= 1 - q_i h + o(h), \quad h \to 0^+, \end{aligned}$$

όπου $o(h)$ κάποια συνάρτηση του h τέτοια ώστε $o(h)/h \to 0$, καθώς $h \to 0^+$. Επομένως οι ρυθμοί q_{ij} πράγματι καθορίζουν την «τοπική συμπεριφορά» της $\{X(t)\}$, από την οποία μπορούν να συναχθούν οι $p_{ij}(t)$ για οποιοδήποτε t. Οπότε, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου μπορεί να περιγραφεί από την αρχική κατανομή της και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \left(p'_{ij}(0)\right) = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός αναφέρεται και ως απειροστικός ή απειροστός γεννήτορας της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του είναι μη-αρνητικά, ενώ τα διαγώνια είναι μη-θετικά (ένα διαγώνιο στοιχείο q_{ii} είναι 0 μόνο αν η κατάσταση i είναι απορροφητική, δηλαδή μετά από μια είσοδο σε αυτήν η αλυσίδα παραμένει για πάντα εκεί). Επιπλέον, τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα είναι όλα 0, αφού $\sum_j p_{ij}(t) = 1$. Ο πίνακας $\mathbf{Q}$ πολλές φορές παριστάνεται γραφικά με το λεγόμενο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης. Το διάγραμμα είναι ένα γράφημα, όπου οι κορυφές (κόμβοι) είναι οι καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας και οι διατεταγμένες ακμές (βέλη) αντιστοιχούν στις μεταβάσεις. Κάθε διατεταγμένη ακμή έχει μια ετικέτα που δίνει τον ρυθμό της αντίστοιχης μετάβασης. Για παράδειγμα το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλύσίδας με 4 καταστάσεις $0, 1, 2$ και 3 δίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3\}$.

Σχετικά με τη μεταβατική συμπεριφορά των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου, δηλαδή τη συμπεριφορά τους για έναν πεπερασμένο χρόνο t μετά την έναρξη της παρατήρησής τους, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.5 (Βασικοί υπολογισμοί σε πεπερασμένη χρονική στιγμή) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$, αρχική κατανομή $\mathbf{p}(0) = (p_i(0))$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = \left(p'_{ij}(0)\right) = (q_{ij})$. Έστω επίσης $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$. Τότε έχουμε:*

(i) *Η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης διαδοχής καταστάσεων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *είναι:*

$$\begin{aligned} & \Pr[X(0) = i_0, X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n] \\ = \; & p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

(ii) *Οι πιθανότητες μετάβασης t-οστής τάξης ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \delta_{ij}, \\ p_{ij}(t) &= \sum_{r \in \mathscr{S}} p_{ir}(s) p_{rj}(t-s), \; 0 \le s \le t, \end{aligned}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t-s), \; 0 \le s \le t. \end{aligned}$$

(iii) *Οι πιθανότητες μετάβασης t-οστής τάξης είναι η λύση του συστήματος (προδρομικών) εξισώσεων Chapman - Kolmogorov:*

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \delta_{ij}, \\ p'_{ij}(t) &= -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k \ne j} p_{ik}(t) q_{kj}, \; t \ge 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

που γράφονται σε πινακική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \; t \ge 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!}, \; t \ge 0.$$

(iv) *Οι μεταβατικές πιθανότητες* $p_j(t) = \Pr[X(t) = j]$, $j \in \mathscr{S}$, *υπολογίζονται από τη σχέση*

$$p_j(t) = \sum_{i \in \mathscr{S}} p_i(0) p_{ij}(t),$$

και επομένως ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων Chapman - Kolmogorov

$$p'_j(t) = -p_j(t) q_j + \sum_{k \ne j} p_k(t) q_{kj}, \; t \ge 0, \tag{3.8}$$

που γράφεται σε πινακική μορφή

$$\left(\mathbf{p}'(t)\right)^T = \left(\mathbf{p}(t)\right)^T \mathbf{Q}, \; t \ge 0.$$

Επομένως,

$$(\mathbf{p}(t))^T = (\mathbf{p}(0))^T \mathbf{P}(t) = (\mathbf{p}(0))^T e^{\mathbf{Q}t}, \quad t \ge 0.$$

Το (i) αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητας τομής ενδεχομένων και εφαρμόζοντας τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Η σχέση για το $p_{ij}(0)$ στο (ii) είναι προφανής, ενώ η σχέση για το $p_{ij}(t)$, προκύπτει με δέσμευση στην τιμή r της $X(s)$ για κάποιο $s \in (0,t]$ και εφαρμογή του θεωρήματος ολικής πιθανότητας. Όσον αφορά την (iii), χρησιμοποιούμε την (ii) και κοιτάμε την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο διάστημα $(0, t+h]$, για $h \to 0^+$. Έχουμε

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(h) \\ &= p_{ij}(t)(1-q_j h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}h + o(h), \ h \to 0^+ \end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} + \frac{o(h)}{h}, \ h \to 0^+.$$

Παίρνοντας $h \to 0^+$ συνάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις (3.7). Η πινακική μορφή τους είναι άμεση και η λύση τους προκύπτει από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (δείτε π.χ., Elaydi 2006). Αν εξετάσουμε την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο διάστημα $(0, t+h]$ για $h \to 0^+$, αλλά εφαρμόσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας κοιτώντας την κατάσταση τη στιγμή h τότε προκύπτει αρχικά η εξίσωση

$$p_{ij}(t+h) = \sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t).$$

Προχωρώντας παρόμοια τους υπολογισμούς όπως πιο πάνω προκύπτουν κάποιες διαφορικές εξισώσεις, δυϊκές των (3.7) που αναφέρονται ως οπισθοδρομικές εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Η πινακική τους μορφή είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{QP}(t), \ t \geq 0, \end{aligned}$$

και καταλήγουν και πάλι στην ίδια λύση με τις προδρομικές εξισώσεις (3.7).

Για το (iv) χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας δεσμεύοντας στην τιμή i της $X(0)$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι εξισώσεις Chapman - Kolmogorov για τις μεταβατικές πιθανότητες, ξεκινώντας από τις αντίστοιχες εξισώσεις για τις πιθανότητες μετάβασης t-οστής τάξης και εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

Μπορούμε, τώρα, να προχωρήσουμε στη μελέτη των χρόνων παραμονής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου στις διάφορες καταστάσεις. Αυτή θα μας οδηγήσει σε κριτήρια, εναλλακτικά του ορισμού, για το πότε μια στοχαστική διαδικασία είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και επιπλέον θα χρειαστεί για τον υπολογισμό πιθανοτήτων και μέσων χρόνων απορρόφησης σε σύνολα καταστάσεων.

Θεώρημα 3.1 (Χρόνος παραμονής σε κατάσταση Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$, με πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Ο χρόνος παραμονής T_i σε μια κατάσταση i πριν από κάποια μετάβαση σε κατάσταση $j \neq i$ είναι εκθετικός με παράμετρο q_i.*

Πράγματι έχουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα

$$\begin{aligned} \Pr[T_i > t+h | T_i > t] &= \Pr[X(t+h) = i | X(t) = i] + o(h) \\ &= p_{ii}(h) + o(h) = 1 - q_i h + o(h), \quad h \to 0^+ \end{aligned}$$

δεν εξαρτάται από το t, οπότε η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα και άρα έχει εκθετική κατανομή. Έστω $F_{T_i}(t)$ η συνάρτηση κατανομής και $f_{T_i}(t) = F'_{T_i}(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της T_i. Τότε, η παραπάνω σχέση δίνει ότι

$$\begin{aligned}
& \Pr[t < T_i \leq t + h | T_i > t] = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+ \\
\Rightarrow \quad & \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{\Pr[T_i > t]} = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+ \\
\Rightarrow \quad & \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \leq t + h]}{h \Pr[T_i > t]} = q_i \\
\Rightarrow \quad & \frac{f_{T_i}(t)}{1 - F_{T_i}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}(1 - F_{T_i}(t))}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}(\log(1 - F_{T_i}(t))) = -q_i
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι $\log(1 - F_{T_i}(t)) = -q_i t$ που δίνει $F_{T_i}(t) = 1 - e^{-q_i t}$, $t \geq 0$, δηλαδή η T_i είναι $\mathrm{Exp}(q_i)$.

Όταν η $\{X(t)\}$ φύγει από κάποια κατάσταση i, η επόμενη κατάσταση θα είναι η $j \neq i$ με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$. Πράγματι, για την πιθανότητα αυτή έχουμε

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \to 0^+} \Pr[X(t + h) = j | X(t) = i, X(t + h) \neq i] \\
= \quad & \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[X(t) = i, X(t + h) = j]}{\Pr[X(t) = i, X(t + h) \neq i]} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[X(t + h) = j | X(t) = i]}{\Pr[X(t + h) \neq i | X(t) = i]} \\
= \quad & \lim_{h \to 0^+} \frac{q_{ij} h + o(h)}{q_i h + o(h)} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \neq i.
\end{aligned}$$

Επομένως, ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτόμαστε την εξέλιξη μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, με βάση ρυθμούς είναι ότι, όντας σε μια κατάσταση i, μένει σε αυτήν για εκθετικό χρονο q_i και κατόπιν μεταβαίνει σε κάποια κατάσταση $j \neq i$ με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

Από τις ιδιότητες εκθετικής κατανομής, γνωρίζουμε ότι αν $T_1, T_2, \dots, T_k$ είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, αντίστοιχα, τότε η $\min(T_1, T_2, \dots, T_k)$ είναι επίσης εκθετική με παράμετρο $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Επιπλέον, το ενδεχόμενο $\{T_j = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)\}$ είναι ανεξάρτητο της τυχαίας μεταβλητής $\min(T_1, T_2, \dots, T_k)$ και ισχύει ότι $\Pr[T_j = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)] = \lambda_j / \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Με βάση την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να συνάγουμε το ακόλουθο κριτήριο για το πότε μια στοχαστική διαδικασία είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

Θεώρημα 3.6 (Κριτήριο Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t)\}$ μια στοχαστική διαδικασία με αριθμήσιμο (διακριτό) χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και δοθέντος ότι $X(t) = i$,*

(i) *υπάρχουν χρόνοι T_{ik} για $k \in \mathscr{S} \setminus \{i\}$, όπου ο χρόνος T_{ik} έχει την κατανομή $Exp(q_{ik})$, $k \in \mathscr{S} \setminus \{i\}$,*

(ii) *ο χρόνος που θα γίνει η επόμενη μετάβαση είναι $\min_k T_{ik}$ και η κατάσταση j στην οποία πηγαίνει η $\{X(t)\}$ είναι αυτή για την οποία $T_{ij} = \min_k T_{ik}$.*

Τότε η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Με άλλα λόγια, μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου χαρακτηρίζεται από το ότι οποιαδήποτε κατάσταση είναι συνδεδεμένη με έναν αριθμό γεγονότων, τα οποία συμβαίνουν μετά από εκθετικά κατανεμημένο χρόνο και η αλυσίδα μεταβαίνει σε μια νέα κατάσταση όταν συμβεί το γεγονός που συνδέεται με αυτή.

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
$n \geq 0$	$n+1$	$T_{n,n+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Πίνακας 3.1: Πίνακας μεταβάσεων στοχαστικής διαδικασίας Poisson.

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε αυτήν τη διαδικασία είναι ότι όταν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i τότε λειτουργούν «ρολόγια-ξυπνητήρια», ένα για κάθε κατάσταση $k \neq i$, που θα «χτυπήσουν» μετά από εκθετικούς χρόνους με παραμέτρους q_{ik}. Όταν χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι η αλυσίδα πηγαίνει στην κατάσταση που αντιστοιχεί σε αυτό, έστω στην j, οπότε ξεκινάνε να λειτουργούν νέα «ρολόγια-ξυπνητήρια», ένα για κάθε κατάσταση $k \neq j$, κ.ο.κ.

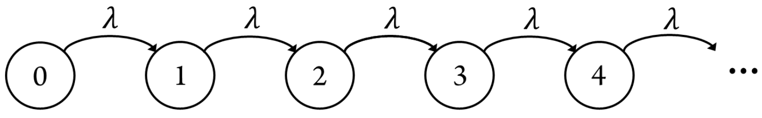
Το κριτήριο αυτό μας επιτρέπει να ελέγχουμε εύκολα κατά πόσο μια στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την εξέλιξη ενός συστήματος σε συνεχή χρόνο είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάζονται πολλά παραδείγματα που δείχνουν τη χρήση αυτού του κριτηρίου. Κάποια πρώτα παραδείγματα δίνονται αμέσως παρακάτω.

Παράδειγμα 3.1 (Η στοχαστική διαδικασία Poisson) *Έστω ότι $X(t)$ είναι το πλήθος των γεγονότων στο $(0,t]$ μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ. Τότε για τη στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι ο $\mathscr{S} = \mathbb{N}_0$, δηλαδή αριθμήσιμος. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την κατανομή Exp(λ), σχετικά με τις μεταβάσεις έχουμε τον πίνακα 3.1.*

Αφού όλοι οι χρόνοι είναι εκθετικοί έχουμε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης που δίνεται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης διαδικασίας Poisson.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov για τη μεταβατική κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t), \\ p_n'(t) &= -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2 (Η M/M/1/1 ουρά) *Η M/M/1/1 ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, χωρίς χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων λ και έχουν χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την Exp(μ) κατανομή. Έστω $X(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t. Τότε για τη στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι ο $\mathscr{S} = \{0,1\}$ και σχετικά με τις μεταβάσεις έχουμε τον πίνακα 3.2.*

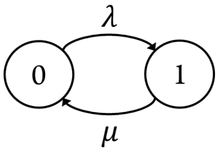
Αφού όλοι οι χρόνοι είναι εκθετικοί, έχουμε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης που δίνεται στο σχήμα 3.3.

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$T_{01} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
1	0	$T_{10} \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

Πίνακας 3.2: Πίνακας μεταβάσεων M/M/1/1 ουράς.



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/1/1 ουράς.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov για τη μεταβατική κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_1'(t) &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3 (Η M/M/1 ουρά) *Η M/M/1 ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων λ και έχουν χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την Exp(μ) κατανομή. Έστω $X(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t. Τότε για τη στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι ο $\mathscr{S} = \mathbb{N}_0$ και σχετικά με τις μεταβάσεις έχουμε τον πίνακα 3.3.*

Αφού όλοι οι χρόνοι είναι εκθετικοί έχουμε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης που δίνεται στο σχήμα 3.4.

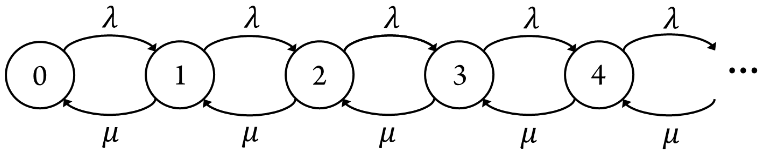
Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov για τη μεταβατική κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_n'(t) &= -(\lambda+\mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4 (Η D/M/1 ουρά) *Η D/M/1 ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη με άπειρο χώρο αναμονής, όπου οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια ντετερμινιστική διαδικασία αφίξεων με σταθερούς ενδιάμεσους χρόνους (ίσους με $\frac{1}{\lambda}$) και έχουν χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την Exp(μ) κατανομή. Έστω $X(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t. Τότε για τη στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}$ έχουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι ο $\mathscr{S} = \mathbb{N}_0$ και σχετικά με τις μεταβάσεις έχουμε τον πίνακα 3.4.*

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$T_{01} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$T_{n,n+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
	$n-1$	$T_{n,n-1} \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

Πίνακας 3.3: Πίνακας μεταβάσεων M/M/1 ουράς.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/1 ουράς.

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$T_{01} \nsim \text{Exp}$
$n \geq 1$	$n+1$	$T_{n,n+1} \nsim \text{Exp}$
	$n-1$	$T_{n,n-1} \sim \text{Exp}(\mu)$

Πίνακας 3.4: Πίνακας μεταβάσεων D/M/1 ουράς.

Αφού έστω κι ένας χρόνος δεν είναι εκθετικός, έχουμε ότι η $\{X(t)\}$ δεν είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

Όσον αφορά τις έννοιες της προσπελασιμότητας, της επικοινωνίας, της επαναληπτικότητας (θετικής και μηδενικής) και της παροδικότητας, οι ορισμοί και τα βασικά αποτελέσματα είναι εντελώς ανάλογα με την περίπτωση των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου. Οι έννοιες της περιοδικότητας και την απεριοδικότητας δεν υπάρχουν βέβαια εδώ, αφού ο χρόνος είναι άπειρα διαιρετός. Παρακάτω περιγράφουμε τις έννοιες αυτές στο πλαίσιο των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου.

Δοθείσης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου και δυο καταστάσεων i, j λέμε ότι η j είναι προσπελάσιμη από την i (συμβολικά $i \to j$), αν υπάρχει $t \geq 0$ τέτοιο ώστε $p_{ij}(t) > 0$. Αυτό αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μονοπατιού

$$i = i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n = j,$$

με $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} > 0$. Αν η i είναι προσπελάσιμη από την j, και, αντίστροφα, η j είναι προσπελάσιμη από την i, λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν (συμβολικά $i \leftrightarrow j$). Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως ο χώρος καταστάσεων διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις), όπου όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνούν μεταξύ τους. Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου λέγεται αδιαχώριστη, αν έχει μόνο μια κλάση επικοινωνίας, δηλαδή όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, διαφορετικά λέγεται διαχωρίσιμη. Μια κλάση επικοινωνίας $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathscr{C}$ και $j \notin \mathscr{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή. Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα εισέλθει κάποια στιγμή σε μια κλειστή κλάση, λέμε ότι απορροφήθηκε σε αυτήν, αφού είναι αδύνατο να ξαναβγεί. Δοθέντος ενός συνόλου καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες εισόδου σε αυτό, ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και τους αντίστοιχους μέσους χρόνους πρώτης εισόδου. Στην περίπτωση που το σύνολο καταστάσεων είναι μια κλειστή κλάση επικοινωνίας της Μαρκοβιανής αλυσίδας, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν θα βγει από το σύνολο από τη στιγμή που θα εισέλθει σε αυτό, επομένως, μιλάμε για πιθανότητες απορρόφησης και για μέσους χρόνους απορρόφησης. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.7 (Πιθανότητες εισόδου/απορρόφησης και μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Έστω, επίσης, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}$. Ορίζουμε*

$$T_{\mathscr{C}} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathscr{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathscr{C}$ (δηλ. τον χρόνο απορρόφησης στο $\mathscr{C}$ στην περίπτωση που είναι κλειστή κλάση επικοινωνίας). Επίσης, έστω

$$h_i(\mathscr{C}) = \Pr[T_{\mathscr{C}} < \infty | X(0) = i], \quad i \in \mathscr{S},$$

η πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathscr{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i και

$$m_i(\mathscr{C}) = E[T_{\mathscr{C}} | X(0) = i], \quad i \in \mathscr{S},$$

ο μέσος χρόνος πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathscr{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i. Τότε:

(i) *Η $\mathbf{h}(\mathscr{C}) = (h_i(\mathscr{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$x_i = 1, \quad i \in \mathscr{C}, \tag{3.9}$$
$$x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, \quad i \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{C}. \tag{3.10}$$

(ii) *Η $\mathbf{m}(\mathscr{C}) = (m_i(\mathscr{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$y_i = 0, \quad i \in \mathscr{C}, \tag{3.11}$$
$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, \quad i \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{C}. \tag{3.12}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι εισόδου ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.9)-(3.12), δεσμεύοντας στην πρώτη μετάβαση της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Πράγματι, ξεκινώντας από μια κατάσταση $i \in \mathscr{C}$, η είσοδος είναι βέβαια και ο αντίστοιχος μέσος χρόνος είναι μηδενικός. Αν $i \notin \mathscr{C}$, τότε στο πρώτο βήμα η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα μεταβεί σε κάποια κατάσταση j και θα πρέπει ξεκινώντας από αυτήν να εισέλθει στο $\mathscr{C}$. Η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι η j είναι $\frac{q_{ij}}{q_i}$, ενώ ο μέσος χρόνος μετάβασης είναι ο μέσος χρόνος παραμονής στην i. Όπως έχουμε δει, ο χρόνος παραμονής στην i έχει την $\mathrm{Exp}(q_i)$ κατανομή, με μέση τιμή $\frac{1}{q_i}$.

Δοθείσης μιας κατάστασης j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας, ορίζουμε h_j της πιθανότητα επανόδου σε αυτήν και με m_j τον αντίστοιχο μέσο χρόνο επανόδου. Για να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες, θεωρούμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που προκύπτει, αν τροποποιήσουμε την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα, κάνοντας την κατάσταση j απορροφητική. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε σε αυτήν τη νέα αλυσίδα τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$ και είναι

$$h_j = \sum_{i \neq j} \frac{q_{ji}}{q_j} h_i(\{j\}),$$
$$m_j = \frac{1}{q_j} + \sum_{i \neq j} \frac{q_{ji}}{q_j} m_i(\{j\}).$$

Ορισμός 3.6 (Επαναληπτικότητα - παροδικότητα καταστάσεων) *Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ και κατάστασή της, j, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.*

(i) *Η j λέγεται θετικά επαναληπτική αν $h_j = 1$ και $m_j < \infty$.*

(ii) *Η j λέγεται μηδενικά επαναληπτική αν $h_j = 1$ και $m_j = \infty$.*

(iii) *Η j λέγεται παροδική αν $h_j < 1$.*

Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας, δηλαδή, αν οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν, τότε είναι ίδιου τύπου ως προς τη θετική επαναληπτικότητα, τη μηδενική επαναληπτικότητα και την παροδικότητα.

Ισχύει, επίσης, ότι οι καταστάσεις μιας ανοικτής κλάσης επικοινωνίας είναι παροδικές, ενώ οι καταστάσεις μιας πεπερασμένης κλειστής κλάσης επικοινωνίας είναι θετικά επαναληπτικές. Επομένως, η μόνη περίπτωση που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση είναι αυτή της άπειρης κλειστής κλάσης. Εκεί, είναι ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα: Μπορεί οι καταστάσεις της να είναι όλες παροδικές ή όλες μηδενικά επαναληπτικές ή όλες θετικά επαναληπτικές.

Από τα προηγούμενα, είναι φανερό ότι η μελέτη της μεταβατικής συμπεριφοράς μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, δηλαδή η μελέτη των πιθανοτήτων η αλυσίδα να βρίσκεται στις διάφορες δυνητικές καταστάσεις της μια δοσμένη στιγμή t είναι ένα υπολογιστικά απαιτητικό πρόβλημα. Πράγματι, μια τέτοια μελέτη απαιτεί τη λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων Chapman-Kolmogorov ή ισοδύναμα τον υπολογισμό της πινακικής εκθετικής συνάρτησης $e^{\mathbf{Q}t}$. Όπως θα δούμε τώρα, η μελέτη της οριακής συμπεριφοράς μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι σαφώς απλούστερη. Επιπλέον, από πλευράς εφαρμογών στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα, αυτό που μας ενδιαφέρει για ένα σύστημα είναι η μακροπρόθεσμη αποτίμησή του στον χρόνο και όχι η εκτίμηση της λειτουργίας του για μικρό χρονικό διάστημα, οπότε η οριακή συμπεριφορά είναι πράγματι αυτό που έχει σημασία. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων η σύγκλιση της μεταβατικής κατανομής μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας στην οριακή κατανομή της είναι πολύ γρήγορη (εκθετική ως προς τον χρόνο). Επομένως, ακόμη και για σχετικά μικρούς χρόνους t η εκτίμηση της μεταβατικής κατανομής από την οριακή κατανομή δίνει πολύ καλά αποτελέσματα.

Θα προχωρήσουμε, λοιπόν, στη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση των αδιαχώριστων αλυσίδων, αφού αυτές είναι που κατά κανόνα εμφανίζονται στις εφαρμογές στη Θεωρία Ουρών. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.8 (Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Η $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική, αν και μόνο αν, το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας*

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \ j \in \mathscr{S} \tag{3.13}$$

έχει λύση που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathscr{S}} p_j = 1.$$

Αν υπάρχει τέτοια λύση $\mathbf{p} = (p_j)$, τότε είναι μοναδική. Επιπλέον, όλες οι συντεταγμένες της είναι θετικές και κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\mathbf{p}$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

(i) *Η πιθανότητα p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du}{t} = p_j, \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X(t)\}$.

(ii) *Η πιθανότητα p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j, δηλαδή,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du]}{t} = p_j, \quad j \in \mathscr{S}.$$

(iii) *Η πιθανότητα p_j συνδέεται με τον ρυθμό εξόδου από την j, q_j, και τον μέσο χρόνο επανόδου στην j, m_j, ως εξής:*

$$p_j = \frac{1}{q_j m_j}, \quad j \in \mathscr{S}.$$

(iv) *Η πιθανότητα p_j είναι η C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_j(u)du}{t} = p_j, \quad j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η C-οριακή κατανομή της* $\{X(t)\}$.

(v) *Η πιθανότητα p_j είναι η οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j, \quad j \in \mathscr{S}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η οριακή κατανομή της* $\{X(t)\}$.

(vi) *Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει αρχική κατανομή την* $\mathbf{p}$, *τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την* $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} \ \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \ t \geq 0.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{p}$ *είναι η στάσιμη κατανομή της* $\{X(t)\}$.

Από το θεώρημα 3.8, βλέπουμε ότι η κατανομή $\mathbf{p}$ φέρει τη σημαντικότερη πληροφορία για τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου. Αναφέρεται ως οριακή εμπειρική, C-οριακή, οριακή και στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας, καθώς και ως κατανομή ισορροπίας. Αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει τη στάσιμη κατανομή της ως αρχική, οι μεταβατικές της κατανομές είναι όλες ίσες με τη στάσιμη (βλέπε (vi)) και η Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται στάσιμη ή λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι έχει περάσει αρκετός χρόνος από τότε που το στοχαστικό σύστημα άρχισε να λειτουργεί και η επίδραση της αρχικής του κατάστασης έχει χαθεί. Έτσι, παρουσιάζει ομοιόμορφη συμπεριφορά στον χρόνο. Για τα (ii), (iv) και (v) ισχύουν και οι αντίστοιχοι τύποι που αφορούν τις δεσμευμένες ποσότητες ως προς την αρχική κατάσταση. Δηλαδή, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}du|X(0)=i]}{t} &= p_j, \quad i,j \in \mathscr{S}, \\
\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_{ij}(u)du}{t} &= p_j, \quad i,j \in \mathscr{S}, \\
\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) &= p_j, \quad i,j \in \mathscr{S}.
\end{aligned}$$

Μια διαισθητική ερμηνεία του (iv) είναι ότι η πιθανότητα p_j εκφράζει την πιθανότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j μια χρονική στιγμή u που έχει επιλεγεί ομοιόμορφα από το χρονικό διάστημα $(0, t]$, για μεγάλο t. Δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(U_t) = j] = p_j, \ j \in \mathscr{S},$$

όπου η U_t είναι ομοιόμορφη στο $(0, t]$ και ανεξάρτητη της $\{X(t) : t \geq 0\}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \Pr[X(U_t) = j] &= \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \Pr[X(U_t) = j|U_t = u]dF_{U_t}(u) \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \Pr[X(u) = j]\frac{1}{t}du \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_j(u)du}{t} = p_j, \quad j \in \mathscr{S}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Τα περισσότερα από τα συμπεράσματα του θεωρήματος 3.8 μπορούν να δικαιολογηθούν διαισθητικά, παρότι οι αυστηρές αποδείξεις τους δεν είναι απλές. Π.χ., για μια διαισθητική αιτιολόγηση των (i), (ii) ας συμβολίσουμε με p_j το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j. Τότε η ποσότητα $p_j q_{ji}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων τύπου $j \to i$. Αυτό είναι φανερό αφού η q_{ji} εκφράζει τον ρυθμό των μεταβάσεων προς την i, για κάθε χρονική μονάδα παραμονής στην j, ενώ η p_j είναι το ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα περνάει στην j. Επομένως, η ποσότητα $\sum_{i \neq j} p_j q_{ji}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αναχωρήσεων από την κατάσταση j, ενώ η ποσότητα $\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό αφίξεων στην κατάσταση j. Αυτοί οι δυο ρυθμοί θα πρέπει να είναι ίσοι, αφού κάθε άφιξη στην j ακολουθείται από μια αναχώρηση από αυτήν, δηλαδή αφίξεις και αναχωρήσεις σε κάθε κατάσταση j βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία. Οπότε, κατ' ανάγκη ισχύει

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_j q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \quad j \in \mathscr{S},$$

δηλαδή, τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου p_j που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στις διάφορες καταστάσεις πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας (3.13).

Για το (iii), παρατηρούμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων σε κάθε συγκεκριμένη κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, οπότε οι στιγμές επισκέψεων (εισόδων) στην j αντιστοιχούν στα γεγονότα μιας ανανεωτικής διαδικασίας και μάλιστα είναι αναγεννητικές στιγμές για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα. Εφαρμόζουμε το Εργοδικό θεώρημα των αναγεννητικών διαδικασιών και έχουμε ότι το ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα περνάει στην j, δηλαδή η p_j, ισούται με τον λόγο της μέσης διάρκειας παραμονής στην j σε έναν ανανεωτικό κύκλο, διά τη μέση διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου. Στη διάρκεια ενός κύκλου, δηλαδή μεταξύ δυο διαδοχικών εισόδων στην j, η αλυσίδα παραμένει στην j για έναν εκθετικό χρόνο με παράμετρο q_j. Επομένως, η μέση διάρκεια παραμονής στην j σε έναν κύκλο είναι $\frac{1}{q_j}$. Από την άλλη, η μέση διάρκεια του κύκλου είναι m_j, οπότε προκύπτει άμεσα η (iii).

Το (iv) είναι μια απλή αναδιατύπωση του (ii) που προκύπτει αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τη μέση τιμή με το ολοκλήρωμα. Για το (v), είναι γνωστό ότι αν το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε υπάρχει και το C-όριό της και είναι ίσα. Για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου αποδεικνύεται ότι το όριο της $p_j(t)$ υπάρχει, οπότε θα είναι αναγκαστικά ίσο με p_j, λόγω του (iv).

Οι εξισώσεις ισορροπίας (3.13) γράφονται σε πινακική μορφή ως

$$\mathbf{p}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T.$$

Επομένως, από τα (iii)-(iv) του θεωρήματος 3.5, έχουμε ότι αν $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$, τότε

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p}(t))^T &= (\mathbf{p}(0))^T e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{p}^T e^{\mathbf{Q}t} \\
&= \mathbf{p}^T \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \mathbf{p}^T + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}^T \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!} = \mathbf{p}^T, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν $p_j(0) = p_j, j \in \mathscr{S}$, τότε $p_j(t) = p_j, j \in \mathscr{S}, t \geq 0$ και έχουμε το (vi).

Σημειώνουμε, επίσης, ότι όποτε ο χώρος καταστάσεων μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου είναι πεπερασμένος, τότε υπάρχει πάντοτε η στάσιμη κατανομή.

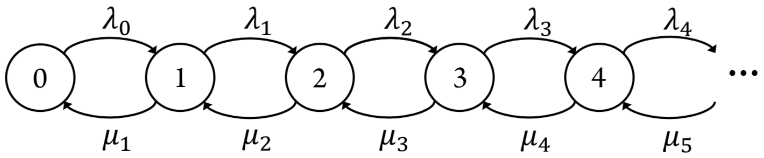
Μια χρήσιμη παρατήρηση, που σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής, είναι ότι αυτή ικανοποιεί επίσης και τις λεγόμενες εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας. Οι εξισώσεις αυτές απαιτούν ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων που εξέρχονται από ένα σύνολο καταστάσεων $\mathscr{A}$ να ισούται με τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων που εισέρχονται στο ίδιο σύνολο, δηλαδή

$$\sum_{j \in \mathscr{A}} \sum_{i \in \mathscr{A}^c} p_j q_{ji} = \sum_{i \in \mathscr{A}^c} \sum_{j \in \mathscr{A}} p_i q_{ij}, \quad \mathscr{A} \subseteq \mathscr{S}. \tag{3.15}$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή, είναι εύκολο να προσδιορίσουμε τη στάσιμη κατανομή μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου, $\{X(t)\}$, με χώρο καταστάσεων $\mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu_i & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μια τέτοια αλυσίδα αναφέρεται ως διαδικασία γέννησης-θανάτου, δεδομένου ότι περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους ενός πληθυσμού που αυξομειώνεται μέσω γεννήσεων (μεταβάσεων τύπου $i \to i+1$) και θανάτων (μεταβάσεων τύπου $i \to i-1$). Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μια τέτοιας αλυσίδας δίνεται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης διαδικασίας γέννησης-θανάτου.

Θεωρώντας τα σύνολα $\mathscr{A}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $n \geq 1$, έχουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n,\ n \geq 1,$$

που εξισώνουν τους μακροπρόθεσμους ρυθμούς εξόδου και εισόδου σε κάθε σύνολο. Από αυτές παίρνουμε ότι

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} p_0,\ n \geq 1.$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, συνάγουμε ότι η διαδικασία γέννησης-θανάτου είναι ευσταθής, δηλαδή υπάρχει στάσιμη κατανομή, αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Τότε, η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας γέννησης-θανάτου δίνεται από τον τύπο

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

3.4 Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου - Μέσος ρυθμός κόστους

Όπως και στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος που περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου συνδέεται, συνήθως, με κάποια δομή κόστους/αμοιβής. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.7 (Δομή κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.*

(i) *Μια δομή κόστους παραμονής (holding cost) είναι μια συνάρτηση $c : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε κατάσταση j του $\mathscr{S}$, το κόστος c_j ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ σε αυτήν.*

(ii) *Μια δομή κόστους μετάβασης (transition cost) είναι μια συνάρτηση $d : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}$, που δίνει για κάθε μετάβαση $i \to j$ του $\mathscr{S}$, το κόστος μετάβασης d_{ij} της $\{X(t)\}$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους.

Θεώρημα 3.9 (Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους σε Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου) *Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$. Έστω $c : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους παραμονής ανά χρονική μονάδα και $d : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ μια δομή κόστους μετάβασης. Έστω επίσης $A(t)$ το πλήθος των μεταβάσεων που έχουν συμβεί στο $(0, t]$ στην $\{X(t)\}$ και $\{X_n : n \geq 0\}$ η αντίστοιχη εμφυτευμένη στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου σε στιγμές μεταβάσεων της $\{X(t)\}$. Ορίζουμε*

$$C(t) \quad = \quad \int_0^t c_{X(u)} du + \sum_{n=0}^{A(t)-1} d_{X_n, X_{n+1}}, \ t \geq 0,$$

το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται μέχρι τη στιγμή t από την εξέλιξη της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X(t)\}$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με κατανομή ισορροπίας $\mathbf{p} = (p_j : j \in \mathscr{S})$ και

$$\sum_{j \in \mathscr{S}} p_j \left(|c_j| + \sum_{k \neq j} q_{jk} |d_{jk}| \right) < \infty.$$

Τότε:

(i) *Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j \in \mathscr{S}} p_j c_j + \sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \neq j} p_j q_{jk} d_{jk}, \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

(ii) *Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j \in \mathscr{S}} p_j c_j + \sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \neq j} p_j q_{jk} d_{jk}.$$

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά εύλογο, αφού η p_j εκφράζει το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j, οπότε και το κόστος παραμονής θα είναι c_j για μια χρονική μονάδα. Επομένως ο όρος $\sum_{j \in \mathscr{S}} p_j c_j$ εκφράζει το μέσο κόστος παραμονής ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Από την άλλη μεριά, η $p_j q_{jk}$ εκφράζει τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων από την j στην k. Κάθε τέτοια μετάβαση επάγει κόστος d_{jk}. Επομένως, ο όρος $\sum_{j \in \mathscr{S}} \sum_{k \in \mathscr{S}} p_j q_{jk} d_{jk}$ εκφράζει το μέσο κόστος μεταβάσεων ανά χρονική μονάδα, δεσμεύοντας στην κατάσταση j που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα και στην κατάσταση k στην οποία μεταβαίνει.

3.5 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 *Θεωρούμε δυο δοχεία A και B. Το A περιέχει αρχικά N λευκά σφαιρίδια ενώ το B περιέχει αρχικά N μαύρα σφαιρίδια. Κατόπιν, σε κάθε στάδιο του πειράματος τύχης που συνεχίζεται επ' άπειρον επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο από κάθε δοχείο και τα δυο σφαιρίδια αλλάζουν δοχεία. Έστω X_n το πλήθος των λευκών σφαιριδίων που περιέχει το δοχείο A μετά το n-οστό στάδιο ($X_0 = N$).*

1. *Δείξτε ότι η $\{X_n\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου και βρείτε τις πιθανότητες μετάβασής της.*

2. *Βρείτε μια αναγωγική σχέση που να συνδέει τις $E[X_{n+1}]$ και $E[X_n]$.*

3. *Βρείτε έναν κλειστό τύπο για την $E[X_n]$.*

Άσκηση 3.2 *Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο στο σύνολο των ακεραίων* $\mathbb{Z}$, *με πιθανότητες μετάβασης* $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ *και* $p_{i,i} = r$, *για κάθε* $i \in \mathbb{Z}$ $(p+q+r=1)$. *Να βρεθούν οι πιθανότητες μετάβασης* n*-οστής τάξης* $p_{ii}^{(n)}$, *για κάθε* $i \in \mathbb{Z}$ *και* $n \geq 0$.

Άσκηση 3.3 *Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S} = \{1, 2, 3\}$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης n*-οστής τάξης* $p_{11}^{(n)}$ *για κάθε* $n \geq 0$.

Άσκηση 3.4 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου* $\{X_n\}$, *με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S} = \{1, 2\}$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta \in (0, 1)$. *Έστω* $\tilde{T}_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$, *για κάθε* $j \in \mathscr{S}$.

1. *Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης* n*-οστής τάξης* $p_{ij}^{(n)}$, *για κάθε* $i, j \in \mathscr{S}$ *και* $n \geq 0$.

2. *Να υπολογιστούν οι πιθανότητες* $f_{ij}^{(n)} = \Pr[T_j = n | X_0 = i]$, *για κάθε* $i, j \in \mathscr{S}$ *και* $n \geq 1$.

3. *Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές* $\tilde{m}_{ij} = E[T_j | X_0 = i]$, *για κάθε* $i, j \in \mathscr{S}$.

Άσκηση 3.5 *Θεωρούμε ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος με πιθανότητα κορώνας* p *και πιθανότητα γραμμάτων* $q = 1 - p$ *σε κάθε ρίψη. Οι ρίψεις επαναλαμβάνονται μέχρι να εμφανιστούν για πρώτη φορά είτε* r *συνεχόμενες κορώνες είτε* m *συνεχόμενα γράμματα. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστούν* r *συνεχόμενες κορώνες πριν εμφανιστούν* m *συνεχόμενα γράμματα.*

Άσκηση 3.6 *Έστω* $\{X_n\}$ *ο απλός τυχαίος περίπατος στο σύνολο* $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ *με απορροφητικά φράγματα στο* 0 *και στο* N. *Δηλαδή, οι μη-μηδενικές πιθανότητες μετάβασης είναι οι* $p_{00} = p_{NN} = 1$ *και* $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$ *για* $i = 1, 2, \ldots, N-1$. *Έστω* T *ο χρόνος μέχρι την απορρόφηση, δηλαδή* $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ή } N\}$.

1. *Αποδείξτε ότι, για* $q \neq p$, *η πιθανότητα απορρόφησης στο* 0 *είναι*

$$\Pr[X_T = 0] = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \; 0 \leq i \leq N.$$

2. *Βρείτε την* $\Pr[X_T = 0]$, $0 \leq i \leq N$, *όταν* $q = p$.

3. *Αποδείξτε ότι, για* $q \neq p$, *ο μέσος χρόνος απορρόφησης είναι*

$$E[T | X_0 = i] = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, \; 0 \leq i \leq N.$$

4. *Βρείτε την* $E[T | X_0 = i]$, $0 \leq i \leq N$, *όταν* $q = p$.

Άσκηση 3.7 *Να βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας και να κατατάξετε ως προς την περιοδικότητα/απεριοδικότητα και τη θετική επαναληπτικότητα/μηδενική επαναληπτικότητα/ παροδικότητα τις καταστάσεις των Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$ *και πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης*

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.8 *Δίνεται η αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων τους μη-αρνητικούς ακεραίους και τις ακόλουθες μη-μηδενικές πιθανότητες μετάβασης:*

$$\begin{aligned} p_{0i} &= p_i,\ i \geq 0, \\ p_{i,i-1} &= 1,\ i \geq 1. \end{aligned}$$

Έστω ότι $p_i > 0$ *για κάθε* $i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ *και* $\sum_{i=0}^{\infty} ip_i = \infty$. *Τι είναι η αλυσίδα ως προς την περιοδικότητα: απεριοδική ή περιοδική; Τι είναι η αλυσίδα ως προς την επαναληπτικότητα: θετικά επαναληπτική, μηδενικά επαναληπτική ή παροδική;*

Άσκηση 3.9 *Δυο δοχεία A και B περιέχουν συνολικά N σφαιρίδια. Εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα τύχης: Σε κάθε βήμα ένα σφαιρίδιο από τα N επιλέγεται τυχαία και μετά τοποθετείται στο A ή στο B με πιθανότητες p και q αντίστοιχα. Έστω* X_n *ο αριθμός των σφαιριδίων στο δοχείο A μετά το n-οστό βήμα. Να βρεθούν τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου (δηλαδή των βημάτων) που το δοχείο A θα περιέχει i σφαιρίδια για* $i = 0,1,2,\dots,N$.

Άσκηση 3.10 *Θεωρήστε μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου* $\{X_n\}$ *με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{S}$ *και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης* $\mathbf{P} = (p_{ij})$ *και υποθέστε ότι κάθε επίσκεψη σε μια κατάσταση i επάγει κόστος* $c(i)$. *Ορίζουμε το μέσο αποπληθωρισμένο συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στις περιόδους* $0,1,\dots,N$, *αρχίζοντας από την κατάσταση i ως*

$$\phi_i^{(N)} = E\left[\sum_{n=0}^{N} \alpha^n c(X_n) | X_0 = i\right],$$

(όπου $\alpha \in (0,1)$ *ο αποπληθωριστής). Επίσης, ορίζουμε το μέσο κόστος ανά περίοδο στις περιόδους* $0,1,\dots,N$ *αρχίζοντας από την κατάσταση i ως*

$$g_i^{(N)} = \frac{1}{N+1} E\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n) | X_0 = i\right].$$

1. *Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των* $(\phi_i^{(N)} : i \in \mathscr{S})$, *ως προς N (δηλαδή χρειάζεται να διατυπωθούν κάποιες αρχικές συνθήκες που να δίνουν τα* $(\phi_i^{(0)} : i \in \mathscr{S})$ *και κατόπιν κάποια σχέση που να δίνει για κάθε* $i \in \mathscr{S}$ *το* $\phi_i^{(N)}$ *συναρτήσει των* $(\phi_j^{(N-1)} : j \in \mathscr{S})$).

2. *Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των* $(g_i^{(N)} : i \in \mathscr{S})$, *ως προς N.*

Άσκηση 3.11 *Θεωρούμε μια συνήθη άδεια* 8×8 *σκακιέρα, κι έναν Βασιλιά, ο οποίος αρχίζει να κινείται σε αυτήν τυχαία, επιλέγοντας σε κάθε βήμα του ένα από τα επιτρεπόμενα τετράγωνα ισοπίθανα.*

1. *Να βρεθεί ο μέσος αριθμός κινήσεων που θα χρειαστεί για να επιστρέψει στην κάτω δεξιά γωνία για πρώτη φορά, ξεκινώντας από αυτή.*

2. *Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα για έναν Ίππο και για έναν Αξιωματικό.*

3.6 Σχόλια

Τα εισαγωγικά βιβλία στοχαστικών διαδικασιών αναφέρονται στις Μαρκοβιανές αλυσίδες που είναι το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Για μια εκτενή εισαγωγή με πολλά παραδείγματα ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα εξαιρετικά συγγράμματα των Ross 1995, Kao 1997, Φακίνος 2007, Tijms 2008, Kulkarni 2010 και Grimmett και Stirzaker 2020.

Βιβλιογραφία

[1] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations, 3rd Edition*. Springer, 2006. ISBN: 978-0387230597.

[2] S. Ross. *Stochastic Processes, 2nd Edition*. Wiley, 1995. ISBN: 978-0471120629.

[3] E.P.C. Kao. *An Introduction to Stochastic Processes*. New York: Duxbury Press, 1997. ISBN: 978-0534255183.

[4] Δ. Φακίνος. *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2007. ISBN: 978-9602661956.

[5] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[6] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[7] G. Grimmett και D. Stirzaker. *Probability and Random Processes, 4th Edition*. Oxford, 2020. ISBN: 978-0198847595.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε κάποιες τυπικές εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας. Αρχικά, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα υπολογισμού μακροπρόθεσμου μέσου κόστους για μια πολιτική συντήρησης - αντικατάστασης ενός μηχανήματος που επιθεωρείται περιοδικά. Κατόπιν, μελετάται ένα σύστημα ελέγχου αποθεμάτων το οποίο επιθεωρείται περιοδικά και ελέγχεται μέσω μιας πολιτικής (s, S), δηλαδή, ο διαχειριστής του συστήματος αναπληρώνει το απόθεμα μέχρι ύψος S, αν διαπιστώσει ότι το απόθεμα στο τέλος μίας περιόδου είναι μικρότερο ή ίσο του s. Τα δυο αυτά προβλήματα μοντελοποιούνται μέσω Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου.

Η τελευταία εφαρμογή αφορά ένα μοντέλο για την εκκαθάριση αποθήκης, ειδική περίπτωση αυτού που θεωρήσαμε στην ενότητα 2.3. Το μοντέλο αναπαριστά μια αποθήκη στην οποία συσσωρεύονται αντικείμενα που δημιουργούνται μέσω μιας παραγωγικής διαδικασίας. Υπολογίζεται το μέσο κόστος λειτουργίας της αποθήκης και προσδιορίζεται η βέλτιστη πολιτική εκκαθάρισης. Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιείται μέσω μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου. Περισσότερες εφαρμογές με Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου θα δούμε αργότερα στα πλαίσια της Θεωρίας Ουρών Αναμονής.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3. Η επαφή με τη βασική θεωρία των ανανεωτικών διαδικασιών με κόστη, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 1, καθώς και η μελέτη των αντίστοιχων τυπικών εφαρμογών του κεφαλαίου 2, αν και όχι απαραίτητη, είναι επιθυμητή για την καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου του παρόντος κεφαλαίου.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

4.1 Συντήρηση - αντικατάσταση μηχανήματος

Θεωρούμε μια μηχανή που επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας και μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots$. Η κατάσταση 0 αντιστοιχεί σε άριστη λειτουργία της μηχανής, ενώ όσο πιο μεγάλη τιμή παίρνει η κατάσταση της μηχανής τόσο η μηχανή και χειροτερεύει. Μετά από κάθε επιθεώρηση, ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει τη μηχανή με καινούργια ή όχι. Αν η κατάσταση της μηχανής στην αρχή μιας ημέρας είναι i τότε το κόστος για τη λειτουργία της εκείνη την ημέρα θα είναι $b(i)$, όπου $b(i)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του i. Το κόστος αυτό συσσωρεύεται, όποια κι αν είναι η απόφαση σχετικά με την αντικατάσταση της μηχανής. Αν αποφασιστεί να αντικατασταθεί, τότε ένα επιπλέον κόστος r πρέπει να πληρωθεί και η κατάσταση της μηχανής την επόμενη μέρα είναι η 0. Αν η παρούσα κατάσταση της μηχανής είναι i και αποφασιστεί να μην αντικατασταθεί, τότε η κατάστασή της στην αρχή της επόμενης ημέρας θα είναι $j \geq i$, με πιθανότητα $g_i(j)$. Αν T_i είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει την κατάσταση της μηχανής την επόμενη ημέρα αν η τρέχουσα κατάστασή της είναι i, τότε η συνήθης υπόθεση είναι ότι T_i είναι στοχαστικά αύξουσα ως προς i, δηλαδή για κάθε i και i' με $i \leq i'$ και $f(j)$ αύξουσα συνάρτηση του j ισχύει $E[f(T_i)] \leq E[f(T_{i'})]$.

Ο διαχειριστής του συστήματος ακολουθεί μια πολιτική κατωφλίου για την αντικατάσταση της μηχανής. Αν η κατάστασή της βρεθεί μεγαλύτερη ή ίση της n, τότε επιλέγει να την αντικαταστήσει, αλλιώς συνεχίζει με αυτήν. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους υπό αυτήν την πολιτική.

Υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η κατάσταση της μηχανής στην αρχή κάθε ημέρας περιγράφεται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} g_i(j) & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j \geq i, \\ 1 & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος στις αρχές των διαδοχικών ημερών είναι αδιαχώριστη. Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\pi(n) = (\pi_j(n) : j \geq 0)$, είναι

$$\begin{aligned} \pi_0(n) &= g_0(0)\pi_0(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i(n), \\ \pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{j} g_i(j)\pi_i(n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i(j)\pi_i(n), \quad j \geq n. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης, παίρνουμε τη στάσιμη κατανομή. Η δομή κόστους παραμονής περιγράφεται από τη συνάρτηση $c(i) = b(i)$, $i \geq 0$, ενώ η δομή κόστους μετάβασης περιγράφεται από τη συνάρτηση $d(i, j)$ με $d(i, 0) = r$ για $i \geq n$ και $d(i, j) = 0$, διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.4. Είναι

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n)c(j) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \pi_j(n)p_{jk}d(j, k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n)b(j) + \sum_{j=n}^{\infty} r\pi_j(n). \end{aligned}$$

Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, ο τύπος για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά. Π.χ., ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το κόστος λειτουργίας ανά ημέρα έχει την εκθετική μορφή $b(i) = 1 - b^i$, όπου $b \in (0,1)$, και, αν η παρούσα κατάσταση της μηχανής είναι i και αποφασιστεί να μην αντικατασταθεί, τότε η κατάστασή της στην αρχή της επόμενης ημέρας θα είναι i, με πιθανότητα $1 - \alpha$, ή $i+1$, με πιθανότητα α, όπου $\alpha \in (0,1)$. Με άλλα λόγια, για τη συνάρτηση πιθανότητας $g_i(j))$ της T_i έχουμε $g_i(i) = 1 - \alpha$, $g_i(i+1) = \alpha$ και $g_i(j) = 0$, για $j \neq i, i+1$.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου της κατάστασης του συστήματος απορροφάται στο σύνολο $\{0,1,2,\ldots,n\}$, όπου είναι και αδιαχώριστη. Οι πιθανότητες μετάβασής της έχουν τη μορφή

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i, \\ \alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i+1, \\ 1 & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0. \end{cases}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\pi(n) = (\pi_j(n) : 0 \leq j \leq n)$, είναι

$$\begin{aligned} \pi_0(n) &= \pi_n(n) + (1-\alpha)\pi_0(n), \\ \pi_j(n) &= \alpha\pi_{j-1}(n) + (1-\alpha)\pi_j(n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \pi_n(n) &= \alpha\pi_{n-1}(n). \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \pi_j(n) &= \frac{1}{n+\alpha}, \quad 0 \leq j \leq n-1, \\ \pi_n(n) &= \frac{\alpha}{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Η δομή κόστους παραμονής περιγράφεται από τη συνάρτηση $c(i) = 1 - b^i$, $0 \leq i \leq n$, ενώ η δομή κόστους μετάβασης περιγράφεται από τη συνάρτηση $d(i,j)$ με $d(n,0) = r$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n, έχουμε

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+\alpha}(1-b^j) + \frac{\alpha}{n+\alpha}(1-b^n) + \frac{\alpha}{n+\alpha}r \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+n}(r-1) + 1 + \frac{1-b^n}{n+a}\left(\alpha - \frac{1}{1-b}\right). \end{aligned}$$

4.2 Σύστημα ελέγχου αποθεμάτων

Θεωρούμε μια αποθήκη που επιθεωρείται στο τέλος κάθε περιόδου λειτουργίας της. Σε κάθε περίοδο λειτουργίας της, έστω n, υπάρχει ζήτηση για D_n μονάδες προϊόντος. Οι D_n, $n \geq 1$, που δίνουν τη ζήτηση στις διαδοχικές περιόδους λειτουργίας της αποθήκης είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, μη-αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γνωστή συνάρτηση πιθανότητας $(p_D(i) : i \geq 0)$. Συμβολίζουμε με X_n το ύψος του αποθέματος της αποθήκης στο τέλος της n-οστής περιόδου, $n \geq 1$. Ο διαχειριστής της αποθήκης αναπληρώνει το απόθεμα μέχρι ύψος S άμεσα, αν διαπιστώσει ότι το απόθεμα στο τέλος μιας περιόδου είναι μικρότερο ή ίσο από s μονάδες. Η ζήτηση κάθε περιόδου ικανοποιείται από το υπάρχον απόθεμα στον βαθμό που αυτό είναι δυνατό. Η υπερβάλλουσα ζήτηση χάνεται, δηλαδή δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από μελλοντικές παραγγελίες. Επομένως, βλέπουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_n, $n \geq 1$ συνδέονται με την αναδρομική σχέση

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max(S - D_{n+1}, 0), & \text{αν } X_n \leq s, \\ \max(X_n - D_{n+1}, 0), & \text{αν } s < X_n \leq S, \end{cases}$$

από την οποία προκύπτει ότι η $\{X_n\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου. Υποθέτοντας ότι $p_D(i) > 0$ για $0 \leq i \leq S$, συμπεραίνουμε ότι είναι και αδιαχώριστη.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κόστος έλλειψης p για κάθε μονάδα ζήτησης που έμεινε ανικανοποίητη, κόστος αποθήκευσης h για κάθε μονάδα προϊόντος ανά χρονική μονάδα, κόστος αγοράς c ανά μονάδα προϊόντος και πάγιο κόστος K ανά παραγγελία. Αν το απόθεμα στο τέλος μιας περιόδου είναι i, τότε το μέσο κόστος για την επόμενη περίοδο θα είναι

$$c(i) = p(i) + h(i) + b(i) + d(i),$$

όπου τα $p(i), h(i), b(i), d(i)$ αντιστοιχούν στα μέσα κόστη έλλειψης, αποθήκευσης, αγοράς και παγίου κόστους παραγγελίας για την επόμενη περίοδο, δεδομένου ότι το απόθεμα στο τέλος της τρέχουσας περιόδου είναι i. Έχουμε

$$\begin{aligned}
p(i) &= \begin{cases} E[\max(D_n - S, 0)]p & \text{αν } i \leq s, \\ E[\max(D_n - i, 0)]p & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases} \\
h(i) &= \begin{cases} E[\max(S - D_n, 0)]h & \text{αν } i \leq s, \\ E[\max(i - D_n, 0)]h & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases} \\
b(i) &= \begin{cases} (S-i)c & \text{αν } i \leq s, \\ 0 & \text{αν } s < i \leq S, \end{cases} \\
d(i) &= \begin{cases} K & \text{αν } i \leq s, \\ 0 & \text{αν } s < i \leq S. \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν $(\pi_j(s, S) : 0 \leq j \leq S)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$ (που βρίσκεται λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας, αλλά δεν έχει κλειστή μορφή), τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.4 παίρνουμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους ανά χρονική μονάδα, $g(s, S)$, που είναι

$$\begin{aligned}
g(s, S) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(s, S)c(j) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \pi_j(s, S)(E[\max(D_n - S, 0)]p + E[\max(S - D_n, 0)]h + (S - j)c + K) \\
&\quad + \sum_{j=s+1}^{S} \pi_j(s, S)(E[\max(D_n - j, 0)]p + E[\max(j - D_n, 0)]h).
\end{aligned}$$

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων είναι ο προσδιορισμός ή έστω η προσέγγιση, βέλτιστων s και S που να ελαχιστοποιούν το $g(s, S)$.

4.3 Εκκαθάριση αποθήκης

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση της εφαρμογής που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.3, όπου σε μια αποθήκη φθάνουν προϊόντα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ), και μόλις συγκεντρωθούν m από αυτά η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία και η παρτίδα με τα m προϊόντα διανέμεται σε λιανοπωλητές. Υπάρχει εφάπαξ κόστος K ανά εκκαθάριση της αποθήκης, ανεξάρτητο του αριθμού των προϊόντων που θα εκκαθαριστούν. Επίσης, υπάρχει κόστος k ανά εκκαθάριση προϊόντος και κόστος h ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη. Μας ενδιαφέρουν ο υπολογισμός του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους λειτουργίας της αποθήκης και η τιμή του m που τον ελαχιστοποιεί.

Έστω $\{X(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των προϊόντων που βρίσκονται στην αποθήκη κάθε χρονική στιγμή t. Τότε, ο χώρος καταστάσεων της $\{X(t)\}$ είναι το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ (διότι, αν κάποια στιγμή υπάρχουν στην αποθήκη $m-1$ αντικείμενα, η αποθήκη θα εκκαθαριστεί μόλις έρθει το επόμενο αντικείμενο). Ο χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση είναι $\text{Exp}(\lambda)$, αφού ισούται με τον χρόνο μέχρι την άφιξη του επόμενου προϊόντος. Επομένως, η $\{X(t)\}$ είναι αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με μη-μηδενικούς ρυθμούς μετάβασης

$$\begin{aligned} q_{i,i+1}(m) &= \lambda, \quad 0 \le i \le m-2, \\ q_{m-1,0}(m) &= \lambda. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της, $\mathbf{p} = (p_j : 0 \le j \le m-1)$, είναι

$$\begin{aligned} \lambda p_0(m) &= \lambda p_{m-1}(m), \\ \lambda p_j(m) &= \lambda p_{j-1}(m), \quad 1 \le j \le m-1, \end{aligned}$$

οπότε η στάσιμη κατανομή είναι ομοιόμορφη στο $\{0, 1, \dots, m-1\}$, με $p_j(m) = \frac{1}{m}$, $0 \le j \le m-1$. Η δομή του κόστους παραμονής δίνεται από τη συνάρτηση $c(i) = hi$, $0 \le i \le m-1$, ενώ η δομή του κόστους μετάβασης από τη συνάρτηση $d(i,j)$ με $d(m-1,0) = K + mk$ και $d(i,j) = 0$ διαφορετικά. Επομένως, για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου μέσου ρυθμού κόστους, $g(m)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.9. Είναι

$$\begin{aligned} g(m) &= \sum_{j\in\mathscr{S}} p_j(m)c(j) + \sum_{j\in\mathscr{S}} \sum_{k\neq j} p_j(m)q_{jk}(m)d(j,k) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} hj + \frac{1}{m}\lambda(K+km) \\ &= \frac{\lambda K}{m} + \lambda k + \frac{h(m-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός ταυτίζεται με αυτόν που έχουμε βρει νωρίτερα για το γενικότερο πρόβλημα, όπου τα προϊόντα φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία (βλέπε την εξίσωση (2.1)), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

4.4 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1 *Μια μηχανή παράγει 2 προϊόντα κάθε μέρα. Καθένα από αυτά είναι μη-ελαττωματικό με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από οποιοδήποτε άλλο προϊόν. Τα ελαττωματικά προϊόντα απορρίπτονται άμεσα, ενώ τα μη-ελαττωματικά προϊόντα αποθηκεύονται για την ικανοποίηση της ζήτησης που είναι σταθερή και ίση με 1 προϊόν κάθε μέρα. Η ζήτηση ικανοποιείται αμέσως μετά την παραγωγή των προϊόντων κάθε μέρας και όποτε δεν μπορεί να ικανοποιηθεί χάνεται οριστικά. Έστω X_n ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στην αποθήκη στην αρχή της μέρας n (πριν αρχίσουν η παραγωγή και η ικανοποίηση της ζήτησης).*

1. *Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της $\{X_n\}$.*

2. *Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\{X_n\}$ θετικά επαναληπτική.*

3. *Έστω ότι κοστίζει c χρηματικές μονάδες η αποθήκευση ενός προϊόντος ανά μέρα και d χρηματικές μονάδες η απώλεια μιας μονάδας ζήτησης. Να υπολογίσετε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά ημέρα λειτουργίας της μηχανής.*

Άσκηση 4.2 *Ένας πωλητής κινείται σε ένα δίκτυο $N+1$ πόλεων $0, 1, 2, \dots, N$. Δοθέντος ότι βρίσκεται στην πόλη i, η πόλη που θα επισκεφθεί την επόμενη μέρα είναι η j με πιθανότητα*

$$p_{ij} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{αν } j \ge i, \\ a_{N+1+j-i} & \text{αν } j < i, \end{cases}$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_N > 0$ και $a_0 + a_1 + \cdots + a_N = 1$. Η πόλη 0 είναι η βάση του πωλητή και το κόστος παραμονής του εκεί για μία ημέρα είναι c_0, ενώ σε όλες τις άλλες πόλεις είναι $c > c_0$. Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος παραμονής ανά ημέρα του πωλητή.

Άσκηση 4.3 *Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής. Η διαδικασία αφίξεων των πελατών είναι Poisson(λ) και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι Exp(μ), ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Έστω $X(t)$ ο αριθμός πελατών τη στιγμή t.*

1. *Αποδείξτε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.*

2. *Δώστε μια συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της αλυσίδας και υπολογίστε την οριακή κατανομή της, όταν η συνθήκη αυτή ισχύει.*

3. *Βρείτε το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος εξυπηρέτησης, αν κάθε πελάτης πληρώνει εισιτήριο R κατά την είσοδό του στο σύστημα και επιφέρει κόστος C ανά χρονική μονάδα παραμονής του.*

Άσκηση 4.4 *Θεωρούμε ότι δυο κλάσεις πελατών φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής. Οι πελάτες της κλάσης i φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ_i), $i = 1, 2$. Οι δυο διαδικασίες Poisson θεωρούνται ανεξάρτητες. Οι πελάτες της κλάσης 1 επιτρέπεται πάντα να εισέρχονται στο σύστημα, ενώ οι πελάτες της κλάσης 2 εισέρχονται μόνο εφόσον ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα (μόλις πριν την άφιξη ενός πελάτη τύπου 2) είναι μικρότερος του K, όπου $K > 0$ είναι σταθερός δοσμένος ακέραιος. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι ανεξάρτητοι Exp(μ) και για τις δυο κλάσεις. Έστω $X(t)$ ο συνολικός αριθμός πελατών τη στιγμή t.*

1. *Αποδείξτε ότι η $\{X(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.*

2. *Δώστε μια συνθήκη για τη θετική επαναληπτικότητα της αλυσίδας και υπολογίστε την οριακή κατανομή της, όταν η συνθήκη αυτή ισχύει.*

3. *Βρείτε το μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος εξυπηρέτησης, αν κάθε πελάτης κλάσης i πληρώνει εισιτήριο R_i κατά την είσοδό του στο σύστημα.*

Άσκηση 4.5 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που λειτουργεί ως εξής: Υπάρχει ένας υπηρέτης ο οποίος εναλλάσσεται μεταξύ δυο καταστάσεων, λειτουργίας (1) και αργίας (0). Οι διάρκειες των διαδοχικών περιόδων λειτουργίας και αργίας του υπηρέτη είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν τις κατανομές Exp(ξ) και Exp(η), αντίστοιχα. Όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας, τότε οι πελάτες φθάνουν συμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ) και εξυπηρετούνται ένας - ένας με ανεξάρτητους Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης. Όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε κατάσταση αργίας, σταματούν τόσο οι αφίξεις όσο και οι εξυπηρετήσεις.*

1. *Δικαιολογήστε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{(I(t), N(t)) : t \geq 0\}$, όπου $I(t)$ είναι η κατάσταση του υπηρέτη (1: ενεργός, 0: ανενεργός) και $N(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε τους ρυθμούς μετάβασής της.*

2. *Βρείτε αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η στοχαστική διαδικασία να είναι θετικά επαναληπτική και βρείτε στην περίπτωση αυτή τη στάσιμη κατανομή της.*

3. *Να βρεθεί ο δεσμευμένος μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη δεδομένου ότι βρήκε n πελάτες στο σύστημα (χωρίς να υπολογίζουμε τον ίδιο).*

4. *Αν υπάρχει κέρδος r ανά εισερχόμενο πελάτη και κόστος αναμονής h ανά πελάτη και χρονική μονάδα, να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα.*

4.5 Σχόλια

Τα εισαγωγικά βιβλία στοχαστικών διαδικασιών περιέχουν αρκετά παραδείγματα Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη, ειδικά από την περιοχή της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας. Για παράδειγμα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να δει πληθώρα εφαρμογών στα συγγράμματα των Ross 1995, Kao 1997, Φακίνος 2007, Tijms 2008, Kulkarni 2010 και Grimmett και Stirzaker 2020.

Ακόμη περισσότερα παραδείγματα υπάρχουν σε εισαγωγικά βιβλία στη Θεωρία Ουρών Αναμονής, όπως, π.χ., στα Adan και Resing 2001, Kleinrock 1975, Wolff 1989, και Shortle, Thompson, Gross και Harris 2018, ή στα νεότερα συγγράμματα των Haviv 2013 και Harchol-Balter 2013.

Βιβλιογραφία

[1] S. Ross. *Stochastic Processes, 2nd Edition*. Wiley, 1995. ISBN: 978-0471120629.

[2] E.P.C. Kao. *An Introduction to Stochastic Processes*. New York: Duxbury Press, 1997. ISBN: 978-0534255183.

[3] Δ. Φακίνος. *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2007. ISBN: 978-9602661956.

[4] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[5] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[6] G. Grimmett και D. Stirzaker. *Probability and Random Processes, 4th Edition*. Oxford, 2020. ISBN: 978-0198847595.

[7] I. Adan και J. Resing. *Queueing Theory*. Eindhoven: Notes available online, 2001.

[8] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley, 1975. ISBN: 978-0471491101.

[9] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[10] J.F. Shortle, J.M. Thompson, D. Gross και C.M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory, 5th Edition*. Wiley, 2018. ISBN: 978-1118943526.

[11] M. Haviv. *Queues: A Course in Queueing Theory*. Springer, 2013. ISBN: 978-1461467649.

[12] M. Harchol-Balter. *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge, 2013. ISBN: 978-1107027503.

Μέρος II

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε το πλαίσιο ακολουθιακής λήψης αποφάσεων που οδηγεί στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων και στην τεχνική του Δυναμικού Προγραμματισμού. Καταρχάς παρουσιάζεται η ιδέα του Δυναμικού Προγραμματισμού σε προβλήματα που δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα και διατυπώνεται η αρχή του Bellman που επιτρέπει την αναδρομική επίλυση προβλημάτων ακολουθιακής λήψης αποφάσεων. Στη συνέχεια, δείχνουμε πώς οι ιδέες αυτές επεκτείνονται σε στοχαστικό περιβάλλον και παρουσιάζουμε το πλαίσιο των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων σε πεπερασμένο (χρονικό) ορίζοντα και τις έννοιες της πολιτικής, της αξίας πολιτικής και της συνάρτησης βέλτιστης τιμής.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου εφαρμόζουμε τη βασική θεωρία στην επίλυση κλασικών προβλημάτων ακολουθιακής λήψης αποφάσεων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε εφαρμογές με επαγωγικά επιχειρήματα σε ένα μοντέλο κατανάλωσης-επένδυσης, στο πρόβλημα κατανομής πόρων, σε ένα μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής και σε ένα πρόβλημα συντήρησης-αντικατάστασης μηχανήματος. Στην περίπτωση που το πρόβλημα της ακολουθιακής λήψης αποφάσεων δεν είναι το ποιες αποφάσεις θα πάρουμε, αλλά το με ποια σειρά θα πάρουμε συγκεκριμένο σύνολο αποφάσεων, ένα συμφέρον εργαλείο επίλυσης είναι το λεγόμενο επιχείρημα της ανταλλαγής. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με κάποιες εφαρμογές αυτού του εργαλείου επίλυσης σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου παραμονής κάποιων εργασιών προς διεκπεραίωση και σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης απόδοσης μιας μηχανής μέχρι να υποστεί βλάβη.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη, όπως αυτή περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

5.1 Εισαγωγή

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας για την ανάλυση προβλημάτων λήψης αποφάσεων σε ακολουθιακή μορφή. Έχει εφαρμογές σε προβλήματα όπου ένα σύστημα εξελίσσεται δυναμικά στον χρόνο και η εξέλιξή του προσδιορίζεται εξ ολοκλήρου ή εν μέρει από τις δράσεις ενός διαχειριστή ή αποφασίζοντα. Οι αποφάσεις του διαχειριστή δεν λαμβάνονται όλες μαζί εξαρχής, αλλά διαδοχικά. Σε κάθε περίοδο ή στάδιο του προβλήματος ο διαχειριστής παρατηρεί την κατάσταση του συστήματος που ελέγχει και παίρνει μια απόφαση. Κάθε απόφαση του διαχειριστή έχει γενικά δύο ειδών συνέπειες: πρώτον επιφέρει ένα άμεσο κέρδος ή κόστος στο τρέχον στάδιο και δεύτερον καθορίζει σε κάποιον βαθμό την περαιτέρω εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος. Ο σκοπός του διαχειριστή είναι να επιλέξει τις αποφάσεις του με τέτοιον τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο συνολικό του όφελος κατά τη διάρκεια του ορίζοντα ελέγχου.

Το παραπάνω μοντέλο έχει την ευελιξία να ενσωματώσει δύο βασικά χαρακτηριστικά των ακολουθιακών διαδικασιών αποφάσεων και ελέγχου. Το πρώτο είναι η αλληλεξάρτηση καταστάσεων και αποφάσεων. Συγκεκριμένα σε κάθε στάδιο της διαδικασίας η εξέλιξη του συστήματος επηρεάζεται από την απόφαση του διαχειριστή. Στο επόμενο στάδιο όμως ο διαχειριστής παίρνει υπόψη του τη νέα κατάσταση του συστήματος και με βάση αυτή προσαρμόζει την επόμενη απόφασή του. Αυτή η αμφίδρομη σχέση μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων του συστήματος και αποφάσεων του διαχειριστή ονομάζεται ιδιότητα κλειστού βρόχου και επιτρέπει την ανάλυση αυτών των προβλημάτων με τη χρήση αναδρομικών μεθόδων.

Το δεύτερο χαρακτηριστικό των ακολουθιακών διαδικασιών αποφάσεων είναι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις άμεσες και μακροπρόθεσμες συνέπειες των αποφάσεων του διαχειριστή. Όταν ο διαχειριστής καλείται να πάρει μια απόφαση σε ένα στάδιο της διαδικασίας, πρέπει να λάβει υπόψη του αφενός την άμεση απόδοση της απόφασής του σχετικά με το κέρδος ή κόστος που επιφέρει στο τρέχον στάδιο και αφετέρου τη συνέπεια που θα έχει η απόφαση στη μετακίνηση του συστήματος σε μια νέα κατάσταση, η οποία με τη σειρά της θα επηρεάσει τις αποφάσεις και τα κέρδη από αυτό το σημείο και πέρα. Αποφάσεις που εστιάζουν στη μεγιστοποίηση του άμεσου κέρδους μπορεί να οδηγούν το σύστημα σε πολύ μειονεκτική θέση ως προς τα μελλοντικά κέρδη, ενώ αντίθετα αποφάσεις που θυσιάζουν μέρος ή όλο το κέρδος της τρέχουσας περιόδου μπορεί να είναι πολύ καλύτερες ως προς τις μακροπρόθεσμες συνέπειές τους.

Η δομή του κλειστού βρόχου και ο διαχωρισμός ανάμεσα σε άμεσες και μακροπρόθεσμες επιπτώσεις των αποφάσεων του διαχειριστή επιτρέπουν τη μοντελοποίηση και ανάλυση των προβλημάτων ακολουθιακών αποφάσεων μέσω αναδρομικών μεθόδων και αλγορίθμων. Η αρχή βελτιστότητας του Δυναμικού Προγραμματισμού (αρχή του Bellman) εκφράζει αυτήν την αναδρομική ιδιότητα του προβλήματος.

Στο πλαίσιο αυτό ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακολουθιακές διαδικασίες αποφάσεων στις οποίες υπεισέρχεται και η αβεβαιότητα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι συνέπειες των αποφάσεων που παίρνει ο διαχειριστής του συστήματος δεν μπορούν να προβλεφθούν με ακρίβεια, τόσο σχετικά με τα άμεσα κέρδη ή κόστη, όσο και σχετικά με τη δυναμική του συστήματος. Γενικά το άμεσο κέρδος ή κόστος μιας περιόδου, όπως επίσης και η κατάσταση του συστήματος στην επόμενη περίοδο μπορεί να είναι τυχαίες μεταβλητές, των οποίων οι κατανομές εξαρτώνται από την απόφαση του διαχειριστή, αλλά οι πραγματικές τους τιμές δεν είναι γνωστές όταν λαμβάνεται η απόφαση κατά την τρέχουσα περίοδο.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να εξετάσει κανείς μια ακολουθιακή διαδικασία αποφάσεων στην οποία υπεισέρχεται αβεβαιότητα είναι να θεωρήσει μια Μαρκοβιανή Διαδικασία με αμοιβές όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και να υποθέσει ότι υπάρχει ένας διαχειριστής/ελεγκτής που σε κάθε περίοδο παρατηρεί την κατάσταση της διαδικασίας και παίρνει μια απόφαση από ένα σύνολο διαθέσιμων αποφάσεων σε αυτήν την κατάσταση. Η αμοιβή ενός βήματος και οι πιθανότητες μετάβασης στην επόμενη κατάσταση εξαρτώνται από την παρούσα κατάσταση και από την απόφαση που λαμβάνεται. Ένα μαθηματικό μοντέλο αυτού του τύπου ονομάζεται Ελεγχόμενη Μαρκοβιανή Διαδικασία ή Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων (ΜΔΑ).

5.2 Επισκόπηση Ντετερμινιστικού Δυναμικού Προγραμματισμού – Αρχή του Bellman – Αναδρομή

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του γενικού μοντέλου μιας Μαρκοβιανής Διαδικασίας Αποφάσεων, θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση στην οποία το σύστημα εξελίσσεται με ντετερμινιστικό τρόπο, δηλαδή χωρίς να υπάρχει αβεβαιότητα. Σε αυτήν την περίπτωση η μετάβαση του συστήματος στην επόμενη κατάσταση προσδιορίζεται πλήρως από την παρούσα κατάσταση και την απόφαση του διαχειριστή. Η ντετερμινιστική υπόθεση επιτρέπει την εισαγωγή των δύο κεντρικών εννοιών του Δυναμικού Προγραμματισμού, δηλαδή της αρχής βελτιστότητας και της αναδρομικής ιδιότητας, με ευκολότερο τρόπο. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το παρακάτω μοντέλο Δυναμικού Προγραμματισμού Πεπερασμένου Ορίζοντα.

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου, το οποίο παρατηρούμε σε διαδοχικές χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, \ldots$ που ονομάζουμε περιόδους ή στάδια. Σε κάθε περίοδο t το σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση x_t. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του συστήματος (χώρος καταστάσεων) συμβολίζεται με $\mathscr{X}$. Για κάθε δυνατή κατάσταση $x \in \mathscr{X}$ υπάρχει ένα σύνολο $\mathscr{A}(x_n)$ δυνατών αποφάσεων στην κατάσταση x_n. Έστω $\mathscr{A} = \cup_{x\in\mathscr{X}} \mathscr{A}(x)$ το σύνολο όλων των δυνατών αποφάσεων για όλες τις καταστάσεις. Υποθέτουμε ότι ο χώρος καταστάσεων $\mathscr{X}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, ενώ τα σύνολα αποφάσεων είναι πεπερασμένα.

Σε κάθε περίοδο t ο διαχειριστής του συστήματος παρατηρεί την κατάσταση και παίρνει μια απόφαση ή δράση a_t, από το σύνολο $\mathscr{A}(x_t)$. Αν στην κατάσταση $x_t = x$ ληφθεί η απόφαση $a_t = a$, τότε ο διαχειριστής έχει ένα κόστος $c(x, a)$ για την τρέχουσα περίοδο t. Επίσης η επόμενη κατάσταση του συστήματος x_{t+1} προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το ζεύγος (x, a), δηλαδή $x_{t+1} = g(x, a)$. Οι συναρτήσεις c, g ονομάζονται συνάρτηση κόστους και δυναμική του συστήματος, αντίστοιχα και ορίζονται ως $c : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathscr{F} \to \mathscr{X}$, όπου $\mathscr{F}$ είναι το σύνολο των δυνατών ζευγών καταστάσεων-αποφάσεων, δηλαδή $\mathscr{F} = \{(x, a) \in \mathscr{X} \times \mathscr{A} : a \in \mathscr{A}(x)\}$.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα στην περίοδο 0 βρίσκεται σε μια δοσμένη αρχική κατάσταση x_0 και θα λειτουργήσει σε έναν πεπερασμένο ορίζοντα N περιόδων, δηλαδή για $t = 0, 1, \ldots, N-1$. Η τελευταία απόφαση είναι η a_{N-1} και μετά από αυτή το σύστημα θα μεταβεί στην τελική κατάσταση x_N. Στην τελική κατάσταση ο διαχειριστής θα πληρώσει ένα κόστος $\tilde{c}(x_N)$ και το πρόβλημα θα τελειώσει. Η συνάρτηση $\tilde{c} : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση τελικού ή τερματικού κόστους.

Στο παραπάνω μοντέλο, ο διαχειριστής με τις αποφάσεις που παίρνει αφενός πληρώνει ένα κόστος σε κάθε περίοδο και αφετέρου ελέγχει την εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο μέσω της συνάρτησης δυναμικής. Σκοπός του είναι να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος στο διάστημα των N περιόδων.

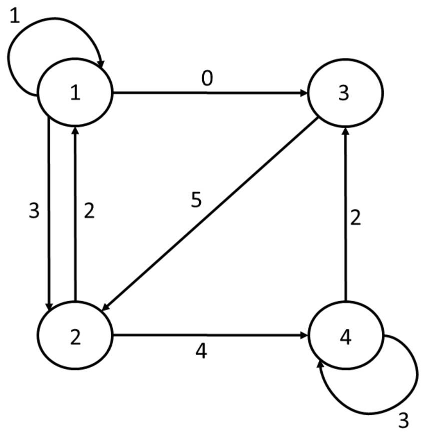
Με βάση τα παραπάνω, ένα μοντέλο Δυναμικού Προγραμματισμού Πεπερασμένου Ορίζοντα ορίζεται από την επτάδα $(\mathscr{X}, \mathscr{A}(x) : x \in \mathscr{X}, c, g, \tilde{c}, N, x_0)$.

Παράδειγμα 5.1 *Ένα όχημα κινείται πάνω στο οδικό δίκτυο του Σχήματος 5.1. Οι κόμβοι του δικτύου αντιστοιχούν σε πόλεις, ενώ οι ακμές σε απευθείας οδικές συνδέσεις μεταξύ των πόλεων. Το όχημα σε κάθε περίοδο επιλέγει μία από τις ακμές που έχουν αφετηρία τον κόμβο στην οποία βρίσκεται και μετακινείται πάνω σε αυτή. Η κίνηση πάνω σε κάθε ακμή διαρκεί μία περίοδο. Σε κάθε ακμή αναγράφονται ο αριθμός της και το κόστος που έχει το όχημα όταν κινηθεί σε αυτή. Έστω ότι το όχημα την περίοδο 0 βρίσκεται στον κόμβο 1 και πρόκειται να κινηθεί για 4 περιόδους. Ζητείται να βρεθεί ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει για να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος.*

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα Δυναμικού Προγραμματισμού Πεπερασμένου Ορίζοντα ως εξής: Οι κόμβοι του δικτύου αντιστοιχούν στις δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το όχημα στην αρχή κάθε περιόδου. Επομένως ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο $\mathscr{X} = \{1, 2, 3, 4\}$. *Όσον αφορά τις αποφάσεις, σε κάθε περίοδο το όχημα επιλέγει μία από τις ακμές που έχουν αφετηρία τον κόμβο που βρίσκεται. Επειδή κάθε ακμή οδηγεί σε έναν και μόνο έναν κόμβο, μπορούμε να ταυτίσουμε την απόφαση με τον κόμβο στον οποίο οδηγεί η αντίστοιχη ακμή. Κάτω από αυτήν την προσέγγιση, τα σύνολα αποφάσεων είναι* $\mathscr{A}(1) = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{A}(2) = \{1, 4\}$, $\mathscr{A}(3) = \{2\}$, $\mathscr{A}(4) = \{3, 4\}$ *και* $\mathscr{A} = \{1, 2, 3, 4\}$. *Το σύνολο των δυνατών ζευγών κατάστασης-απόφασης είναι* $\mathscr{F} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. *Οι συναρτήσεις κόστους μίας περιόδου και δυναμικής του συστήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Προφανώς ισχύει* $g(x, a) = a$, *για* $(x, a) \in F$.

(x,a)	$c(x,a)$	$g(x,a)$
(1,1)	*1*	*1*
(1,2)	*3*	*2*
(1,3)	*0*	*3*
(2,1)	*2*	*1*
(2,4)	*4*	*4*
(3,2)	*5*	*2*
(4,3)	*2*	*3*
(4,4)	*3*	*4*

Η συνάρτηση τερματικού κόστους είναι $\tilde{c}(x) = 0, x \in S$*, το μέγεθος του ορίζοντα είναι* $N = 4$*, ενώ η αρχική κατάσταση* $x_0 = 1$.



Σχήμα 5.1: Δίκτυο Παραδείγματος 5.1.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού που ορίσαμε παραπάνω είναι ιδιαίτερα ευρύ, αλλά ταυτόχρονα εμπεριέχει κάποιους περιορισμούς - υποθέσεις που το καθιστούν επιλύσιμο. Οι υποθέσεις αυτές είναι οι εξής:

Υπόθεση 1: (Μαρκοβιανή δυναμική) Σε κάθε περίοδο t η επόμενη κατάσταση του συστήματος εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση και την απόφαση που λαμβάνεται κατά την τρέχουσα περίοδο και όχι από προηγούμενες καταστάσεις και αποφάσεις.

Υπόθεση 2: (Μαρκοβιανή δομή κόστους) Το κόστος που επάγεται στην περίοδο t εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση και την απόφαση που λαμβάνεται και όχι από προηγούμενες καταστάσεις και αποφάσεις.

Υπόθεση 3: (Χρονική Ομογένεια) Η συνάρτηση αμοιβής και η δυναμική δεν εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Συγκεκριμένα, αν σε οποιαδήποτε περίοδο t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x και ληφθεί η απόφαση a, τότε το κόστος μιας περιόδου και η επόμενη κατάσταση είναι πάντα ίσες με $c(x,a)$ και $g(x,a)$, αντίστοιχα, ανεξάρτητα από το t.

Υπόθεση 4: (Προσθετική συνάρτηση κόστους) Το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται είναι το άθροισμα από τα επιμέρους κόστη των διαφόρων σταδίων.

Υπόθεση 5: (Τέλεια παρατηρησιμότητα) Ο ελεγκτής του συστήματος που λαμβάνει τις αποφάσεις στα διάφορα στάδια, έχει σε κάθε στάδιο τέλεια γνώση της τρέχουσας κατάστασης.

Το μοντέλο Δυναμικού Προγραμματισμού είναι δυνατό να γενικευθεί έτσι ώστε να καλύπτει και περιπτώσεις όπου κάποιες από τις παραπάνω υποθέσεις δεν ικανοποιούνται, όμως κατά κανόνα αυτά τα γενικότερα μοντέλα είναι υπολογιστικά πολύ δυσκολότερο να επιλυθούν. Για παράδειγμα, αν δεν ισχύουν οι Υποθέσεις 1 και 2, δηλαδή είτε το κόστος ενός βήματος είτε η επόμενη κατάσταση ή και τα δύο εξαρτώνται όχι μόνο από την παρούσα κατάσταση και απόφαση αλλά από έναν αριθμό προηγούμενων καταστάσεων και αποφάσεων, τότε η κατάσταση του συστήματος σε κάθε περίοδο μπορεί να οριστεί πιο γενικά ως το αντίστοιχο διάνυσμα προηγούμενων καταστάσεων και αποφάσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της διάστασης του χώρου καταστάσεων, κάτι που όπως θα φανεί από τον αλγόριθμο επίλυσης αυξάνει σημαντικά την υπολογιστική δυσκολία του προβλήματος. Αν δεν ικανοποιείται η Υπόθεση 3, με αντίστοιχο τρόπο το μοντέλο μπορεί να γενικευθεί ενσωματώνοντας την τρέχουσα περίοδο στην κατάσταση του συστήματος. Όσον αφορά την Υπόθεση 4, εκτός από το άθροισμα, η αναδρομική μέθοδος του Δυναμικού Προγραμματισμού μπορεί να αντιμετωπίσει και άλλες συναρτήσεις κέρδους που έχουν αναδρομική έκφραση (όπως, π.χ., το γινόμενο των κερδών, το μέγιστο ή ελάχιστο κέρδος ανάμεσα στις περιόδους του ορίζοντα κλπ.). Τέλος, αν η κατάσταση του συστήματος δεν είναι πλήρως γνωστή, υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι μοντελοποίησης που θεωρούν την κατάσταση τυχαία μεταβλητή και ορίζουν ως νέα κατάσταση του συστήματος μια κατανομή πιθανότητας πάνω στην άγνωστη πραγματική κατάσταση. Στο πλαίσιο του παρόντος συγγράμματος δεν θα εξετάσουμε γενικά μοντέλα όπως τα παραπάνω, αλλά θα θεωρήσουμε ότι ικανοποιούνται οι Υποθέσεις 1-5 (με κατάλληλες γενικεύσεις όσον αφορά την ύπαρξη αβεβαιότητας που θα δούμε στα επόμενα).

Το πρόβλημα Δυναμικού Προγραμματισμού Πεπερασμένου Ορίζοντα μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης ως εξής:

$$V_0^N(x_0) = \min_{a_0, x_1, a_1, \dots, a_{N-1}, x_N} \quad \begin{aligned} &\textstyle\sum_{t=0}^{N-1} c(x_t, a_t) + \tilde{c}(x_N) \\ &x_{t+1} = g(x_t, a_t), t = 0, \dots, N-1 \\ &a_t \in \mathscr{A}(x_t), t = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Η ποσότητα $V_0^N(x_0)$ δηλώνει το ελάχιστο συνολικό κόστος που μπορεί να επιτευχθεί κατά τις περιόδους $0, \dots, N$, αν στην περίοδο 0 το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x_0. Οι ουσιαστικές μεταβλητές του προβλήματος (5.1) είναι οι $a_0, \dots, a_{N-1}$, δηλαδή οι αποφάσεις του διαχειριστή σε κάθε περίοδο. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις $x_1, \dots, x_N$ ουσιαστικά είναι βοηθητικές μεταβλητές που προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τις αποφάσεις.

Μια τροχιά h_0^N ορίζεται ως μια πεπερασμένη ακολουθία διαδοχικών καταστάσεων και αποφάσεων:

$$h_0^N = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_{N-1}, a_{N-1}, x_N).$$

Επομένως το πρόβλημα (5.1) αντιστοιχεί στην εύρεση μιας βέλτιστης τροχιάς h_0^N με αρχική κατάσταση x_0 που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος σε ορίζοντα μεγέθους N. Επειδή θα ληφθεί πεπερασμένος αριθμός αποφάσεων και σε κάθε κατάσταση ο αριθμός των δυνατών αποφάσεων είναι πεπερασμένος, ο συνολικός αριθμός τροχιών είναι επίσης πεπερασμένος, συνεπώς το πρόβλημα έχει πάντα βέλτιστη λύση.

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται μια απλή αλλά θεμελιώδης ιδιότητα της βέλτιστης τροχιάς που επιτρέπει την επίλυση ενός προβλήματος Δυναμικού Προγραμματισμού με αναδρομική διαδικασία. Η απόδειξη γίνεται εύκολα μέσω απαγωγής σε άτοπο και αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα 5.1 *Αρχή Βελτιστότητας του Bellman. Έστω $h_0^N = (x_0, a_0, \dots, x_N)$ μια βέλτιστη τροχιά για το πρόβλημα $V_0^N(x_0)$ και $h_t^N = (x_t, a_t, \dots, x_N)$ το τμήμα της h_0^N μεταξύ των περιόδων t και N. Τότε η τροχιά h_t^N ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος των περιόδων $t, t+1, \dots, N$.*

Η βασική ιδέα του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι αν ο διαχειριστής έχει πάρει οποιεσδήποτε αποφάσεις που οδήγησαν το σύστημα στην κατάσταση x_t στην αρχή της περιόδου t, τότε για να είναι η συνολική τροχιά των N περιόδων βέλτιστη, πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει μια βέλτιστη τροχιά από αυτήν την κατάσταση μέχρι το τέλος του ορίζοντα.

Το Θεώρημα 5.1 υποδεικνύει ότι το πρόβλημα του Δυναμικού Προγραμματισμού μπορεί να λυθεί αναδρομικά. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής ως εξής:

$$V_t^N(x_t) = \min_{a_t, x_{t+1}, a_{t+1}, \dots, a_{N-1}, x_N} \begin{array}{l} \sum_{s=t}^{N-1} c(x_s, a_s) + \tilde{c}(x_N) \\ x_{s+1} = g(x_s, a_s), s = t, \dots, N-1 \\ a_s \in \mathscr{A}(x_s), s = t, \dots, N-1. \end{array} \tag{5.2}$$

Η ποσότητα $V_t^N(x_t)$ δηλώνει το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος για τις περιόδους $t, t+1, \dots, N$, αν στην αρχή της περιόδου t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x_t. Λόγω της Μαρκοβιανής δυναμικής και δομής κόστους η V_t^N εξαρτάται μόνο από την κατάσταση x_t και όχι από την προηγούμενη ιστορία καταστάσεων και αποφάσεων.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $V_t^N(x_t)$. Αν κατά την περίοδο t ο διαχειριστής πάρει μια απόφαση a_t και το σύστημα μεταβεί στην κατάσταση $x_{t+1} = g(x_t, a_t)$, τότε θα έχει κόστος $c(x_t, a_t)$ για την τρέχουσα περίοδο, ενώ από το Θεώρημα 5.1 γνωρίζει ότι το ελάχιστο κόστος που μπορεί να εξασφαλίσει από την περίοδο $t+1$ μέχρι το τέλος του ορίζοντα είναι ίσο με $V_{t+1}^N(g(x_t, a_t))$. Επομένως το ελάχιστο κόστος του αν πάρει την απόφαση a_t θα είναι ίσο με $c(x_t, a_t) + V_{t+1}^N(g(x_t, a_t)$ και για να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος των περιόδων $t, \dots, N$ θα πρέπει να ελαχιστοποιήσει αυτήν την ποσότητα. Συνεπώς ισχύει ότι

$$V_t^N(x_t) = \min_{a_t \in \mathscr{A}(x_t)} \left(c(x_t, a_t) + V_{t+1}^N(g(x_t, a_t)) \right), t = 0, \dots, N-1,\ x_t \in \mathscr{X}. \tag{5.3}$$

Επίσης, επειδή στην τελική περίοδο N λαμβάνεται μόνο η τελική αμοιβή, παίρνουμε:

$$V_N^N(x_N) = \tilde{c}(x_N),\ x_N \in \mathscr{X}. \tag{5.4}$$

Οι σχέσεις (5.3) περιγράφουν μια αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η συνάρτηση βέλτιστης τιμής και ονομάζονται εξισώσεις βελτιστότητας (optimality equations) του Δυναμικού Προγραμματισμού, ενώ η (5.4) ορίζει την τελική συνθήκη. Επίσης, από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει άμεσα ότι οποιαδήποτε απόφαση a_t ελαχιστοποιεί το δεξιό μέλος της (5.3) είναι βέλτιστη για την περίοδο t στην κατάσταση x_t. Μια βέλτιστη απόφαση τη συμβολίζουμε με $a_t^*(x_t)$.

Όταν ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις βελτιστότητας για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής και τη βέλτιστη τροχιά ως εξής: Ξεκινάμε από την τελική περίοδο $t = N$, για την οποία γνωρίζουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής από την (5.4). Στη συνέχεια θέτουμε $t = N-1$ και από την (5.3) βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος μπορεί να υπολογιστεί για κάθε ζεύγος (x_{N-1}, a_{N-1}), επομένως η τιμή $V_{N-1}(x_{N-1})$ μπορεί να υπολογιστεί για κάθε $x_{N-1} \in \mathscr{X}$. Στο επόμενο βήμα θέτουμε $t = N-2$ και με παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $V_{N-2}^N(x_{N-2})$ για κάθε $x_{N-2} \in \mathscr{X}$. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται διαδοχικά για $t = N-1, N-2, \dots, 0$ και το τελικό αποτέλεσμα είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα $V_0^N(x_0)$. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία ονομάζεται αναδρομή προς τα πίσω (backward induction).

Αφού ολοκληρωθεί η αναδρομή προς τα πίσω, οι βέλτιστες τροχιές, που μπορεί να είναι περισσότερες από μία, μπορούν να προσδιοριστούν με ένα παρόμοιο αναδρομικό σχήμα, αυτήν τη φορά προς τα εμπρός ως εξής: Για $t = 0$ προσδιορίζουμε όλες τις βέλτιστες αποφάσεις $a_0^*(x_0)$ και για καθεμία από αυτές την αντίστοιχη επόμενη κατάσταση $x_1^* = g(x_0, a_0^*)$. Στη συνέχεια θέτουμε $t = 1$, για κάθε x_1^* προσδιορίζουμε όλες τις βέλτιστες αποφάσεις $a_1^*(x_1^*)$ και ούτω καθεξής έως $t = N-1$.

Κάτω από τις Υποθέσεις 1-3 που αναφέραμε παραπάνω είναι δυνατή μια σημαντική απλοποίηση των εξισώσεων βελτιστότητας ως προς τις περιόδους και το μήκος του ορίζοντα. Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του ορίζοντα είναι ίσο με N και στην αρχή της περιόδου t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x. Το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης τιμής $V_t^N(x)$ αντιστοιχεί στην εύρεση μιας βέλτιστης τροχιάς h_t^N μήκους $N-t$ περιόδων, που ξεκινά από την κατάσταση x στην περίοδο t. Λόγω της χρονικής ομοιογένειας από την Υπόθεση 3, το συνολικό κόστος που θα συσσωρευτεί ακολουθώντας οποιαδήποτε τροχιά θα είναι ίσο με το αντίστοιχο κόστος αν ακολουθούσαμε την ίδια τροχιά σε ένα πρόβλημα με ορίζοντα $N-t$ που θα ξεκινούσε την περίοδο $t=0$ με αρχική κατάσταση x. Με άλλα λόγια, λόγω της χρονικής ομοιογένειας, η βέλτιστη τιμή $V_t^N(x)$ δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη περίοδο t αλλά μόνο από τον αριθμό περιόδων μέχρι το τέλος του ορίζοντα. Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο να δούμε ότι $V_t^N(x)=V_0^{N-t}(x)$ για κάθε $t=0,\dots,N$ και για κάθε κατάσταση x.

Η ιδιότητα που περιγράψαμε επιτρέπει τον ορισμό της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και τη διατύπωση των εξισώσεων βελτιστότητας με έναν ισοδύναμο αλλά απλούστερο τρόπο, χρησιμοποιώντας μόνο μια χρονική μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό περιόδων έως το τέλος του ορίζοντα. Συγκεκριμένα, έστω $v_n(x)$ η βέλτιστη αμοιβή σε ένα σύστημα που βρίσκεται στην κατάσταση x όταν απομένουν n περίοδοι κατά τις οποίες θα ληφθούν αποφάσεις έως το τέλος του ορίζοντα.

Από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει ότι $v_n(x)=V_0^n(x)$. Επίσης, η $v_n(x)$ ικανοποιεί ένα σύστημα αναδρομικών εξισώσεων, αντίστοιχων των (5.3) και (5.4), σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2 (Αναδρομικές εξισώσεις συνάρτησης βέλτιστης τιμής) *Ορίζουμε τις συναρτήσεις $v_n^*(x_n)$, $n=0,1,2,\dots,N$ επί του $\mathscr{X}$ από τις σχέσεις*

$$v_0^*(x_0) = \tilde{c}(x_0),\ x_0 \in \mathscr{X} \tag{5.5}$$

$$v_n^*(x_n) = \min_{a_n\in\mathscr{A}(x_n)} \Big(c(x_n,a_n)+v_{n-1}^*(g(x_n,a_n))\Big),\ x_n\in\mathscr{X}. \tag{5.6}$$

Τότε ισχύει $v_n^*(x_n)=v_n(x_n)$, $n=0,1,\dots,N$, $x_n\in\mathscr{X}$. Επιπλέον, έστω $(a_n^*, n=1,2,\dots,N)$ ένα διάνυσμα αποφάσεων τέτοιο ώστε στην κατάσταση x_n στο στάδιο n πριν το τέλος του ορίζοντα η a_n^* είναι οποιαδήποτε απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (5.6). Τότε το (a_n^*) είναι διάνυσμα βέλτιστων αποφάσεων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους N περιόδων.

Παράδειγμα 5.1 (Συνέχεια). Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση τιμής και τη βέλτιστη πολιτική. Επειδή το μήκος ορίζοντα είναι 4 και η αρχική κατάσταση η 1, πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της $v_4(1)$, χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές εξισώσεις (5.6) και (5.5).

Για $n=0$, από την (5.5) παίρνουμε $v_0(x)=0, x\in\mathscr{X}$. Για $n=1$, από την (5.6) προκύπτει ότι $v_1(x)=\min_{a\in\mathscr{A}(x)} c(x,a)$, επομένως

$$\begin{aligned} v_1(1)=0,&\ a_1^*(1)=3\\ v_1(2)=2,&\ a_1^*(2)=1\\ v_1(3)=5,&\ a_1^*(3)=2\\ v_1(4)=2,&\ a_1^*(4)=3 \end{aligned}$$

Για $n=2$ τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned} v_2(1) &= \min\{c(1,1)+v_1(1), c(1,2)+v_1(2), c(1,3)+v_1(3)\}\\ &= \min\{1+0, 3+2, 0+5\}=1 \end{aligned}$$

και $a_2^*(1)=1$. Όμοια υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες καταστάσεις:

$$\begin{aligned} v_2(2)=2,&\ a_2^*(2)=1\\ v_2(3)=7,&\ a_2^*(3)=2\\ v_2(4)=5,&\ a_2^*(4)=4 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για $n=3$

$$\begin{aligned} v_3(1)=2,&\ a_3^*(1)=1\\ v_3(2)=3,&\ a_3^*(2)=1\\ v_3(3)=7,&\ a_3^*(3)=2\\ v_1(4)=8,&\ a_3^*(4)=4 \end{aligned}$$

και για $n = 4$

$$\begin{aligned} v_4(1) &= 3,\ a_4^*(1) = 1 \\ v_4(2) &= 4,\ a_4^*(2) = 1 \\ v_4(3) &= 8,\ a_4^*(3) = 2 \\ v_4(4) &= 9,\ a_4^*(4) = 3. \end{aligned}$$

Επομένως το ελάχιστο δυνατό κόστος σε 4 βήματα ξεκινώντας από τον κόμβο 1 είναι ίσο με $v_4(1) = 3$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βέλτιστη τροχιά : $1-1-1-1-1$. Αν το όχημα ξεκινούσε από τον κόμβο 4, το ελάχιστο δυνατό κόστος θα ήταν ίσο με $v_4(4) = 9$ και η βέλτιστη τροχιά $4-3-2-1-3$.

5.3 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων Πεπερασμένου Ορίζοντα

Στα προβλήματα του ντετερμινιστικού δυναμικού προγραμματισμού, όπως αυτά που μελετήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, γίνεται η υπόθεση ότι όλα τα στοιχεία του προβλήματος είναι γνωστά εκ των προτέρων. Όμως στις περισσότερες πραγματικές εφαρμογές αυτό δεν ισχύει, καθώς υπεισέρχεται αβεβαιότητα σε ένα ή περισσότερα σημεία. Για παράδειγμα, το άμεσο κόστος μιας περιόδου, όπως επίσης και η κατάσταση στην επόμενη περίοδο, μπορεί να μην είναι γνωστά εκ των προτέρων, αλλά να εξαρτώνται και από τυχαίες επιδράσεις.

Στις επόμενες ενότητες θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η αβεβαιότητα υπεισέρχεται στη δυναμική του συστήματος.

Στο βασικό μοντέλο του στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού, ένα στοχαστικό σύστημα μετακινείται από κατάσταση σε κατάσταση για πεπερασμένο αριθμό, έστω N, σταδίων, παίρνοντας αποφάσεις. Το στάδιο που βρίσκεται το σύστημα αντιστοιχεί στον αριθμό των αποφάσεων που απομένουν να ληφθούν. Έτσι, αρχικά το στοχαστικό σύστημα βρίσκεται στο στάδιο N και προχωρά στα στάδια $N-1, N-2, \dots, 1$ μέχρι το τελικό στάδιο 0, όπου η διαδικασία σταματά και δεν λαμβάνεται πια καμία απόφαση.

Συμβολίζουμε, γενικά, με n ένα τυχόν στάδιο και με x_n την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα στο στάδιο n, πριν τη λήψη της απόφασης a_n. Ο χώρος των δυνατών καταστάσεων του συστήματος $\mathscr{X}$ θεωρείται αριθμήσιμος, ενώ για κάθε κατάσταση x_n στο στάδιο n το σύνολο (δέσμη) αποφάσεων $\mathscr{A}(x_n; n)$ θεωρείται πεπερασμένο.

Αν, όντας στο στάδιο n, στην κατάσταση x, ληφθεί η απόφαση a, επάγεται ένα άμεσο κόστος $c(x, a; n)$ και το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση y με πιθανότητα $p_{xy}(a; n)$. Με $\tilde{c}(x)$ συμβολίζεται το τερματικό κόστος που επάγεται στο τελικό στάδιο (στάδιο 0), όταν δεν μένουν πια αποφάσεις και η κατάσταση είναι x. Σε αρκετά προβλήματα τα άμεσα κόστη και οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από το στάδιο στο οποίο βρισκόμαστε, οπότε μιλάμε για χρονικά ομογενές πρόβλημα. Στην περίπτωση αυτή τα συμβολίζουμε με $c(x, a)$ και $p_{xy}(a)$ αντίστοιχα.

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια βέλτιστη «πολιτική» λήψης αποφάσεων π που να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στα N στάδια για κάθε δυνατή αρχική κατάσταση x, δηλαδή θέλουμε να ελαχιστοποιείται η μέση τιμή

$$E_\pi[c(X_N, A_N; N) + c(X_{N-1}, A_{N-1}; N-1) + \cdots + c(X_1, A_1; 1) + \tilde{c}(X_0)|X_N = x].$$

Συμβολίζουμε τις καταστάσεις και τις αποφάσεις με X_n και A_n, χρησιμοποιώντας κεφαλαία, διότι είναι τυχαίες μεταβλητές. Η τυχαιότητα υπεισέρχεται τόσο λόγω των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{xy}(a; n)$, όσο και λόγω της τυχαιότητας που πιθανόν να υπάρχει στην πολιτική.

Με βάση τα παραπάνω, μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων Πεπερασμένου Ορίζοντα ορίζεται από την επτάδα $(\mathscr{X}, \mathscr{A}(x) : x \in \mathscr{X}, c, p, \tilde{c}, N, x_0)$. Ο ορισμός βρίσκεται σε αντιστοιχία με το πρόβλημα του Ντετερμινιστικού Δυναμικού Προγραμματισμού, με τη διαφορά ότι η ντετερμινιστική συνάρτηση δυναμικής $\{g(x, a), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)\}$, που ορίζει την επόμενη κατάσταση αν στην κατάσταση x ληφθεί η απόφαση

a, αντικαταστάθηκε από τη στοχαστική δυναμική $\{p_{xy}(a; n), x, y \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)\}$, που δίνει την κατανομή της επόμενης κατάστασης κάτω από το ζεύγος (x, a) στο στάδιο n.

5.4 Η έννοια της Πολιτικής και Κλάσεις Πολιτικών

Στην περίπτωση του ντετερμινιστικού δυναμικού προγραμματισμού, όπου σε κάθε περίοδο η απόφαση προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατάσταση στην επόμενη περίδο, η τροχιά του συστήματος μπορεί να καθοριστεί πλήρως από την αρχή του ορίζοντα, αν είναι γνωστή η αρχική κατάσταση και όλες οι αποφάσεις που θα ληφθούν στη συνέχεια. Αυτό δεν είναι εφικτό στην περίπτωση της στοχαστικής δυναμικής, επειδή εδώ η επόμενη κατάσταση είναι τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή καθορίζεται από το ζεύγος της παρούσας κατάστασης και απόφασης. Εδώ χρειάζεται ένας γενικότερος τρόπος λήψης αποφάσεων και αυτό μας δίνει η έννοια της πολιτικής.

Μια πολιτική γενικά είναι ένας κανόνας που καθορίζει την απόφαση που θα λάβει ο διαχειριστής του συστήματος σε κάθε βήμα. Στη γενικότερη περίπτωση η απόφαση σε ένα στάδιο n μπορεί να εξαρτάται από όλη την προηγούμενη ιστορία καταστάσεων και αποφάσεων. Η ιστορία του συστήματος σε ένα στάδιο n είναι η ακολουθία των καταστάσεων και των αποφάσεων που παρατηρήθηκαν μέχρι το στάδιο αυτό. Συμβολικά γράφουμε

$$h_N = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$$

για να δηλώσουμε ότι το σύστημα πέρασε από τις καταστάσεις $x_N, x_{N-1}, \dots, x_{n+1}$, παίρνοντας διαδοχικά τις αποφάσεις $a_N, a_{N-1}, \dots, a_{n+1}$ για να καταλήξει στο τρέχον στάδιο n στην κατάσταση x_n.

Μια πολιτική $\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \dots, \pi(1))$ για την επίλυση του προβλήματος είναι ένα σύνολο κανόνων, ένας για κάθε στάδιο, για να αποφασιστεί ποια απόφαση πρέπει να ληφθεί, λαμβάνοντας υπόψη την ιστορία της διαδικασίας μέχρι το τρέχον στάδιο. Πιο συγκεκριμένα, $\pi(n)$ είναι ο κανόνας λήψης απόφασης για το στάδιο n. Η $\pi(n)$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των δυνατών ιστοριών στο στάδιο n και πεδίο τιμών τις κατανομές πιθανότητας στο σύνολο των δυνατών αποφάσεων. Επομένως, αν h_n είναι η ιστορία του συστήματος μέχρι το στάδιο n, τότε $\pi_{h_n}(a; n)$ είναι η πιθανότητα να ληφθεί η απόφαση a στο στάδιο n, δεδομένου ότι έχει παρατηρηθεί μέχρι στιγμής η ιστορία h_n.

Ανάλογα με την εξάρτησή τους από την ιστορία του συστήματος οι πολιτικές διακρίνονται σε Μαρκοβιανές (Markovian) και ιστοριοεξαρτώμενες (history - dependent). Μια πολιτική π ειναι Μαρκοβιανή αν για κάθε στάδιο n και ιστορία $h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$, είναι $\pi_{h_n}(a; n) = \pi_{x_n}(a; n)$, δηλαδή οι πιθανότητες με τις οποίες η πολιτική επιλέγει αποφάσεις στο στάδιο n εξαρτώνται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και όχι από ολόκληρη την ιστορία μέχρι το συγκεκριμένο στάδιο. Στη γενική περίπτωση, όπου η πολιτική επιλέγει αποφάσεις που μπορεί να εξαρτώνται από ολόκληρη την προηγηθείσα ιστορία, η πολιτική λέγεται ιστοριοεξαρτώμενη.

Οι Μαρκοβιανές πολιτικές διακρίνονται περαιτέρω, ανάλογα με την ομοιογένεια ή ετερογένειά τους στα διάφορα στάδια. Μια Μαρκοβιανή πολιτική λέγεται στάσιμη (stationary), αν για κάθε στάδιο n και κατάσταση x_n, είναι $\pi_{x_n}(a; n) = \pi_{x_n}(a)$, δηλαδή οι πιθανότητες με τις οποίες η πολιτική επιλέγει αποφάσεις στο στάδιο n εξαρτώνται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και όχι από το συγκεκριμένο στάδιο. Στη γενική περίπτωση που υπάρχει εξάρτηση από το στάδιο, η πολιτική λέγεται μη-στάσιμη (non-stationary).

Σε σχέση με τον τρόπο επιλογής της απόφασης, οι πολιτικές διακρίνονται σε προσδιοριστικές (ντετερμινιστικές - deterministic) και τυχαιοποιημένες (randomized). Μια πολιτική π είναι προσδιοριστική, αν για κάθε στάδιο και ιστορία h_n, υπάρχει μια απόφαση $a_n(h_n)$ που επιλέγεται με βεβαιότητα, δηλαδή $\pi_{h_n}(a_n(h_n); n) = 1$, ενώ $\pi_{h_n}(\alpha; n) = 0$, για κάθε $a \neq a_n(h_n)$. Στη γενική περίπτωση, η πολιτική λέγεται τυχαιοποιημένη.

Έστω ότι τα σύμβολα H, M και S δηλώνουν τις ιστοριοεξαρτώμενες, τις Μαρκοβιανές και τις στάσιμες πολιτικές, ενώ τα R και D τις τυχαιοποιημένες και τις ντετερμινιστικές πολιτικές, αντίστοιχα. Συνδυάζοντας αυτά τα σύμβολα έχουμε τις κλάσεις των πολιτικών Π^{HR}, Π^{HD}, Π^{MR}, Π^{MD}, Π^{SR} και Π^{SD}. Μεταξύ τους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{SR} \subseteq \Pi^{MR} \subseteq \Pi^{HR},$$
$$\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{MD} \subseteq \Pi^{MR} \subseteq \Pi^{HR},$$
$$\Pi^{SD} \subseteq \Pi^{MD} \subseteq \Pi^{HD} \subseteq \Pi^{HR}.$$

Δοθείσης της αρχικής κατανομής ενός στοχαστικού συστήματος, των πιθανοτήτων μετάβασης και μιας πολιτικής μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης μιας συγκεκριμένης ιστορίας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

Θεώρημα 5.3 (Πιθανότητα συγκεκριμένης πραγματοποίησης ιστορίας) *Έστω $\mathbf{p}^{(N)} = (p_{x_N}^{(N)})$ η αρχική κατανομή ενός στοχαστικού συστήματος στο αρχικό στάδιο N, δηλαδή $p_{X_N}^{(N)} = \Pr[X_N = x_N], x_N \in \mathscr{X}$, και $p_{xy}(a;n)$ οι πιθανότητες μετάβασής του. Έστω, επίσης, μια πολιτική $\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \dots, \pi(1))$. Ορίζουμε με H_n την τυχαία μεταβλητή της ιστορίας στο στάδιο n. Τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης μιας συγκεκριμένης ιστορίας*

$$h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$$

είναι

$$\begin{aligned}\Pr[H_n = h_n] \quad = \quad & p_{x_N}^{(N)} \pi_{x_N}(a_N;N) p_{x_N x_{N-1}}(a_N;N) \pi_{x_N a_N x_{t-1}}(a_{N-1};N-1) p_{x_{N-1}x_{N-2}}(a_{N-1};N-1) \\ & \cdots \pi_{x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \dots x_{n+1}}(a_{n+1};n+1) p_{x_{n+1}x_n}(a_{n+1};n+1). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο για τον υπολογισμό της πιθανότητας τομής ενδεχομένων, δηλαδή με διαδοχική δέσμευση στις τυχαίες μεταβλητές X_t, A_t, X_{t-1}, A_{t-1}, μέχρι και στην X_n. Επομένως, δοθείσης μιας πολιτικής π, προκύπτει μια στοχαστική διαδικασία $\{(X_N, A_N, X_{N-1}, A_{N-1}, \dots, X_1, A_1, X_0)\}$ με την παραπάνω από κοινού συνάρτηση πιθανότητας. Η περιθώρια $\{(X_N, X_{N-1}, \dots, X_1, X_0)\}$ αναφέρεται ως στοχαστική διαδικασία των καταστάσεων του συστήματος, ενώ η $\{(A_N, A_{N-1}, \dots, A_1)\}$ αναφέρεται ως στοχαστική διαδικασία των αποφάσεων του συστήματος.

Στην περίπτωση που η πολιτική που ακολουθούμε είναι Μαρκοβιανή ή Μαρκοβιανή στάσιμη, ο τύπος (5.7) του θεωρήματος 5.3 απλοποιείται και μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.4 (Πιθανότητες μετάβασης υπό Μαρκοβιανή πολιτική) *Αν ακολουθείται μια Μαρκοβιανή πολιτική π, η στοχαστική διαδικασία των καταστάσεων είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης*

$$\Pr[X_n = x_n | X_{n+1} = x_{n+1}] = \sum_{a_{n+1}} \pi_{x_{n+1}}(a_{n+1};n+1) p_{x_{n+1}x_n}(a_{n+1};n+1).$$

Αν επιπλέον η π είναι και στάσιμη και οι πιθανότητες μετάβασης χρονικά ομογενείς, δηλαδή $p_{xy}(a;n) = p_{xy}(a)$, τότε η διαδικασία των καταστάσεων είναι ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης

$$\Pr[X_n = x_n | X_{n+1} = x_{n+1}] = \sum_{a_{n+1}} \pi_{x_{n+1}}(a_{n+1}) p_{x_{n+1}x_n}(a_{n+1}).$$

5.5 Συναρτήσεις Αξίας Πολιτικής και Συναρτήσεις Βέλτιστης Τιμής

Δοθείσης μιας πολιτικής $\pi = (\pi(N), \pi(N-1), \dots, \pi(1))$ η συνάρτηση της (ολικής) αξίας της ορίζεται ως

$$u_N^{\pi}(x_N) \quad = \quad E_{\pi}\left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n, A_n; n) + \tilde{c}(X_0) \,|X_N = x_N\right],$$

δηλαδή, η $u_N^\pi(x_N)$ εκφράζει το μέσο συνολικό κόστος που συσσωρεύεται υπό την πολιτική π δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η x_N. Ανάλογα, ορίζεται και η συνάρτηση της (μερικής) αξίας από ένα στάδιο n και μετά, όταν η μέχρι στιγμής ιστορία του συστήματος είναι η h_n. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$u_n^\pi(h_n) \quad = \quad E_\pi\left[\sum_{k=1}^{n} c(X_k, A_k; k) + \tilde{c}(X_0)\,|H_n = h_n\right].$$

Στην περίπτωση αυτή, η $u_n^\pi(h_n)$ εκφράζει το μέσο υπολειπόμενο κόστος που συσσωρεύεται υπό την πολιτική π από το στάδιο n και μετά, δεδομένου ότι η ιστορία του συστήματος μέχρι το στάδιο n είναι η h_n.

Για τον υπολογισμό της αξίας μιας πολιτικής έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.5 (Αναδρομικό σχήμα υπολογισμού συνάρτησης αξίας πολιτικής) *Η συνάρτηση αξίας μιας πολιτικής π υπολογίζεται αναδρομικά, για $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, ως εξής:*

$$u_0^\pi(h_0) \quad = \quad \tilde{c}(x_0), \tag{5.8}$$

$$u_n^\pi(h_n) \quad = \quad \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n; n)\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) u_{n-1}^\pi(h_n a_n x_{n-1})\right], \tag{5.9}$$

όπου $h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n$.

Η πρώτη σχέση είναι προφανής. Για την απόδειξη της δεύτερης, αρκεί να δεσμεύσουμε στην απόφαση A_n και ακολούθως στην κατάσταση X_{n-1}.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, ένα πρόβλημα N σταδίων. Ορίζουμε τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο στάδιο n, δοθέντος ότι η τρέχουσα κατάσταση του συστήματος είναι x_n ως

$$v_n(x_n) \quad = \quad \inf_{\pi, x_N, a_N, \ldots, x_{n+1}, a_{n+1}} u_n^\pi(x_N a_N \ldots x_{n+1} a_{n+1} x_n).$$

Δηλαδή, το $v_n(x_n)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) για το κόστος από το στάδιο n και μετά, δεδομένου ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι x_n, όπου το μέγιστο κάτω φράγμα λαμβάνεται ως προς όλες τις πολιτικές π και όλες τις δυνατές ιστορίες που μπορεί να οδήγησαν στην τρέχουσα κατάσταση x_n στο στάδιο n. Έχουμε τότε το επόμενο αποτέλεσμα:

Λήμμα 5.1 (Ανισότητα συνάρτησης βέλτιστης τιμής) *Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x_n)$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$v_n(x_n) \geq \min_{a_n}\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1})\right].$$

Για την απόδειξη, θεωρούμε μια αυθαίρετη πολιτική π, ένα στάδιο n και μια ιστορία του συστήματος μέχρι το στάδιο n, έστω την

$$h_n = x_N a_N x_{N-1} a_{N-1} \cdots x_{n+1} a_{n+1} x_n,$$

που οδηγεί στην κατάσταση x_n στο στάδιο n. Τότε, από την (5.9), έχουμε

$$\begin{aligned} u_n^\pi(h_n) \quad &= \quad \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n; n)\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) u_{n-1}^\pi(h_n a_n x_{n-1})\right] \\ &\geq \quad \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n; n)\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1})\right] \\ &\geq \quad \sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n; n) \min_{a_n}\left[c(x_n, a_n; n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n; n) v_{n-1}(x_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

Όμως, η ποσότητα

$$\min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right]$$

είναι ανεξάρτητη της a_n και της h_n, οπότε είναι κοινός παράγοντας στο παραπάνω άθροισμα. Επιπλέον,

$$\sum_{a_n} \pi_{h_n}(a_n;n)=1,$$

επομένως έχουμε

$$u_n^{\pi}(h_n) \quad \geq \quad \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right].$$

Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για όλες τις πολιτικές π και όλες τις ιστορίες h_n που οδηγούν στην x_n στο στάδιο n, παίρνοντας infimum για όλα τα π, h_{n+1} και a_{n+1} προκύπτει το συμπέρασμα.

Με βάση το Λήμμα 5.1, μπορούμε να προχωρήσουμε στο επόμενο βασικό αποτέλεσμα που δείχνει ότι στα προβλήματα πεπερασμένου ορίζοντα του πλαισίου που έχουμε αναπτύξει υπάρχει πάντα βέλτιστη πολιτική, ενώ επίσης παρέχει ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού της βέλτιστης πολιτικής.

Θεώρημα 5.6 (Αναδρομικό σχήμα υπολογισμού συνάρτησης βέλτιστης τιμής και βέλτιστης πολιτικής) *Ορίζουμε τις συναρτήσεις $u_n^*(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots,N$, επί του $\mathscr{X}$ από τις σχέσεις*

$$u_0^*(x_0) \quad = \quad \tilde{c}(x_0),\ x_0\in\mathscr{X}, \tag{5.10}$$

$$u_n^*(x_n) \quad = \quad \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)u_{n-1}^*(x_{n-1})\right],\ x_n\in\mathscr{X}. \tag{5.11}$$

Για $n=1,\ldots,N, x_n\in\mathscr{X}$ θεωρούμε οποιαδήποτε απόφαση $a_n^*(x_n)$ που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (5.11). Έστω $\pi^*=(\pi^*(N),\pi^*(N-1),\ldots,\pi^*(1))$ η Μαρκοβιανή προσδιοριστική πολιτική που όντας στην κατάσταση x_n στο στάδιο n επιλέγει την απόφαση $a_n^*(x_n)$. Τότε, για κάθε ιστορία $h_n=x_N a_N\cdots x_{N+1}a_{N+1}x_n$ που οδηγεί στην x_n στο στάδιο n έχουμε

$$u_n^{\pi^*}(h_n)=u_n^*(x_n)=v_n(x_n). \tag{5.12}$$

Επομένως, η π^* είναι βέλτιστη. Επιπλέον, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ικανοποιεί τις εξισώσεις βελτιστότητας

$$v_0(x_0) \quad = \quad \tilde{c}(x_0),\ x_0\in\mathscr{X}, \tag{5.13}$$

$$v_n(x_n) \quad = \quad \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right],\ x_n\in\mathscr{X}. \tag{5.14}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος 5.6, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n για να αποδείξουμε την ισχύ της (5.12) για κάθε $n\geq 0$. Για $n=0$ έχουμε ότι

$$u_0^{\pi^*}(h_0)=\tilde{c}(x_0)=u_0^*(x_0)=v_0(x_0),\ x_0\in\mathscr{X},$$

οπότε η πρόταση ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι η (5.12) ισχύει για $n-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n. Από την αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της αξίας μιας πολιτικής έχουμε για την αξία της πολιτικής π^*:

$$u_n^{\pi^*}(h_n) \quad = \quad \sum_{a_n}\pi_{h_n}^*(a_n;n)\left[c(x_n,a_n;n)+\sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)u_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n x_{n-1})\right]. \tag{5.15}$$

Όμως από τον ορισμό της π^* έχουμε

$$\pi^*_{h_n}(a_n;n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a_n = a_n^* \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου a_n^* είναι απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στον αναδρομικό ορισμό της $u_n^*(x_n)$, μέσω της σχέσης (5.11). Επιπλέον, από την επαγωγική υπόθεση είναι

$$u_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n x_{n-1}) = u_{n-1}^*(x_{n-1}) = v_{n-1}(x_{n-1}).$$

Επομένως, η σχέση (5.15) για την αξία της πολιτικής π^* παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} u_n^{\pi^*}(h_n) &= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)u_{n-1}^*(x_{n-1})\right] \\ &= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Από την πρώτη ισότητα της (5.16) και τον αναδρομικό ορισμό της $u_n^*(x_n)$ (σχέση (5.11)) παίρνουμε

$$u_n^{\pi^*}(h_n) = u_n^*(x_n).$$

Από τη δεύτερη ισότητα της (5.16) και τον ορισμό της $v_n(x_n)$ παίρνουμε

$$v_n(x_n) \le \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right],\ x_n \in \mathscr{X},$$

η οποία σε συνδυασμό με το λήμμα 5.1, μας δίνει ότι

$$v_n(x_n) = \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})\right],\ x_n \in \mathscr{X}. \tag{5.17}$$

Συγκρίνοντας, τώρα, τα δεξιά μέλη της δεύτερης ισότητας της (5.16) για την $u_n^{\pi^*}(h_n)$ και της (5.17) για την $v_n(x_n)$, έχουμε ότι

$$u_n^{\pi^*}(h_n) = v_n(x_n),$$

που ολοκληρώνει την επαγωγή.

Παρότι η θεωρία για την επίλυση των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα εκτέθηκε για την περίπτωση αριθμήσιμου χώρου καταστάσεων και πεπερασμένων δεσμών αποφάσεων για κάθε κατάσταση, τα αποτελέσματα συνεχίζουν να ισχύουν και σε πιο γενικό πλαίσιο που καλύπτει εφαρμογές με «συνεχείς» χώρους καταστάσεων και «συνεχείς» χώρους αποφάσεων. Χρειάζονται, όμως, κάποιες υποθέσεις ομαλότητας. Το πλαίσιο που προκύπτει απαιτεί οι χώροι καταστάσεων και οι δέσμες αποφάσεων σε όλα τα στάδια να είναι κλειστά υποσύνολα κάποιων ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^m$. Επιπλέον, αν (x_k) είναι μια ακολουθία καταστάσεων που συγκλίνει στον χώρο καταστάσεων σε κάποιο x, τότε για κάθε ακολουθία αποφάσεων (a_k) με $a_k \in \mathscr{A}(x_k)$ να υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποια απόφαση $a \in \mathscr{A}(x)$. Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{xy}(a;n)$ αντικαθίστανται από συνεχείς ως προς y συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για κάθε κατάσταση x και απόφαση $a \in \mathscr{A}(x)$. Τέλος, οι συναρτήσεις κόστους $c(x,a;n)$ kai $\tilde{c}(x)$ πρέπει να είναι συνεχείς και κάτω φραγμένες. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} v_0(x_0) &= \tilde{c}(x_0),\ x_0 \in \mathscr{X}, \\ v_n(x_n) &= \min_{a_n}\left[c(x_n,a_n;n) + \int_{\mathscr{X}} p_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)v_{n-1}(x_{n-1})dx_{n-1}\right],\ x_n \in \mathscr{X}, \end{aligned}$$

που αποτελούν το συνεχές ανάλογο των (5.13) και (5.14) που παρουσιάστηκαν στη διακριτή περίπτωση. Επιπλέον, οποιαδήποτε απόφαση σε κάποιο στάδιο και κατάσταση υλοποιεί το min στην εξίσωση βελτιστοποίησης, είναι βέλτιστη σε αυτό το στάδιο και αυτήν την κατάσταση.

5.6 Εφαρμογές με επαγωγικά επιχειρήματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια ποικιλία από εφαρμογές που δείχνουν πώς χρησιμοποιείται το βασικό θεώρημα 5.6 για τον υπολογισμό της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και για την εύρεση βέλτιστης πολιτικής, λύνοντας αναδρομικά τις εξισώσεις βελτιστότητας. Στις πρώτες δυο εφαρμογές (μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης και πρόβλημα κατανομής πόρων) δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα, οπότε πρόκειται για προβλήματα προσδιοριστικού δυναμικού προγραμματισμού. Παρόλο που οι εφαρμογές αυτές δεν εμπίπτουν αυστηρά στο στοχαστικό μέρος της Επιχειρησιακής Έρευνας, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και παρουσιάζουν, χωρίς περαιτέρω δυσκολίες, τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται σε ανάλογα στοχαστικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό παρουσιάζονται με αρκετή λεπτομέρεια. Στη συνέχεια παρουσιάζονται άλλες δυο εφαρμογές με στοχαστικό χαρακτήρα (μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής και πρόβλημα συντήρησης αντικατάστασης μηχανήματος).

5.6.1 Ένα μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης

Θεωρούμε έναν επενδυτή που λαμβάνει ετήσιο εισόδημα από κάποιο κεφάλαιο που έχει σωρεύσει. Ας υποθέσουμε ότι ένα συγκεκριμένο έτος λαμβάνει x χρηματικές μονάδες ως ετήσιο εισόδημα και πρέπει να αποφασίσει την ποσότητα a από αυτές που προτίθεται να καταναλώσει, $0 \le a \le x$. Αν καταναλώσει a, τότε το επόμενο έτος θα λάβει εισόδημα $x+\theta(x-a)$, διότι το ποσό $x-a$ που αποταμίευσε το προηγούμενο έτος ενσωματώθηκε στο κεφάλαιό του και επενδύθηκε με επιτόκιο θ. Ο σκοπός του επενδυτή είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό ποσό που θα καταναλώσει τα επόμενα n χρόνια, δοθέντος ότι το φετινό ετήσιο εισόδημά του είναι x.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός n των υπόλοιπων ετών.
- Κατάσταση: Το ετήσιο εισόδημα x στην αρχή ενός έτους.
- Απόφαση: Το ποσό a που θα καταναλώσει.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη ωφέλεια (συνολική κατανάλωση), ξεκινώντας από την κατάσταση x, όταν απομένουν n έτη.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση βελτιστοποίησης έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0,\ x \ge 0, \\ v_n(x) &= \max_{a\in[0,x]} \left[a + v_{n-1}(x+\theta(x-a))\right],\ x\ge 0,\ n=1,2,\ldots . \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αναδρομικά, για $n = 1,2$, τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής. Αντικαθιστώντας την αρχική συνθήκη

$$v_0(x) = 0,\ x \ge 0,$$

στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 1$, έχουμε

$$v_1(x) = \max_{a\in[0,x]} [a+0] = x,\ x \ge 0.$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \max_{a\in[0,x]} [a + x + \theta(x-a)] \\ &= (1+\theta)x + \max_{a\in[0,x]} [(1-\theta)a]. \end{aligned}$$

Επειδή η $(1-\theta)a$ είναι γραμμική συνάρτηση του a, το μέγιστό της στο $[0,x]$ πιάνεται στο 0 ή στο x, οπότε

$$\begin{aligned}
v_2(x) &= (1+\theta)x + \max_{a\in\{0,x\}}[(1-\theta)a] \\
&= \begin{cases} (1+\theta)x + (1-\theta)0 & \text{αν } \theta \geq 1, \\ (1+\theta)x + (1-\theta)x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1+\theta)x & \text{αν } \theta \geq 1, \\ 2x & \text{αν } \theta \leq 1, \end{cases} \\
&= \max[1+\theta, 2]x \\
&= \rho_2 x, x \geq 0,
\end{aligned}$$

με $\rho_2 = \max[1+\theta, 2]$.

Επομένως, εικάζουμε ότι $v_n(x) = \rho_n x$, $x \geq 0$. Θα αποδείξουμε αυτήν την εικασία με επαγωγή στο n. Για $n=0$ ισχύει προφανώς με $\rho_0 = 0$. Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Τότε από την εξίσωση βελτιστοποίησης έχουμε

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= \max_{a\in[0,x]}\left[a + \rho_{n-1}(x + \theta(x-a))\right] \\
&= (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in[0,x]}\left[(1-\theta\rho_{n-1})a\right],\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η $(1-\theta\rho_{n-1})a$ είναι γραμμική συνάρτηση του a, έχουμε και πάλι ότι η μέγιστη τιμή της στο $[0,x]$ λαμβάνεται στο 0 ή στο x. Επομένως:

$$\begin{aligned}
v_n(x) &= (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in\{0,x\}}\left[(1-\theta\rho_{n-1})a\right] \\
&= \max[(1+\theta)\rho_{n-1}, 1+\rho_{n-1}]x \\
&= \rho_n x,\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, η εικασία αποδείχθηκε και, επιπλέον, βρέθηκε ένας αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των σταθερών ρ_n που εμφανίζονται στη συνάρτηση βέλτιστης τιμής. Συμπερασματικά, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.7 (Συνάρτηση βέλτιστης τιμής μοντέλου κατανάλωσης - επένδυσης) *Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης δίνεται από τον τύπο*

$$v_n(x) = \rho_n x,\ x \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= 0, \\
\rho_n &= \max[(1+\theta)\rho_{n-1}, 1+\rho_{n-1}],\ n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Όσον αφορά τη βέλτιστη πολιτική σε κάθε στάδιο έχουμε δει ότι

$$v_n(x) = (1+\theta)\rho_{n-1}x + \max_{a\in\{0,x\}}\left[(1-\theta\rho_{n-1})a\right],\ x \geq 0.$$

Επομένως, στο στάδιο n, η βέλτιστη πολιτική είναι $a_n^*(x) = 0$, αν $1-\theta\rho_{n-1} \leq 0$. Δηλαδή, για $\rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}$, η βέλτιστη πολιτική είναι να επενδύεται (αποταμιεύεται) όλο το ποσό. Αλλιώς, αν $\rho_{n-1} \leq \frac{1}{\theta}$, η βέλτιστη πολιτική είναι $a_n^*(x) = x$, δηλαδή να καταναλώνεται όλο το ποσό. Συνοπτικά, έχουμε

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \rho_{n-1} \geq \frac{1}{\theta}, \\ x & \text{αν } \rho_{n-1} \leq \frac{1}{\theta}. \end{cases}$$

Από τον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας ρ_n είναι φανερό ότι είναι αύξουσα. Έστω n^* ο ελάχιστος n για τον οποίο $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$. Τότε, έχουμε $\rho_n < \frac{1}{\theta}$ για $n \leq n^* - 1$, ενώ $\rho_n \geq \frac{1}{\theta}$ για $n \geq n^*$. Επίσης,

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*. \end{cases}$$

Μπορούμε, τώρα, να προχωρήσουμε και να απλοποιήσουμε το αναδρομικό σχήμα υπολογισμού των ρ_n. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= 0, \\
\rho_1 &= \max[(1+\theta)\rho_0, 1+\rho_0] = 1, \text{ αφού } \theta\rho_0 = 0 < 1, \\
\rho_2 &= \max[(1+\theta)\rho_1, 1+\rho_1] = 1+\rho_1 = 2, \text{ αφού } \theta\rho_1 < 1, \\
&\vdots \\
\rho_{n^*} &= \max[(1+\theta)\rho_{n^*-1}, 1+\rho_{n^*-1}] = 1+\rho_{n^*-1} = n^*, \text{ αφού } \theta\rho_{n^*-1} < 1, \\
\rho_{n^*+1} &= \max[(1+\theta)\rho_{n^*}, 1+\rho_{n^*}] = (1+\theta)\rho_{n^*} = (1+\theta)n^*, \text{ αφού } \theta\rho_{n^*} \geq 1, \\
\rho_{n^*+2} &= \max[(1+\theta)\rho_{n^*+1}, 1+\rho_{n^*+1}] = (1+\theta)\rho_{n^*+1} = (1+\theta)^2 n^*, \text{ αφού } \theta\rho_{n^*+1} \geq 1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Οπότε, μπορούμε να απλοποιήσουμε και τον χαρακτηρισμό του n^*. Θα πρέπει για $n \geq n^*$ να ισχύει

$$\rho_n = (1+\theta)^{n-n^*} n^* \geq \frac{1}{\theta},$$

ενώ για $n < n^*$ να ισχύει

$$\rho_n = n < \frac{1}{\theta}.$$

Επομένως ο n^* είναι ο ελάχιστος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $\frac{1}{\theta}$. Έχουμε, έτσι, ολοκληρώσει την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.8 (Βέλτιστη πολιτική στο μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης) *Έστω*

$$n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil.$$

Η βέλτιστη πολιτική κατανάλωσης είναι

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \geq n^* + 1, \\ x & \text{αν } n \leq n^*, \end{cases}$$

δηλαδή να επενδύεται όλο το ετήσιο εισόδημα όταν απομένουν περισσότερα από n^* χρόνια και να καταναλώνεται όλο το ετήσιο εισόδημα όταν απομένουν ακριβώς ή λιγότερα από n^* χρόνια. Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$v_n(x) = \rho_n x, \ x \geq 0, \ n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου

$$\rho_n = \begin{cases} n & \text{αν } n \leq n^*, \\ n^*(1+\theta)^{n-n^*} & \text{αν } n \geq n^*. \end{cases}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής βρίσκεται μεγιστοποιώντας μια γραμμική συνάρτηση της μεταβλητής απόφασης a είναι το βασικό στοιχείο που επιτρέπει τη δραστική απλοποίηση των υπολογισμών. Πράγματι, το γεγονός αυτό επιτρέπει να ψάξουμε για βέλτιστο μόνο στα ακρότατα του συνόλου $[0, x]$ των εφικτών αποφάσεων, όταν η κατάσταση είναι x, δηλαδή, μόνο στα σημεία 0 και x.

Η μορφή της βέλτιστης πολιτικής που υπαγορεύει αρχικά την υιοθέτηση μιας ακραίας απόφασης (επένδυσε όλο το εισόδημα) και κατόπιν την υιοθέτηση μιας διαμετρικά αντίθετης ακραίας απόφασης (κατανάλωσε όλο το εισόδημα) αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως πολιτική «bang-bang».

5.6.2 Το πρόβλημα κατανομής πόρων

Μοντελοποίηση

Θεωρούμε έναν επενδυτή, που έχει ένα κεφάλαιο y χρηματικών μονάδων, το οποίο πρόκειται να επενδύσει σε N δυνατές επιλογές. Αν επενδύσει x χρηματικές μονάδες στην επιλογή n, η αναμενόμενη απόδοση είναι $r_n(x)$. Ο σκοπός του επενδυτή είναι να βρει βέλτιστη κατανομή του κεφαλαίου των y χρηματικών μονάδων στις N επιλογές, που να μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική απόδοση.

Έστω a_n το μέρος του κεφαλαίου (χρηματικές μονάδες) που θα επενδυθούν στην επιλογή n. Τότε, έχουμε το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{n=1}^{N} r_n(a_n) \\
\text{υπό} & \\
 & \sum_{n=1}^{N} a_n \leq y \\
 & a_n \geq 0, \;\; n = 1, 2, \ldots, N.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού, υποθέτοντας ότι η κατανομή του κεφαλαίου στις n επιλογές γίνεται ακολουθιακά. Τότε, έχουμε:

- Στάδιο: Ο αριθμός των υπόλοιπων επενδυτικών επιλογών, n, για επένδυση του υπόλοιπου κεφαλαίου.
- Κατάσταση: Το υπόλοιπο κεφάλαιο, x, που απομένει για επένδυση στις επενδυτικές επιλογές που δεν έχουν ήδη θεωρηθεί.
- Απόφαση: Η ποσότητα κεφαλαίου, a, που θα επενδυθεί στην επόμενη διαθέσιμη επιλογή.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η υπόλοιπη αναμενόμενη συνολική απόδοση από την επένδυση στις υπόλοιπες n επενδυτικές επιλογές, $v_n(x)$, όταν το διαθέσιμο κεφάλαιο για αυτές είναι x.

Εδώ, έχουμε την εξίσωση βελτιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y, \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r_n(a) + v_{n-1}(x-a)], \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Λύση στη συμμετρική περίπτωση με αύξουσα κυρτή απόδοση

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του προβλήματος όπου $r_n(x) = r(x)$, για $n = 1, 2, \ldots, N$ (συμμετρική περίπτωση) και, επιπλέον, η $r(x)$ είναι αύξουσα, κυρτή με $r(0) = 0$.

Η εξίσωση βελτιστοποίησης γράφεται ως

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r(a) + v_{n-1}(x-a)], \quad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε αναδρομικά για $n = 1, 2$ τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής. Αντικαθιστώντας την αρχική σχέση

$$v_0(x) = 0, \; 0 \leq x \leq y,$$

στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 1$, έχουμε

$$v_1(x) = r(x), \; 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \; 0 \leq x \leq y.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 2$, έχουμε

$$v_2(x) \quad = \quad \max_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)],\ 0 \leq x \leq y.$$

Έστω

$$f(a) \quad = \quad r(a) + r(x-a),\ a \in [0,x],$$

και ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή $(r'(x)$ γνησίως αύξουσα$)$. Έχουμε

$$\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a).$$

Λύνοντας την $\frac{df(a)}{da} = 0$, παίρνουμε $r'(a) = r'(x-a)$, οπότε $a = x - a$, δηλαδή $a = \frac{x}{2}$. Επίσης έχουμε $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$. Επομένως η $f(a)$ είναι φθίνουσα στο $[0, \frac{x}{2})$ και αύξουσα στο $(\frac{x}{2}, x]$ και επομένως το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = 0$ ή $a = x$. Επομένως

$$v_2(x) \quad = \quad r(x),\ 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) \quad = \quad 0 \text{ ή } x,\ 0 \leq x \leq y.$$

Υποθέσαμε για ευκολία ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή, αλλά αυτό δεν χρειάζεται. Η υπόθεση ότι η $r(x)$ είναι αύξουσα, κυρτή με $r(0) = 0$ αρκεί. Πράγματι,

$$\begin{aligned} r(a) &= r\left(\left(1 - \frac{a}{x}\right)0 + \frac{a}{x}x\right) \leq \left(1 - \frac{a}{x}\right)r(0) + \frac{a}{x}r(x), \\ r(x-a) &= r\left(\frac{a}{x}\,0 + \left(1 - \frac{a}{x}\right)x\right) \leq \frac{a}{x}r(0) + \left(1 - \frac{a}{x}\right)r(x) \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$r(a) + r(x-a) \leq r(0) + r(x) \leq r(x).$$

Επαγωγικά, θα έχουμε ότι η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο $n = 2, 3, \ldots, N$ είναι η $a_n^*(x) = 0$ ή η $a_n^*(x) = x$ και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι η $v_n(x) = r(x)$, $0 \leq x \leq y$. Επομένως έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.9 (Λύση συμμετρικού προβλήματος κατανομής πόρων με κυρτή συνάρτηση απόδοσης) *Στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων*

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{n=1}^{N} r(a_n) \\ \textit{υπό} & \\ & \sum_{n=1}^{N} a_n \leq y \\ & a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, N, \end{array}$$

με $r(x)$ αύξουσα, κυρτή με $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση είναι $a_{n^*}^* = y$ για κάποιο $n* \in \{1, 2, \ldots, N\}$ και $a_n^* = 0$ για $n \neq n^*$. Δηλαδή, όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο πρέπει να επενδυθεί σε μια επιλογή.

Λύση στη συμμετρική περίπτωση με αύξουσα κοίλη απόδοση

Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση του προβλήματος όπου $r_n(x) = r(x)$, για $n = 1, 2, \ldots, N$ (συμμετρική περίπτωση), αλλά τώρα υποθέτουμε ότι η $r(x)$ είναι αύξουσα, κοίλη με $r(0) = 0$. Η ανάλυση προχωρά όπως και στην κυρτή περίπτωση, μέχρι τη μελέτη της $f(a)$, δηλαδή έχουμε την ίδια εξίσωση βελτιστοποίησης και τις ίδιες $v_0(x)$, $v_1(x)$ και $a_1^*(x)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 2$, έχουμε

$$v_2(x) \quad = \quad \max_{a\in[0,x]}[r(a) + r(x-a)] = \max_{a\in[0,x]} f(a), \; 0 \leq x \leq y,$$

με

$$f(a) \quad = \quad r(a) + r(x-a), \; a \in [0, x].$$

Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κοίλη $\big(r'(x)$ γνησίως φθίνουσα$\big)$. Έχουμε

$$\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a).$$

Λύνοντας την $\frac{df(a)}{da} = 0$, παίρνουμε $r'(a) = r'(x-a)$, οπότε $a = x - a$, δηλαδή $a = \frac{x}{2}$. Επίσης, έχουμε $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$. Επομένως, η $f(a)$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{x}{2})$ και φθίνουσα στο $(\frac{x}{2}, x]$ και το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = \frac{x}{2}$. Συνεπώς,

$$v_2(x) \quad = \quad 2r\left(\frac{x}{2}\right), \; 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι η

$$a_2^*(x) \quad = \quad \frac{x}{2}, \; 0 \leq x \leq y.$$

Υποθέσαμε για ευκολία ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κοίλη, αλλά αυτό δεν χρειάζεται. Η υπόθεση ότι η $r(x)$ είναι κοίλη αρκεί. Πράγματι,

$$\frac{1}{2}r(a) + \frac{1}{2}r(x-a) \leq r\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(x-a)\right) = r\left(\frac{x}{2}\right),$$

οπότε

$$r(a) + r(x-a) \leq 2r\left(\frac{x}{2}\right).$$

Επομένως, έχουμε μέχρι στιγμής, ότι

$$\begin{aligned}
v_0(x) &= 0, \; 0 \leq x \leq y, \\
v_1(x) &= r(x), \; 0 \leq x \leq y, \\
a_1^*(x) &= x, \; 0 \leq x \leq y, \\
v_2(x) &= 2r\left(\frac{x}{2}\right), \; 0 \leq x \leq y, \\
a_2^*(x) &= \frac{x}{2}, \; 0 \leq x \leq y.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να εικάσουμε και κατόπιν να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.10 (Λύση συμμετρικού προβλήματος κατανομής πόρων με κοίλη συνάρτηση απόδοσης) *Στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων*

$$\begin{array}{ll}
\max & \sum_{n=1}^{N} r(a_n) \\
\text{υπό} & \\
& \sum_{n=1}^{N} a_n \leq y \\
& a_n \geq 0, \; n = 1, 2, \ldots, N,
\end{array}$$

με $r(x)$ αύξουσα, κοίλη με $r(0) = 0$, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$v_n(x) = nr\left(\frac{x}{n}\right),\ 0 \le x \le y,\ n = 1, 2, \dots, N,$$

με αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση

$$a_n^*(x) = \frac{x}{n},\ 0 \le x \le y,\ n = 1, 2, \dots, N.$$

Δηλαδή, το διαθέσιμο κεφάλαιο πρέπει να επενδυθεί ισόποσα σε όλες τις επιλογές.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ έχουμε δει ότι $v_1(x) = r(x)$ και $a_1^*(x) = x$, οπότε ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n-1$. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση στην εξίσωση βελτιστοποίησης για το στάδιο n έχουμε

$$v_n(x) = \max_{a \in [0,x]} \left(r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right)\right),\ 0 \le x \le y.$$

Έστω

$$f(a) = r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

Υποθέτοντας, για ευκολία, ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κοίλη έχουμε

$$\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

Λύνοντας την $\frac{df(a)}{da} = 0$, παίρνουμε $r'(a) = r'\left(\frac{x-a}{n-1}\right)$, οπότε $a = \frac{x-a}{n-1}$, δηλαδή $a = \frac{x}{n}$. Επίσης, έχουμε $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, \frac{x}{n})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (\frac{x}{n}, x]$. Επομένως, η $f(a)$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{x}{n})$ και φθίνουσα στο $(\frac{x}{n}, x]$ και, άρα, το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = \frac{x}{n}$. Επομένως,

$$v_n(x) = r\left(\frac{x}{n}\right) + (n-1) r\left(\frac{x - x/n}{n-1}\right) = nr\left(\frac{x}{n}\right),\ 0 \le x \le y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_n^*(x) = \frac{x}{n},\ 0 \le x \le y.$$

Οπότε η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε. Υποθέσαμε για ευκολία ότι η $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως κοίλη, αλλά αυτό δεν χρειάζεται. Η υπόθεση ότι η $r(x)$ είναι κοίλη αρκεί. Πράγματι:

$$\frac{1}{n} r(a) + \frac{n-1}{n} r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \le r\left(\frac{1}{n} a + \frac{n-1}{n} \frac{x-a}{n-1}\right) = r\left(\frac{x}{n}\right),$$

οπότε

$$r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \le nr\left(\frac{x}{n}\right).$$

Αρχίζοντας με κεφάλαιο $y_N = y$ για κατανομή σε N επιλογές, το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y}{N}$ στην επιλογή N. Μένει κεφάλαιο $y_{N-1} = \frac{(N-1)y}{N}$ για κατανομή σε $N-1$ επιλογές οπότε το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y_{N-1}}{N-1} = \frac{y}{N}$ στην επιλογή $N-1$ κ.ο.κ. Επομένως, όλο το αρχικά διαθέσιμο κεφάλαιο θα πρέπει να επενδυθεί ισόποσα στις επιλογές.

Το πρόβλημα του σακιδίου (γυλιού)

Το πρόβλημα του σακιδίου είναι η παραλλαγή του προβλήματος κατανομής πόρων που έχει τη μορφή

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{n=1}^{N} r_n a_n \\ \text{υπό} & \\ & \sum_{n=1}^{N} w_n a_n \leq y \\ & a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, N, \end{array}$$

με την επιπλέον απαίτηση (συνήθως) οι a_n να είναι ακέραιες (όλες ή μερικές από αυτές). Αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί στην περίπτωση που κάποιος αποφασίζει να γεμίσει ένα σακίδιο χωρητικότητας y με N τύπους πραγμάτων, όπου ένα αντικείμενο τύπου n αποδίδει ωφέλεια r_n και δεσμεύει χωρητικότητα w_n, για $n = 1, 2, \ldots, N$.

5.6.3 Ένα μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής

Θεωρούμε έναν παίκτη που θα στοιχηματίσει για N γύρους. Σε κάθε γύρο μπορεί να στοιχηματίσει οποιοδήποτε κλάσμα της περιουσίας του και θα κερδίσει ή θα χάσει το κλάσμα που θα στοιχηματίσει με πιθανότητες p και $q = 1 - p$, αντίστοιχα. Ο σκοπός του παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη τιμή κάποιας συνάρτησης της τελικής περιουσίας του που αναπαριστά τη συνάρτηση ωφέλειάς του. Συνήθως, τέτοιου είδους συναρτήσεις υποτίθενται αύξουσες και κοίλες. Στο μοντέλο αυτό που θα επιλύσουμε, θεωρούμε ότι ο παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει τον λογάριθμο της τελικής περιουσίας του.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός n των υπόλοιπων γύρων στοιχημάτων.
- Κατάσταση: Η παρούσα περιουσία του παίκτη, x.
- Απόφαση: Το κλάσμα της περιουσίας, a, που θα στοιχηματίσει ο παίκτης.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, ο μέγιστος αναμενόμενος λογάριθμος της τελικής περιουσίας του παίκτη, όταν αρχίζει με περιουσία x και απομένουν n γύροι στοιχημάτων.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση βελτιστοποίησης έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \log x,\ x > 0, \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,1]} [p v_{n-1}(x(1+a)) + q v_{n-1}(x(1-a))],\ x > 0,\ n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αναδρομικά, για $n = 0, 1, 2$, τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής. Είναι

$$v_0(x) = \log x,\ x > 0,$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max_{a \in [0,1]} [p \log(x(1+a)) + q \log(x(1-a))] \\ &= \max_{a \in [0,1]} [p \log x + p \log(1+a) + q \log x + q \log(1-a)] \\ &= \log x + \max_{a \in [0,1]} [p \log(1+a) + q \log(1-a)] \\ &= \log x + \max_{a \in [0,1]} f(a),\ x > 0. \end{aligned}$$

με

$$f(a) = p \log(1+a) + q \log(1-a).$$

Έχουμε

$$\frac{df(a)}{da} = \frac{p}{1+a} - \frac{q}{1-a} = \frac{p-q-a}{1-a^2}.$$

Λύνοντας την $\frac{df(a)}{da} = 0$, παίρνουμε $a = p - q$ που είναι πιθανό μέγιστο της $f(a)$. Παρατηρούμε επίσης ότι για $a \in (0, 1)$ ο παρονομαστής του $\frac{df(a)}{da}$ είναι θετικός, ενώ ο αριθμητής είναι θετικός για $a < p - q$ και αρνητικός για $a > p - q$. Επομένως, υπάρχουν δυο περιπτώσεις ανάλογα με το αν $p - q < 0$ ή $p - q \geq 0$. Θα εξετάσουμε χωριστά αυτές τις δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $p < q \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{df(a)}{da} < 0$, για κάθε $a \in [0, 1)$ οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $a = 0$. Τότε, η βέλτιστη απόφαση για $n = 1$ είναι $a_1^*(x) = 0$ και

$$v_1(x) = \log x + f(0) = \log x = v_0(x), \ x > 0.$$

Επομένως, για $n = 2$, θα έχουμε επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής και η βέλτιστη απόφαση θα είναι η $a_2^*(x) = 0$ και $v_2(x) = \log x$, $x > 0$. Επαγωγικά θα έχουμε ότι η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο $n = 1, 2, \ldots$ είναι η $a_n^*(x) = 0$ και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι $v_n(x) = \log x$, $x > 0$.

Περίπτωση 2: $p \geq q \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, p - q)$ και $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (p - q, 1)$, οπότε το μέγιστο επιτυγχάνεται για $a = p - q$. Τότε, η βέλτιστη απόφαση για $n = 1$ είναι $a_1^*(x) = p - q$ και

$$v_1(x) = \log x + f(p-q) = \log x + c = v_0(x) + c, \ x > 0,$$

όπου

$$\begin{aligned} c &= f(p-q) = p\log(1+p-q) + q\log(1-p+q) = p\log(2p) + q\log(2q) \\ &= \log 2 + p\log p + q\log q. \end{aligned}$$

Επομένως για $n = 2$ θα έχουμε επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής μια και η ύπαρξη της σταθερής ποσότητας c δεν επηρεάζει τη βελτιστοποίηση. Η βέλτιστη απόφαση θα είναι η $a_2^*(x) = p-q$ και $v_2(x) = 2c+\log x$, $x > 0$. Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο $n = 1, 2, \ldots$ είναι η $a_n^*(x) = p - q$ και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι $v_n(x) = nc + \log x$, $x > 0$.

Έχουμε ολοκληρώσει, έτσι, τον υπολογισμό της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.11 (Συνάρτηση βέλτιστης τιμής και βέλτιστη πολιτική στο μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής) *Αν $p \leq q$, δηλαδή το στοίχημα είναι εις βάρος του παίκτη ή δίκαιο, τότε η βέλτιστη πολιτική του είναι να μη στοιχηματίζει σε κανέναν γύρο, δηλαδή*

$$a_n^*(x) = 0, \ x > 0, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$v_n^*(x) = \log x, \ x > 0, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Αν $p > q$, δηλαδή το στοίχημα είναι συμφέρον για τον παίκτη, τότε η βέλτιστη πολιτική του είναι να στοιχηματίζει κλάσμα $p - q$ της περιουσίας του σε κάθε γύρο, δηλαδή

$$a_n^*(x) = p - q, \ x > 0, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι

$$v_n^*(x) = \log x + nc, \ x > 0, \ n = 1, 2, \ldots,$$

με $c = \log 2 + p\log p + q\log q$.

Η βέλτιστη πολιτική δεν εξαρτάται από το στάδιο στο οποίο βρισκόμαστε, είναι δηλαδή μια στάσιμη πολιτική. Επιπλέον, υπαγορεύει την ίδια απόφαση για κάθε κατάσταση x.

5.6.4 Το πρόβλημα της συντήρησης - αντικατάστασης μηχανήματος

Μια μηχανή επιθεωρείται στις αρχές N διαδοχικών περιόδων. Ο επιθεωρητής, λαμβάνοντας υπόψη την ηλικία της μηχανής, αποφασίζει αν θα τη συντηρήσει ή θα την αντικαταστήσει. Αν η μηχανή έχει φθάσει στη μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία k που ορίζουν οι προδιαγραφές της, θα πρέπει υποχρεωτικά να αντικατασταθεί. Αν ο επιθεωρητής αποφασίσει να αντικαταστήσει προληπτικά τη μηχανή, η μηχανή θα είναι καινούργια (ηλικίας 0) στην αρχή της επόμενης περιόδου και η μηχανή θα αποδώσει καθαρό κέρδος λ. Αν ο επιθεωρητής αποφασίσει να συντηρήσει τη μηχανή, τότε αν η ηλικία της είναι x, θα χαλάσει με πιθανότητα q_x. Στην περίπτωση αυτή θα αντικατασταθεί επειγόντως από καινούργια και θα αποδώσει καθαρό κέρδος γ. Αν δεν χαλάσει, τότε θα αποδώσει καθαρό κέρδος $h(x)$. Η μηχανή στο τέλος των t περιόδων θα πωληθεί και το καθαρό κέρδος θα είναι $r(x)$, αν η ηλικία της είναι x.

Υποθέτουμε ότι

- $\gamma < \lambda < h(x), \; x \geq 0$. Η συνθήκη αυτή υπαγορεύει το κόστος επείγουσας αντικατάστασης να είναι μεγαλύτερο από το κόστος προληπτικής αντικατάστασης, που με τη σειρά του θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το κόστος συντήρησης της μηχανής, όποια κι αν είναι η ηλικία της.
- q_x αύξουσα ως προς x. Η συνθήκη αυτή υπαγορεύει η πιθανότητα βλάβης της μηχανής να είναι αύξουσα συνάρτηση της ηλικίας της. Με όρους Θεωρίας Πιθανοτήτων, αντιστοιχεί στο ότι η κατανομή του χρόνου ζωής της μηχανής είναι αύξοντος ρυθμού βλάβης (increasing failure rate - IFR).
- $h(x)$ φθίνουσα ως προς x. Η συνθήκη αυτή υπαγορεύει το κόστος συντήρησης του μηχανήματος να είναι μεγαλύτερο καθώς μεγαλώνει η ηλικία του μηχανήματος.
- $r(x)$ φθίνουσα ως προς x. Η συνθήκη αυτή υπαγορεύει η αξία πώλησης του μηχανήματος στο τέλος του χρονικού ορίζοντα να μειώνεται όσο μεγαλώνει η ηλικία του μηχανήματος.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\gamma = 0$, αφαιρώντας την ποσότητα αυτή από όλες τις αμοιβές. Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός των υπόλοιπων περιόδων, n.
- Κατάσταση: Η ηλικία του μηχανήματος, x.
- Απόφαση: Προληπτική συντήρηση ή αντικατάσταση.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη μέση συνολική αμοιβή για n περιόδους, $v_n(x)$, ξεκινώντας με μηχάνημα ηλικίας x.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση βελτιστοποίησης έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} v_0(x) &= r(x), \quad 0 \leq x \leq k, \\ v_n(x) &= \max[(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1)) + q_x v_{n-1}(0), \lambda + v_{n-1}(0)] \\ &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda, 0] \\ &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0], \quad 0 \leq x \leq k, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

όπου

$$u_n(x) = (1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda.$$

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι η βέλτιστη πολιτική είναι τύπου κατωφλίου, δηλαδή υπαγορεύει προληπτική συντήρηση όταν η ηλικία x είναι μικρότερη ή ίση από μια κρίσιμη τιμή x^*, ενώ υπαγορεύει αντικατάσταση όταν η ηλικία x είναι μεγαλύτερη από x. Για να γίνει αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι αν η συνάρτηση $u_n(x)$ παίρνει αρνητική τιμή για κάποια τιμή x_0, τότε ισχύει $u_n(x) < 0$ για κάθε $x \geq x_0$. Η απόδειξη βασίζεται στη μονοτονία της $v_n(x)$. Συγκεκριμένα έχουμε το το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.12 (Μονοτονία συνάρτησης βέλτιστης τιμής και βέλτιστη πολιτική)

1. *Στο πρόβλημα συντήρησης - αντικατάστασης μηχανήματος, η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της ηλικίας x για κάθε $n \geq 0$.*

2. *Η συνάρτηση $u_n(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x όταν παίρνει μη αρνητικές τιμές, ενώ αν $u_n(x_0) < 0$ για κάποιο x_0, τότε $u_n(x) < 0$ για κάθε $x \geq x_0$.*

3. *Για κάθε στάδιο n, υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός (κατώφλι) c_n, τέτοιος ώστε η βέλτιστη πολιτική να υπαγορεύει να συντηρείται η μηχανή όταν $x \in \{0, 1, 2, \ldots, c_n\}$ και να αντικαθίσταται αν $x \in \{c_n+1, c_n+2, \ldots, k\}$. Ο αριθμός αυτός δίνεται από τη σχέση*

$$\begin{aligned} c_n &= \max\{x : u_n(x) \geq 0\} \\ &= \max\{x : (1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

Οι τρεις ισχυρισμοί του θεωρήματος αποδεικνύονται με ταυτόχρονη επαγωγή στο n. Συγκεκριμένα, για $n = 0$, έχουμε $v_0(x) = r(x)$ που είναι φθίνουσα από αρχική υπόθεση. Έστω ότι η $v_{n-1}(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x, για κάποιο $n \geq 1$. Τότε για n θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύουν οι ισχυρισμοί 2 και 3, και από αυτούς ότι ισχύει και ο ισχυρισμός 1 για να ολοκληρωθεί η επαγωγή.

Για τον ισχυρισμό 2 έχουμε ότι

$$u_n = (1 - q_x)g(x),$$

όπου η $1 - q_x$ είναι μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση του x, ενώ η $g(x) = h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x από την επαγωγική υπόθεση και το γεγονός ότι η $h(x)$ είναι φθίνουσα. Έστω ότι $u_n(x) \geq 0$ για κάποιο x, επομένως $g_n(x) \geq 0$. Τότε έχουμε

$$(1-q_{x+1})g(x+1) - (1-q_x)g(x) = (1-q_{x+1})(g(x+1) - g(x)) + \Big[(1-q_{x+1}) - (1-q_x)\Big]g(x) \leq 0.$$

Η ανισότητα στην προηγούμενη σχέση ισχύει επειδή οι $g(x)$ και $1 - q_x$ είναι φθίνουσες, ενώ $1 - q_x \geq 0$ και $g(x) \geq 0$.

Έστω τώρα ότι $u_n(x_0) < 0$ για κάποιο x_0, επομένως $g(x_0) < 0$. Τότε, επειδή η $g(x)$ ειναι φθίνουσα, έχουμε $g(x) \leq g(x) < 0$, επομένως $u_n(x) < 0$, για κάθε $x \geq x_0$.

Έχουμε επομένως αποδείξει τον ισχυρισμό 2 του θεωρήματος για n. Έστω $c_n = \max\{x : u_n(x) \geq 0\}$. Από τον ισχυρισμό 2 έχουμε ότι $u_n(x) \geq 0$ για $x \leq c_n$ και $u_n(x) < 0$ για $x > c_n$, επομένως προκύπτει άμεσα ο ισχυρισμός 3.

Τέλος για τον ισχυρισμό 1 παρατηρούμε ότι

$$v_n(x) = \max[u_n(x), 0] = \begin{cases} u_n(x), & x \leq c_n \\ 0, & x > c_n \end{cases}.$$

Επομένως η $v_n(x)$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική για $x \leq c_n$ και ίση με μηδέν για $x > c_n$, δηλαδή είναι φθίνουσα για $x \geq 0$.

5.7 Εφαρμογές με το επιχείρημα της ανταλλαγής

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια κατηγορία προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού, στα οποία υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύνολο αποφάσεων που πρέπει να ληφθούν σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα και το ερώτημα είναι η βέλτιστη διάταξή τους. Τα προβλήματα αυτά, πέρα από τον κλασικό τρόπο επίλυσης με επαγωγικά επιχειρήματα, μπορούν να λυθούν ευκολότερα με χρήση του επιχειρήματος της ανταλλαγής, το οποίο θα παρουσιαστεί μέσω δυο κλασικών εφαρμογών.

5.7.1 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών

Μια μηχανή πρόκειται να διεκπεραιώσει ακολουθιακά N εργασίες, έστω τις $1, 2, \dots, N$. Είναι γνωστός ο χρόνος διεκπεραίωσης της εργασίας i, έστω x_i, $i = 1, 2, \dots, N$. Το ζητούμενο είναι να αποφασιστεί η σειρά διεκπεραίωσης των εργασιών που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των χρόνων παραμονής όλων των N εργασιών.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathscr{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το ελάχιστο άθροισμα των χρόνων παραμονής των εργασιών, $v_n(\mathscr{S})$, του $\mathscr{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε την εξίσωση βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} v_0(\emptyset) &= 0, \\ v_n(\mathscr{S}) &= \min_{i \in \mathscr{S}} [n x_i + v_{n-1}(\mathscr{S} \setminus \{i\})], \ \mathscr{S} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \ |\mathscr{S}| = n, \ n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι απομένουν για διεκπεραίωση οι n εργασίες του συνόλου $\mathscr{S}$. Αν αποφασιστεί η επόμενη εργασία προς διεκπεραίωση να είναι η i, τότε η άμεση συνέπεια στον συνολικό χρόνο παραμονής όλων των εργασιών θα είναι nx_i, επειδή καθεμία από τις n εργασίες του $\mathscr{S}$ (συμπεριλαμβανομένης της εργασίας i) πρέπει να περιμένει x_i χρονικές μονάδες για τη διεκπεραίωση της i. Μετά το τέλος της διεκπεραίωσης της i, θα υπάρχουν στο σύστημα οι $n - 1$ εργασίες του $\mathscr{S} \setminus \{i\}$ που θα απομένουν να διεκπεραιωθούν.

Υπολογίζουμε αναδρομικά, για $n = 1, 2, 3$, τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής, χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης. Έχουμε:

$$\begin{aligned} v_1(\{i\}) &= x_i + v_0(\emptyset) = x_i, \ \{i\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \\ v_2(\{i, j\}) &= \min[2x_i + v_1(\{j\}), 2x_j + v_1(\{i\})] = \min[2x_i + x_j, 2x_j + x_i] \\ &= x_i + x_j + \min[x_i, x_j] = 2x_i + x_j, \ \text{αν } x_i \leq x_j, \ \{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη των x_i και x_j για να προσδιορίσουμε την $v_2(\{i, j\})$. Είναι φανερό ότι αυτό θα χρειάζεται και παρακάτω, δηλαδή, για τον υπολογισμό της $v_3(\{i, j, k\})$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη διάταξη των x_i, x_j και x_k. Οπότε, υποθέτουμε μια τέτοια διάταξη, έστω $x_i \leq x_j \leq x_k$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} v_3(\{i, j, k\}) &= \min[3x_i + v_2(\{j, k\}), 3x_j + v_2(\{i, k\}), 3x_k + v_2(\{i, j\})] \\ &= \min[3x_i + 2x_j + x_k, 3x_j + 2x_i + x_k, 3x_k + 2x_i + x_j] \\ &= 3x_i + 2x_j + x_k, \ \text{αν } x_i \leq x_j \leq x_k, \ \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Φαίνεται, λοιπόν, ότι η βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των εργασιών είναι να διατάξουμε αυτές κατά αύξουσα σειρά των αντίστοιχων χρόνων εκτέλεσής τους. Και τότε η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(\mathscr{S})$ δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των χρόνων εκτέλεσης των εργασιών του $\mathscr{S}$ με συντελεστές $n, n - 1, \dots, 1$. Έχουμε, επομένως, το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.13 (Λύση ελαχιστοποίησης συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών προς διεκπεραίωση) *Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών προς διεκπεραίωση δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) &= n x_{i_1} + (n-1) x_{i_2} + (n-2) x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\ &\quad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \ \textit{με} \ x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \dots x_{i_n}. \end{aligned}$$

Η βέλτιστη απόφαση είναι

$$\begin{aligned} a_n^*(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) &= i_1, \\ &\qquad \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\} \text{ με } x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \dots x_{i_n}. \end{aligned}$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n = 0, 1$ έχει ήδη αποδειχθεί. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n. Από την εξίσωση βελτιστοποίησης έχουμε:

$$\begin{aligned} v_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) &= \min[nx_{i_1} + v_{n-1}(\{i_2, i_3, \dots, i_n\}), \\ &\qquad nx_{i_2} + v_{n-1}(\{i_1, i_3, \dots, i_n\}), \dots \\ &\qquad nx_{i_n} + v_{n-1}(\{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}\}] \\ &= \min[nx_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + (n-2)x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\ &\qquad nx_{i_2} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \dots \\ &\qquad nx_{i_n} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + x_{i_{n-1}}]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που αντιστοιχει στην επιλογή της εργασίας i_k για επόμενη διεκπεραίωση είναι η

$$\begin{aligned} & nx_{i_k} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + (n-k+1)x_{i_{k-1}} \\ & \quad +(n-k)x_{i_{k+1}} + \cdots + x_{i_n} \\ = \; & nx_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1}(n-j)x_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)x_{i_j} \\ = \; & \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j}. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι το ελάχιστο της παράστασης αυτής επιτυγχάνεται για $k = 1$. Πράγματι αν πάρουμε τη διαφορά της παράστασης για ένα τυχόν k και για $k = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j} - \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} - x_{i_1} - \sum_{j=2}^{n} x_{i_j} \\ = \; & \sum_{j=1}^{k}(x_{i_k} - x_{i_j}) \geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα του θεωρήματος 5.13 για τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής και τη βέλτιστη πολιτική.

Σε προβλήματα, όπως αυτό, όπου το ζητούμενο δεν είναι να αποφασίσουμε ποιες αποφάσεις να πάρουμε, αλλά υπάρχει ένα σύνολο αποφάσεων που πρέπει να ληφθούν στα επόμενα στάδια και πρέπει να τις διατάξουμε βέλτιστα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το παρακάτω «επιχείρημα ανταλλαγής»:

Όντας σε μια κατάσταση, συγκρίνουμε για οποιεσδήποτε δυο διαθέσιμες αποφάσεις a και a' τα συνολικά κόστη αν χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα δύο στάδια πρώτα την a και μετά την a' ή πρώτα την a' και μετά την a, και μετά συνεχίσουμε βέλτιστα. Κατόπιν χρησιμοποιούμε επαγωγή.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, από την εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 2, 3, \dots, N$, έχουμε

$$v_n(\mathscr{S}) = \min_{i \in \mathscr{S}} \min_{j \in \mathscr{S} \setminus \{i\}} [nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\})].$$

Για δοθέντα $i, j \in \mathscr{S}$, το συνολικό κόστος αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$nx_j + (n-1)x_i + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i,j\}),$$

με διαφορά $x_i - x_j$. Επομένως είναι προτιμότερο να πάρουμε πρώτα την απόφαση i αν $x_i - x_j \leq 0$, δηλαδή αν $x_i \leq x_j$. Επομένως, ευρισκόμενοι σε μια κατάσταση $\mathscr{S}$, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i,j \in \mathscr{S}$ είναι καλύτερο να διαλέξουμε για διεκπεραίωση την εργασία εκείνη που έχει τον μικρότερο χρόνο διεκπεραίωσης.

5.7.2 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης απόδοσης μέχρι μια βλάβη

Μια μηχανή πρόκειται να επεξεργαστεί ακολουθιακά N εργασίες $1,2,\dots,N$. Η πιθανότητα επιτυχούς περαίωσης της εργασίας i είναι p_i, ή, ισοδύναμα, η πιθανότητα βλάβης κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας της είναι $1-p_i$, $i=1,2,\dots,N$. Η αμοιβή της επιτυχούς διεκπεραίωσης της εργασίας i είναι x_i. Όταν η μηχανή υποστεί βλάβη κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας μιας εργασίας δεν μπορεί να την ολοκληρώσει, οπότε δεν λαμβάνει αμοιβή για τη διεκπεραίωσή της, ούτε και συνεχίζει με τις υπόλοιπες εργασίες.

Το ζητούμενο είναι ο προγραμματισμός της σειράς εκτέλεσης των εργασιών που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική αμοιβή μέχρι την εμφάνιση βλάβης.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathscr{S}$, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο άθροισμα αμοιβών, $v_n(\mathscr{S})$, από τις εργασίες του $\mathscr{S}$, μέχρι την εμφάνιση βλάβης, δεδομένου ότι αυτή δεν έχει συμβεί ακόμη.

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε την εξίσωση βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} v_0(\emptyset) &= 0, \\ v_n(\mathscr{S}) &= \max_{i\in\mathscr{S}}[p_i(x_i + v_{n-1}(\mathscr{S} \setminus \{i\}))],\ \mathscr{S} \subseteq \{1,2,\dots,N\},\ |\mathscr{S}| = n,\ n = 1,2,\dots,N. \end{aligned}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά, για $n=1,2$, τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής, χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης, να εικάσουμε τη γενική της μορφή και να αποδείξουμε επαγωγικά το ακόλουθο αποτέλεσμα, όπως κάναμε και για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών. Το τελικό αποτέλεσμα υπαγορεύει να διατάξουμε τις εργασίες κατά φθίνουσα σειρά των αντίστοιχων ποσοτήτων $\frac{p_j x_j}{1-p_j}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.14 (Λύση προβλήματος μεγιστοποίησης της συνολικής απόδοσης μέχρι μια βλάβη) *Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνολικής απόδοσης μέχρι μια βλάβη δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} v_n(\{i_1,i_2,\dots,i_n\}) &= p_{i_1}x_{i_1} + p_{i_1}p_{i_2}x_{i_2} + p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}x_{i_3} + \cdots + p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}x_{i_n}, \\ & \quad \{i_1,i_2,\dots,i_n\} \subseteq \{1,2,\dots,N\} \\ & \quad \mu\varepsilon\ \frac{p_{i_1}x_{i_1}}{1-p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}x_{i_2}}{1-p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3}x_{i_3}}{1-p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n}x_{i_n}}{1-p_{i_n}}. \end{aligned}$$

Η βέλτιστη απόφαση είναι

$$\begin{aligned} a_n^*(\{i_1,i_2,\dots,i_n\}) &= i_1, \\ & \quad \{i_1,i_2,\dots,i_n\} \subseteq \{1,2,\dots,N\} \\ & \quad \mu\varepsilon\ \frac{p_{i_1}x_{i_1}}{1-p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}x_{i_2}}{1-p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3}x_{i_3}}{1-p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n}x_{i_n}}{1-p_{i_n}}. \end{aligned}$$

Η απόδειξη με τον κλασικό τρόπο είναι αρκετά περίπλοκη, οπότε χρησιμοποιούμε το επιχείρημα της ανταλλαγής. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η εξίσωση βελτιστοποίησης για $n = 2, 3, \dots, N$ δίνει

$$v_n(\mathscr{S}) = \max_{i \in \mathscr{S}} \max_{j \in \mathscr{S} \setminus \{i\}} [p_i(x_i + p_j(x_j + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\})))].$$

Για δοθέντα $i, j \in \mathscr{S}$, η αναμενόμενη συνολική αμοιβή αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\}).$$

Συγκρίνοντάς τες, έχουμε

$$\begin{aligned} & p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\}) \geq p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathscr{S} \setminus \{i, j\}) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{p_i x_i}{1 - p_i} \geq \frac{p_j x_j}{1 - p_j}. \end{aligned}$$

Επομένως, ευρισκόμενοι σε μια κατάσταση $\mathscr{S}$, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathscr{S}$ είναι καλύτερο να διαλέξουμε για διεκπεραίωση την εργασία i που έχει τον μεγαλύτερο λόγο $\frac{p_i x_i}{1-p_i}$.

5.8 Ασκήσεις

Άσκηση 5.1 *Να μοντελοποιήσετε και να λύσετε με δυναμικό προγραμματισμό το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού*

$$\min_{a_1, a_2, \dots, a_N} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2}{n}$$

υπό

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = x$$

$$a_n \geq 0, \ n = 1, 2, \dots, N.$$

Άσκηση 5.2 *Έχουμε κεφάλαιο y χρηματικών μονάδων που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε για την επιτυχή κατασκευή ενός συστήματος. Έχουμε το πολύ N προσπάθειες για να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύστημα. Αν σε μια προσπάθεια επενδύσουμε x χρηματικές μονάδες, τότε το σύστημα θα κατασκευαστεί επιτυχώς με πιθανότητα $p(x)$, όπου $p(0) = 0$, $p(y) < 1$ και η $p(x)$ είναι αύξουσα στο $[0, y]$. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε τη βέλτιστη πολιτική επένδυσης $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, όπου x_i είναι το ποσό που θα επενδύσουμε στην i προσπάθεια $(i = 1, 2, \dots, N)$, ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα επιτυχούς κατασκευής συστήματος.*

1. *Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού (δηλ. να διατυπωθεί η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί).*

2. *Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού (δηλ. να δοθούν τα στάδια, οι καταστάσεις, οι αποφάσεις κλπ.).*

3. *Να διατυπωθεί μια εξίσωση βελτιστοποίησης δυναμικού προγραμματισμού.*

4. *Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική, αν η $\log(1 - p(x))$ είναι κυρτή.*

5. *Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική, αν η* $\log(1-p(x))$ *είναι κοίλη.*

Άσκηση 5.3 *Να μοντελοποιήσετε με δυναμικό προγραμματισμό και να διατυπώσετε την εξίσωση βελτιστοποίησης για το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού*

$$\min_{a_1,a_2,\ldots,a_N} \sum_{n=1}^{N} r_n(a_n, a_{n+1})$$

υπό

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n = x$$

$$a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, N, N+1, \nu$$

όπου $r_1, r_2, \ldots, r_N$ *είναι δοσμένες συναρτήσεις και* x *μη-αρνητικός αριθμός.*

Άσκηση 5.4 *Θεωρούμε έναν τζογαδόρο που πρόκειται να ποντάρει για* N *γύρους. Σε κάθε γύρο επιτρέπεται να ποντάρει όποιο κλάσμα της περιουσίας του επιθυμεί. Η πιθανότητα να κερδίσει σε έναν γύρο δεν είναι σταθερή, αλλά γίνεται γνωστή στον τζογαδόρο, πριν να αποφασίσει το κλάσμα της περιουσίας του που θα στοιχηματίσει στον γύρο. Η πιθανότητα αυτή επιλέγεται τυχαία, σύμφωνα με μια κατανομή* $F(x)$ $(F(0) = 0$ *και* $F(1) = 1)$. *Ο στόχος του τζογαδόρου είναι να μεγιστοποιήσει τον λογάριθμο της τελικής περιουσίας του. Να βρεθούν η βέλτιστη πολιτική του τζογαδόρου και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής.*

Άσκηση 5.5 *Σε έναν εμπορευματικό σταθμό φθάνουν* j *εμπορεύματα ενός συγκεκριμένου τύπου κάθε μέρα με πιθανότητα* p_j $(p_j \geq 0$ *για* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *και* $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1)$. *Στο τέλος της ημέρας, πρέπει να ληφθεί η απόφαση κατά πόσο θα ξεκινήσει η αποστολή όλων των συσσωρευμένων εμπορευμάτων του συγκεκριμένου τύπου ή όχι. Το κόστος μιας τέτοιας αποστολής είναι* K, *ανεξάρτητο από το πλήθος των συσσωρευμένων εμπορευμάτων. Αν ληφθεί η απόφαση να μην ξεκινήσει η αποστολή, τότε υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης* c *ανά μονάδα εμπορεύματος και ανά μέρα. Ο εμπορευματικός σταθμός θα λειτουργήσει για τις επόμενες* N *μέρες και το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια πολιτική λειτουργίας που να ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος λειτουργίας (έξοδα αποστολών και αποθήκευσης). Είναι υποχρεωτικό στο τέλος των* N *ημερών όλα τα συσσωρευμένα εμπορεύματα να έχουν αποσταλεί.*

1. *Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού (δηλ. να δοθούν τα στάδια, οι καταστάσεις, οι αποφάσεις κλπ.).*

2. *Να γραφεί η εξίσωση βελτιστοποίησης.*

3. *Να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη πολιτική έχει την ακόλουθη μορφή: Στο τέλος μιας μέρας* n *γίνεται αποστολή, αν ο αριθμός των συσσωρευμένων εμπορευμάτων είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάποια τιμή* s_n.

4. *Περιγράψτε έναν τρόπο εύρεσης των κρίσιμων αριθμών* $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

5. *Είναι η ακολουθία* $s_1, s_2, \ldots, s_N$ *μονότονη;*

Άσκηση 5.6 *Μια μηχανή πρόκειται να διεκπεραιώσει ακολουθιακά* N *εργασίες,* $1, 2, \ldots, N$. *Η εργασία* i *απαιτεί χρόνο διεκπεραίωσης* X_i, *που έχει την κατανομή* $Exp(\lambda_i)$. *Όταν η εργασία* i *περαιωθεί τη στιγμή* s, *τότε ο διαχειριστής της μηχανής κερδίζει* r_i. *Όμως, η παρούσα αξία της αμοιβής* r_i *αν πληρωθεί τη στιγμή* s *είναι* $\alpha^s r_i$, *όπου* $\alpha \in (0, 1)$ *είναι κάποιος γνωστός δοσμένος αποπληθωριστής. Να βρεθεί η βέλτιστη σειρά διεκπεραίωσης των εργασιών, που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική αποπληθωρισμένη αμοιβή από όλες τις εργασίες.*

Άσκηση 5.7 *Μια μηχανή πρόκειται να διεκπεραιώσει ακολουθιακά* N *εργασίες, έστω τις* $1, 2, \ldots, N$. *Ο χρόνος διεκπεραίωσης της εργασίας* i *είναι γνωστός, έστω* x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. *Επίσης, το κόστος αναμονής για την εργασία* i *είναι* c_i *ανά χρονική μονάδα που παραμένει στο σύστημα. Να βρεθεί η βέλτιστη σειρά διεκπεραίωσης των εργασιών, που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος αναμονής από όλες τις εργασίες.*

Άσκηση 5.8 *Θεωρούμε το ακόλουθο παιχνίδι: Υπάρχουν $3N$ κάρτες, που η καθεμία έχει γραμμένη πάνω της κάποια αξία. Οι κάρτες μοιράζονται σε 3 ομάδες των N καρτών. Ο πρώτος παίκτης παίρνει τις κάρτες με αξίες $a_1, a_2, \dots, a_N$, όπου $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_N$, ο δεύτερος παίκτης παίρνει τις κάρτες με αξίες $b_1, b_2, \dots, b_N$, όπου $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_N$, ενώ στο κέντρο μένει μια στοίβα με κάρτες με αξίες $c_1, c_2, \dots, c_N$, όπου $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_N$. Οι παίκτες είναι ενήμεροι για το ποιες κάρτες έχει πάρει ο καθένας και ποιες είναι στη στοίβα. Το παιχνίδι παίζεται ως εξής: Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού μια κάρτα της στοίβας εμφανίζει την αξία της. Τότε οι δυο παίκτες, αφού δουν την αξία της, τοποθετούν ταυτόχρονα μια κάρτα ο καθένας στο τραπέζι. Όποιος έχει την κάρτα με τη μεγαλύτερη αξία κερδίζει από τον άλλο τόσες χρηματικές μονάδες όσες γράφει η κάρτα της στοίβας που έχει εμφανιστεί. Κατόπιν οι τρεις κάρτες (της στοίβας και των δυο παικτών) απομακρύνονται και αρχίζει ένας νέος γύρος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται N φορές (γύρους), μέχρι να εξαντληθούν όλες οι κάρτες. Αν ο δεύτερος παίκτης διαλέγει πάντα στην τύχη μία από τις κάρτες του και την εμφανίζει και αυτή του η στρατηγική είναι γνωστή στον πρώτο παίκτη, να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική του πρώτου παίκτη που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κέρδος του.*

5.9 Σχόλια

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός εισήχθη από τον Bellman, ο οποίος και συνέγραψε το πρώτο σχετικό σύγγραμμα, Bellman 1957, ενώ ανάμεσα στα θεμελιώδη πρώιμα έργα στην περιοχή συγκαταλέγονται τα συγγράμματα Howard 1960 και Derman 1970. Η σημασία της μεθοδολογίας του Δυναμικού Προγραμματισμού αναγνωρίστηκε άμεσα και η περιοχή αυτή βρήκε τη θέση της μεταξύ των βασικών θεμάτων της Επιχειρησιακής Έρευνας, πράγμα που αντικατοπτρίζεται και στη συμπερίληψή της στα κλασικά συγγράμματα Επιχειρησιακής Έρευνας, όπως τα Hillier και Lieberman 2015 και Taha 2018.

Κάποια κλασικά εισαγωγικά συγγράμματα στη θεωρία του Δυναμικού Προγραμματισμού και των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων με εφαρμογές σε ποικίλα πεδία είναι τα Bertsekas 2017, Bertsekas 2012, Ross 1983 και Puterman 1994.

Μια παρουσίαση της θεωρίας του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού με έμφαση στην εφαρμογή του στον βέλτιστο έλεγχο συστημάτων εξυπηρέτησης δίνεται στο αρκετά θεωρητικό βιβλίο Sennott 1998. Για μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού με εφαρμογές στη Θεωρία Ουρών Αναμονής, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να δει το εισαγωγικό βιβλίο των Cassandras και Lafortune 2008. Μια μεθοδολογία που έχει αναπτυχθεί για την εφαρμογή του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού στα συστήματα εξυπηρέτησης με καλά αποτελέσματα αναπτύσσεται στην εργασία του Koole 2007.

Βιβλιογραφία

[1] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[2] R. Howard. *Dynamic Programming and Markov Processes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1960.

[3] C. Derman. *Finite State Markovian Decision Processes*. New York, NY: Academic Press, 1970.

[4] F.S. Hillier και G.J. Lieberman. *Introduction to Operations Research, 10th edition*. New York, NY: McGraw-Hill, 2015.

[5] H.A Taha. *Operations Research: An Introduction, 10th edition*. Pearson, 2018.

[6] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 1, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2017. ISBN: 978-1886529434.

[7] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 2: Approximate Dynamic Programming, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2012. ISBN: 978-1886529441.

[8] S. Ross. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. New York, NY: Academic Press, 1983.

[9] M. Puterman. *Markov Decision Processes*. New York, NY: Wiley, 1994.

[10] L.I. Sennott. *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*. Wiley-Interscience, 1998. ISBN: 978-0471161202.

[11] C.G. Cassandras και S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems, 2nd Edition*. Springer, 2008.

[12] G. Koole. "Monotonicity in Markov Reward and Decision Chains: Theory and Applications". Στο: *Foundations and Trends in Stochastic Systems* 1.1 (2007), σσ. 1–76.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ: ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΠΛΗΘΩΡΙΣΜΕΝΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνουμε το πλαίσιο ακολουθιακής λήψης αποφάσεων που οδηγεί στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα. Καταρχάς παρουσιάζονται οι αναγκαίες προσαρμογές του πλαισίου που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5, ώστε να καταστεί δυνατή η μελέτη προβλημάτων άπειρου χρονικού ορίζοντα. Κατόπιν, αναπτύσσεται η βασική θεωρία που αφορά την εξίσωση βελτιστοποίησης και τον χαρακτηρισμό της βέλτιστης πολιτικής μέσω αυτής.

Στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων που μοντελοποιούνται από Μαρκοβιανές Αποφάσεων σε άπειρο ορίζοντα: η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών, η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο των πολιτικών και η λύση με Γραμμικό Προγραμματισμό. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με διάφορες επεκτάσεις του βασικού μοντέλου που είναι χρήσιμες για τις εφαρμογές.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη, όπως αυτή περιγράφεται στο κεφάλαιο 3, καθώς και της θεωρίας των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων σε πεπερασμένο ορίζοντα που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 5.

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε ένα πρώτο μοντέλο επέκτασης της Μαρκοβιανής Διαδικασίας Αποφάσεων που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 5, για την περίπτωση όπου το σύστημα πρόκειται να λειτουργήσει

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

για απεριόριστο αριθμό σταδίων και ο διαχειριστής καλείται να σχεδιάσει μια πολιτική λήψης αποφάσεων σε άπειρο ορίζοντα.

Τα προβλήματα άπειρου ορίζοντα έχουν πρακτικό ενδιαφέρον γιατί επιτρέπουν τη μοντελοποίηση συστημάτων όπου ο διαχειριστής δεν καθορίζει εκ των προτέρων τον αριθμό των σταδίων. Έχουν εφαρμογή σε περιπτώσεις όπου ο αριθμός των σταδίων είναι πολύ μεγάλος και προσεγγιστικά θεωρείται άπειρος, είτε σε περιπτώσεις όπου η λήψη αποφάσεων σταματά σε κάποιο στάδιο που δεν καθορίζεται εκ των προτέρων αλλά αφού ικανοποιηθεί μια συνθήκη που εξαρτάται από την πορεία του συστήματος (π.χ., την πρώτη φορά που το σύστημα θα φτάσει σε μια συγκεκριμένη κατάσταση).

Από μαθηματική άποψη τα προβλήματα άπειρου ορίζοντα παρουσιάζουν μια δυσκολία όσον αφορά τον ορισμό του κριτηρίου βελτιστότητας και την εξασφάλιση συνθηκών για ύπαρξη βέλτιστης τιμής και βέλτιστων πολιτικών. Από την άλλη πλευρά, το γεγονός ότι δεν υπάρχει προκαθορισμένο τέλος του ορίζοντα επιτρέπει σε πολλές περιπτώσεις την εφαρμογή χρονικά ομογενών πολιτικών που δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των υπολειπόμενων σταδίων, και επομένως είναι απλούστερες στην περιγραφή και την εφαρμογή τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα. Όπως και στο βασικό μοντέλο πεπερασμένου ορίζοντα, θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X}$ και σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x), x \in \mathscr{X}$. Υποθέτουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμο σύνολο και τα σύνολα αποφάσεων πεπερασμένα. Το σύστημα παρατηρείται σε διαδοχικές χρονικές στιγμές (στάδια) $t = 0, 1, 2, \ldots$. Αν σε κάποιο στάδιο t η κατάσταση είναι $X_t = x$ και ληφθεί η απόφαση $A_t = a$, τότε προκαλείται ένα άμεσο κόστος $c(x, a)$ και το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση $X_{t+1} = y$ με πιθανότητα $p_{xy}(a)$.

Θεωρούμε τη χρονικά ομογενή περίπτωση όπου τα άμεσα κόστη και οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από το τρέχον στάδιο t. Επίσης, θα κάνουμε αρχικά την υπόθεση ότι τα άμεσα κόστη είναι φραγμένα, δηλαδή ότι υπάρχει μια σταθερά $M < \infty$ τέτοια ώστε

$$|c(x, a)| \leq M, \tag{6.1}$$

για κάθε ζεύγος (x, a). Η υπόθεση αυτή διευκολύνει την ανάλυση, όμως μπορεί να γενικευθεί όπως θα δούμε στο τέλος του κεφαλαίου.

Όπως και στην περίπτωση του πεπερασμένου ορίζοντα, ο τρόπος λήψης αποφάσεων καθορίζεται γενικά μέσω μιας πολιτικής, δηλαδή ενός κανόνα που ορίζει την απόφαση που λαμβάνεται σε κάθε στάδιο συναρτήσει της προηγούμενης ιστορίας καταστάσεων και αποφάσεων. Στο πλαίσιο που έχουμε ορίσει εδώ η ιστορία του συστήματος στο στάδιο t είναι ένα διάνυσμα που καθορίζει τις καταστάσεις και αποφάσεις μέχρι και την κατάσταση x_t:

$$h_t = x_0 a_0 x_1 a_1 \cdots x_{t-1} a_{t-1} x_t.$$

Μια πολιτική ορίζεται ως μια ακολουθία $\pi = (\pi(0), \pi(1), \ldots)$, όπου η $\pi(t)$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των δυνατών ιστοριών στο στάδιο t και πεδίο τιμών τις κατανομές πιθανότητας στο σύνολο των δυνατών αποφάσεων. Δεδομένης μιας ιστορίας h_t μέχρι το στάδιο t, η $\pi_{h_t}(a; t)$ είναι η πιθανότητα να ληφθεί η απόφαση a στο στάδιο t.

Εντελώς αντίστοιχα με το Κεφάλαιο 5.4 μπορούμε να ορίσουμε τις κλάσεις των ιστοριοεξαρτώμενων, των Μαρκοβιανών, των στάσιμων, των τυχαιοποιημένων και των προσδιοριστικών πολιτικών όπως επίσης και συνδυασμούς των παραπάνω. Στο κεφάλαιο αυτό παίζουν σημαντικό ρόλο οι στάσιμες ντετερμινιστικές πολιτικές της κλάσης Π^{SD}. Μια πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$ είναι μια συνάρτηση από τον χώρο καταστάσεων στο σύνολο αποφάσεων, με την ιδιότητα $\pi(x) \in \mathscr{A}(x), x \in \mathscr{X}$, όπου $\pi(x)$ είναι η απόφαση που λαμβάνεται σε κάθε περίοδο κατά την οποία το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x. Από το Θεώρημα 5.4 προκύπτει ότι κάτω από μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική π η στοχαστική διαδικασία των καταστάσεων είναι Μαρκοβιανή με πιθανότητες μετάβασης

$$\Pr[X_{t+1} = y | X_t = x] = p_{xy}(\pi(x)).$$

Ως μέτρο απόδοσης μιας (γενικά ιστοριοεξαρτώμενης) πολιτικής π θεωρούμε το αναμενόμενο συνολικό αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα κάτω από αυτήν την πολιτική

$$u_\pi(x_0) = E_\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t) | X_0 = x_0 \right], \tag{6.2}$$

όπου β είναι μια σταθερά που παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$ και ονομάζεται συντελεστής αποπληθωρισμού (ή αποπληθωριστής).

Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ορίζεται ως

$$v(x_0) = \inf_{\pi \in \Pi^{HR}} u_\pi(x_0), \tag{6.3}$$

ενώ μια πολιτική π^* είναι βέλτιστη αν $u_{\pi^*}(x_0) = v(x_0), x_0 \in \mathscr{X}$.

Κάτω από την υπόθεση ότι η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι φραγμένη, το αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα είναι επίσης φραγμένη συνάρτηση κάτω από κάθε πολιτική π. Πραγματικά, από τις (6.1) και (6.2) προκύπτει ότι για κάθε πολιτική π και αρχική κατάσταση x_0 ισχύει

$$|u_\pi(x_0)| \le \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t M = \frac{M}{1-\beta} < \infty.$$

Επομένως το κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους είναι καλά ορισμένο κάτω από την υπόθεση φραγμένου άμεσου κόστους.

Η ιδέα του αποπληθωρισμένου κόστους σχετίζεται με την οικονομική αρχή ότι μια αμοιβή ή ένα κόστος που πληρώνεται σε μελλοντική χρονική στιγμή έχει μικρότερη πραγματική αξία στον παρόντα χρόνο και η παρούσα αξία μειώνεται εκθετικά όσο απομακρύνεται η χρονική στιγμή της πληρωμής. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ερμηνεία του συντελεστή αποπληθωρισμού, ας υποθέσουμε ότι το τραπεζικό επιτόκιο για καταθέσεις και δανεισμό είναι κοινό και ίσο με r ανά περίοδο. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα άτομο καταθέσει ποσό w στην αρχή μιας περιόδου, στο τέλος της περιόδου η αξία του κεφαλαίου του θα είναι ίση με $w(1+r)$ (ισοδύναμα, αν το άτομο δανειστεί ποσό w στην αρχή της περιόδου, στο τέλος της περιόδου το χρέος του θα είναι ίσο με $w(1+r)$). Αν τώρα υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο ανατοκίζεται σε κάθε περίοδο με το ίδιο επιτόκιο r, τότε μετά από t περιόδους η αξία του κεφαλαίου θα είναι ίση με $w(1+r)^t$. Αντιστρέφοντας τώρα το επιχείρημα, ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο περιμένει να λάβει μια πληρωμή w μετά από t περιόδους. Αν το άτομο αυτό καταθέσει στην περίοδο 0 ποσό $w(1+r)^{-t}$, τότε την περίοδο t η αξία του κεφαλαίου του θα είναι επίσης ίση με w. Επομένως η «παρούσα αξία» στην περίοδο 0 μιας πληρωμής w που γίνεται την περίοδο t είναι ίση με $w(1+r)^{-t}$, με την έννοια ότι το άτομο είναι αδιάφορο μεταξύ μιας πληρωμής $w(1+r)^{-t}$ την περίοδο 0 και μιας πληρωμής w την περίοδο t.

Έστω τώρα $\beta = \frac{1}{1+r}$. Τότε η παρούσα αξία στην περίοδο 0 μιας πληρωμής w κατά την περίοδο t είναι ίση με $\beta^t w$. Επομένως στην εξίσωση (6.2) η $u_\pi(x_0)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η παρούσα αξία, στην περίοδο 0, του μέσου συνολικού κόστους που θα προκύψει από τη λειτουργία του συστήματος κάτω από την πολιτική π σε άπειρο ορίζοντα, αν η αρχική κατάσταση είναι η x_0 και το επιτόκιο σε κάθε περίοδο είναι ίσο με r.

Μια εναλλακτική ερμηνεία του αποπληθωρισμένου κόστους μπορεί να δοθεί και με βάση το φαινόμενο του πληθωρισμού, αν θεωρήσουμε το επιτόκιο r ως συντελεστή πληθωρισμού σε κάθε περίοδο, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι οι τιμές όλων των αγαθών της οικονομίας αυξάνονται κατά ένα ποσοστό r σε κάθε περίοδο. Τότε με ακριβώς αντίστοιχο συλλογισμό όπως παραπάνω, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την $u_\pi(x_0)$ ως το μέσο αποπληθωρισμένο κόστος στην περίοδο 0 του συνολικού κόστους λειτουργίας του συστήματος και τον συντελεστή β ως συντελεστή αποπληθωρισμού.

6.2 Εξίσωση Βελτιστοποίησης και Βέλτιστες Πολιτικές

Σε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χρονικά ομογενή άμεσα κόστη και πιθανότητες μετάβασης και κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους σε άπειρο ορίζοντα αποδεικνύονται δύο βασικά αποτελέσματα που απλοποιούν σημαντικά την εύρεση βέλτιστων πολιτικών. Αφενός η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ικανοποιεί εξισώσεις βελτιστοποίησης που δεν εξαρτώνται από το τρέχον στάδιο, και αφετέρου υπάρχει πάντα μια βέλτιστη πολιτική που είναι στάσιμη και προσδιοριστική.

Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω

Θεώρημα 6.1 (Εξίσωση Βελτιστοποίησης και Βέλτιστη Πολιτική)

1. *Σε μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων με αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα η συνάρτηση βέλτιστης τιμής ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:*

$$v(x) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right], \quad x \in \mathscr{X}. \tag{6.4}$$

2. *Έστω π^* μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική που σε κάθε κατάσταση x επιλέγει μια απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (6.4), δηλαδή ισχύει ότι*

$$c(x, \pi^*(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi^*(x)) v(y) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right], \ x \in \mathscr{X}.$$

   Τότε ισχύει $u_{\pi^*}(x) = v(x),\ x \in \mathscr{X}$ και η π^* είναι βέλτιστη.

Διαισθητικά η εξίσωση βελτιστοποίησης (6.4) προκύπτει από την αρχή βελτιστότητας του Bellman, σύμφωνα με την οποία σε οποιαδήποτε κατάσταση y φτάσει το σύστημα στο στάδιο 1, από εκεί και μετά θα πρέπει να εφαρμοστεί μια βέλτιστη πολιτική, επομένως η παρούσα αξία στην περίοδο 1 του αναμενόμενου κόστους των περιόδων $1, 2, \ldots$ θα είναι ίση με $v(y)$. Επειδή το άμεσο κόστος $c(x,a)$ προκύπτει στην περίοδο 0 ενώ το μελλοντικό κόστος $v(y)$ στην περίοδο 1, το τελευταίο πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή αποπληθωρισμού για να βρεθεί η παρούσα αξία του στην περίοδο 0.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 θεωρούμε πρώτα την (6.4) και θα δείξουμε ότι ισχύει ως διπλή ανισότητα. Συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε πολιτική π έστω $\pi(a|x)$ η πιθανότητα να ληφθεί η απόφαση a στο στάδιο 0. Τότε το αποπληθωρισμένο συνολικό κόστος κάτω από την π μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} u_\pi(x) &= \sum_{a \in \mathscr{A}(x)} \pi(a|x) \left[c(x,a) + \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) E_\pi[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t) | X_0 = x, A_0 = a, X_1 = y] \right] \\ &= \sum_{a \in \mathscr{A}(x)} \pi(a|x) \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) E_\pi[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} c(X_t, A_t) | X_0 = x, A_0 = a, X_1 = y] \right]. \end{aligned}$$

Όμως η ποσότητα $E_\pi[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} c(X_t, A_t) | X_0 = x, A_0 = a_0, X_1 = y]$ είναι ίση με την παρούσα αξία στην περίοδο 1 του συνολικού κόστους των περιόδων $1, 2, \ldots$ κάτω από την πολιτική π με αρχική κατάσταση την y, επομένως είναι μεγαλύτερη ή ίση από $v(y)$, συνεπώς

$$\begin{aligned} u_\pi(x) &\geq \sum_{a \in \mathscr{A}(x)} \pi(a|x) \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right] \\ &\geq \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right]. \end{aligned}$$

Επειδή η ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε π, παίρνοντας το infimum στο αριστερό μέλος προκύπτει ότι

$$v(x) \geq \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right].$$

Για να δείξουμε την ανισότητα με την αντίστροφη φορά, από τον ορισμό της $v(y)$ έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε y υπάρχει μια πολιτική π^y τέτοια ώστε $u_{\pi^y}(y) \leq v(y) + \epsilon$. Έστω τώρα μια πολιτική π^0 η οποία στο στάδιο 0 και κατάσταση $X_0 = x$ παίρνει οποιαδήποτε απόφαση a_0 που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (6.4) και από το στάδιο 1 και μετά, συνεχίζει με την πολιτική π^y, όπου y η κατάσταση X_1 στην οποία μεταβαίνει το σύστημα για $t = 1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος κάτω από την πολιτική π^0 είναι ίσο με

$$\begin{aligned} u_{\pi^0}(x) &= c(x,a_0) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0) u_{pi^y}(y) \\ &\leq c(x,a_0) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0)(v(y) + \epsilon) \\ &= c(x,a_0) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0) v(y) + \beta\epsilon \\ &= \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right] + \beta\epsilon. \end{aligned}$$

Επομένως

$$v(x) \leq u_{\pi^0}(x) \leq \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right] + \beta\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, και παίρνοντας $\epsilon \to 0$ προκύπτει ότι

$$v(x) \leq \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right].$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες προκύπτει η (6.4).

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, έστω π^* μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική που σε κάθε κατάσταση x επιλέγει μια απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (6.4), δηλαδή

$$c(x,\pi^*(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi^*(x)) v(y) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v(y) \right], \; x \in \mathscr{X}.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} v(x) &= \\ &= c(x,\pi^*(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi^*(x)) v(y) \\ &= c(x,\pi^*(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi^*(x)) \left[c(y,\pi^*(y)) + \beta \sum_{z \in \mathscr{X}} p_{yz}(\pi^*(y)) v(z) \right] \\ &= c(x,\pi^*(y)) + \beta E_{\pi*}[c(X_1,A_1)|X_0 = x] + \beta^2 E_{\pi*}[v(X_2)|X_0 = x]. \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την (6.4), η δεύτερη από την εφαρμογή της π^* στην $v(x)$ και η τρίτη από την εφαρμογή της π^* στην $v(y)$. Επαναλαμβάνοντας τον παραπάνω συλλογισμό στις $v(X_2), v(X_3), \ldots, v(X_{n-1})$ καταλήγουμε στην

$$v(x) = E_{\pi^*}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) | X_0 = x\right] + \beta^n E_{\pi*}[v(X_n)|X_0 = x].$$

Παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$, ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της συγκλίνει στο αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα κάτω από την π^*, δηλαδή στην $u_{\pi^*}(x)$, ενώ ο δεύτερος όρος συγκλίνει στο μηδέν, επειδή $\beta \in (0,1)$ και η $v(x)$ είναι φραγμένη από το $\frac{M}{1-\beta}$. Επομένως για $n \to \infty$ προκύπτει ότι $v(x) = u_{\pi^*}(x)$.

Μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 6.1 είναι το παρακάτω αποτέλεσμα που επιτρέπει τον υπολογισμό της συνάρτησης αποπληθωρισμένου κόστους κάτω από μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική.

Θεώρημα 6.2 (Κόστος Στάσιμης Προσδιοριστικής Πολιτικής) *Έστω μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$. Η συνάρτηση του αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα κάτω από αυτήν την πολιτική δίνεται από τη λύση των εξισώσεων*

$$u_\pi(x) = c(x, \pi(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi(x)) u_\pi(y), \quad x \in \mathscr{X}. \tag{6.5}$$

Η απόδειξη προκύπτει από το Θεώρημα 6.1, αν θεωρήσουμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων στην οποία τα σύνολα αποφάσεων είναι τα μονοσύνολα $\mathscr{A}(x) = \{\pi(x)\}, x \in \mathscr{X}$.

Το Θεώρημα 6.1 εξασφαλίζει ότι η εξίσωση βελτιστοποίησης έχει τουλάχιστον μία λύση και συγκεκριμένα τη συνάρτηση ελάχιστου αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους. Από το επόμενο θεώρημα προκύπτει ότι η $v(x)$ είναι και η μοναδική φραγμένη λύση της (6.4).

Θεώρημα 6.3 (Μοναδικότητα Λύσης Εξίσωσης Βελτιστοποίησης) *Έστω $u(x), x \in \mathscr{X}$ φραγμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση βελτιστοποίησης (6.4). Τότε $u(x) = v(x), x \in \mathscr{X}$.*

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας δίνουν τη μορφή των εξισώσεων βελτιστοποίησης για την περίπτωση του αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα και εξασφαλίζουν την ύπαρξη βέλτιστων στάσιμων προσδιοριστικών πολιτικών, γεγονός που απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση. Όμως, επειδή ο ορίζοντας είναι άπειρος και δεν υπάρχει τερματική συνθήκη, δεν προκύπτει άμεσα ένα σχήμα προς τα πίσω αναδρομής, όπως στην περίπτωση του πεπερασμένου ορίζοντα. Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τρεις υπολογιστικές μεθόδους για την εύρεση του βέλτιστου κόστους και της βέλτιστης πολιτικής.

6.3 Η Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων στον Χώρο Τιμών

Η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών υπολογίζει διαδοχικές προσεγγίσεις της συνάρτησης βέλτιστης τιμής χρησιμοποιώντας ένα σχήμα ανάλογο της προς τα πίσω αναδρομής του δυναμικού προγραμματισμού. Συγκεκριμένα, έστω μια φραγμένη συνάρτηση πάνω στον χώρο καταστάσεων $v_0(x), x \in \mathscr{X}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $v_n(x), x \in \mathscr{X}, n = 1, 2, \ldots$ αναδρομικά ως εξής:

$$v_n(x) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x, a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) v_{n-1}(y)\right] \tag{6.6}$$

Η (6.6) προκύπτει από επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της εξίσωσης βελτιστοποίησης, όπου στο βήμα n η συνάρτηση $v_{n-1}(\cdot)$ μπαίνει στη θέση της $v(\cdot)$ στο δεξιό μέλος και υπολογίζεται η $v_n(\cdot)$.

Η βασική ιδέα της μεθόδου αυτής είναι ότι αν δείξουμε ότι η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει σε μια φραγμένη συνάρτηση $\tilde{v}$, τότε παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ στην (6.6), η $\tilde{v}$ ικανοποιεί την εξίσωση βελτιστοποίησης και επομένως από το Θεώρημα 6.3 αναγκαστικά ταυτίζεται με τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής v.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της σύγκλισης θα δούμε μια ερμηνεία των διαδοχικών προσεγγίσεων v_n. Χρησιμοποιώντας εντελώς αντίστοιχο συλλογισμό με αυτόν του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα στο Κεφάλαιο 5, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$v_n(x) = \inf_{\pi} E_{\pi}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) + \beta^n v_0(X_n) \middle| X_0 = x\right], \tag{6.7}$$

δηλαδή η $v_n(x)$ είναι ίση με το ελάχιστο αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος σε ένα πρόβλημα n σταδίων με αρχική κατάσταση $X_0 = x$ και συνάρτηση τερματικού κόστους $v_0(x), x \in \mathscr{X}$.

Χρησιμοποιώντας την (6.7) μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση αρχικής προσέγγισης v_0 η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση βέλτιστης τιμής. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.4 (Σύγκλιση Διαδοχικών Προσεγγίσεων)

1. *Έστω ότι* $|v_0(x)| \le K < \infty, x \in \mathscr{X}$. *Τότε*

$$|v_n(x) - v(x)| \le \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right), x \in \mathscr{X}, n \ge 0. \tag{6.8}$$

2. *Ισχύει ότι* $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$, *ομοιόμορφα για* $x \in \mathscr{X}$.

Η απόδειξη γίνεται δείχνοντας ότι

$$v_n(x) - \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right) \le v(x) \le v_n(x) + \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right). \tag{6.9}$$

Για την πρώτη ανισότητα, έστω π^* μια βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα του άπειρου ορίζοντα που αντιστοιχεί στη $v(x)$. Τότε ισχύει

$$v(x) = E_{\pi^*}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right] + E_{\pi^*}\left[\sum_{t=n}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right].$$

Η π^* γενικά δεν είναι βέλτιστη για το πρόβλημα με ορίζοντα n με τερματικό κόστος v_0, επομένως

$$v_n(x) \le E_{\pi^*}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right] + \beta^n E_{\pi^*}[v_0(X_n) | X_0 = x].$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο σχέσεις προκύπτει

$$v_n(x) \le v(x) + \beta^n E_{\pi^*}\left[v_0(X_n) - \sum_{t=n}^{\infty} \beta^{t-n} c(X_t, A_t)] \middle| X_0 = x\right].$$

Από τις $v_0(X_t) \le K$ και $c(X_t, A_t) \ge -M$ παίρνουμε

$$v_n(x) \le v(x) + \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right).$$

Για τη δεύτερη ανισότητα, έστω $\tilde{\pi}_n$ η βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα του πεπερασμένου ορίζοντα που αντιστοιχεί στη $v_n(x)$ και $\tilde{\pi}$ μια πολιτική άπειρου ορίζοντα που ταυτίζεται με την $\tilde{\pi}_n$ για τις περιόδους $0, 1, \dots, n-1$, ενώ παίρνει οποιεσδήποτε αποφάσεις στις περιόδους $n, n+1, \dots$. Τότε ισχύει

$$v_n(x) = E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right] + \beta^n E_{\tilde{\pi}}[v_0(X_n) | X_0 = x].$$

Επειδή η $v(x)$ αντιστοιχεί στο βέλτιστο κόστος άπειρου ορίζοντα, ισχύει επίσης ότι

$$v(x) \le E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t)\right] = E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right] + E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=n}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t) \middle| X_0 = x\right]$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο σχέσεις προκύπτει

$$v(x) \le v_n(x) + \beta^n E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=n}^{\infty} \beta^t c(X_t, A_t)] - v_0(X_n) \middle| X_0 = x\right].$$

Εδώ έχουμε $v_0(X_t) \ge -K$ και $c(X_t, A_t) \le M$, επομένως παίρνουμε

$$v(x) \le v_n(x) + \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right).$$

Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος προκύπτει άμεσα από το πρώτο μέρος, επειδή η (6.9) γράφεται ισοδύναμα

$$\sup_{x \in \mathscr{X}} |v_n(x) - v(x)| \le \beta^n \left(K + \frac{M}{1-\beta}\right)$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathscr{X}} |v_n(x) - v(x)| = 0$.

Παράδειγμα 6.1 *Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων* $\mathscr{X} = \{1, 2\}$ *και σύνολα αποφάσεων* $\mathscr{A}(1) = \mathscr{A}(2) = \{1, 2\}$. *Η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι* $c(1, 1) = 10, c(1, 2) = 5, c(2, 1) = 18, c(2, 2) = 17$ *και οι πιθανότητες μετάβασης κάτω από κάθε κατάσταση και απόφαση* $p_{11}(1) = 1/2, p_{12}(1) = 1/2, p_{11}(2) = 1/4, p_{12}(2) = 3/4, p_{21}(1) = 3/8, p_{22}(1) = 5/8, p_{21}(2) = 1/5, p_{22}(2) = 4/5$. *Ο συντελεστής αποπληθωρισμού είναι* $\beta = 4/5$.

Οι εξισώσεις βελτιστοποίησης για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} v(1) &= \min\left[10 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}v(1) + \frac{1}{2}v(2)\right), 5 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}v(1) + \frac{3}{4}v(2)\right)\right] \\ v(2) &= \min\left[18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}v(1) + \frac{5}{8}v(2)\right), 17 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}v(1) + \frac{4}{5}v(2)\right)\right] \end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής για το παραπάνω πρόβλημα είναι $v(1) = \frac{665}{11} \approx 60.45, v(2) = \frac{795}{11} \approx 72.27$ και η βέλτιστη πολιτική $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών με αρχική προσέγγιση $v_0(1) = v_0(2) = 0$, παίρνουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις της βέλτιστης τιμής v_n και της βέλτιστης πολιτικής π_n για τιμές του $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 50$:

n	$v_n(1)$	$v_n(2)$	$\pi_n(1)$	$\pi_n(2)$
1	5.00	17.00	2	2
2	16.20	28.00	2	1
3	25.04	36.86	2	1
4	32.12	43.94	2	1
5	37.79	49.61	2	1
10	53.03	64.85	2	1
20	59.66	71.48	2	1
30	60.37	72.19	2	1
50	60.45	72.27	2	1

Σχετικά με τα φράγματα της προσέγγισης, έχουμε ότι $|c(x,a)| \leq M = 18$ για κάθε (x,a) και $|v_0(x)| \leq K = 0$. Από τον πίνακα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύει η ανισότητα (6.8) για κάθε τιμή του n.

Εκτός από την εφαρμογή της για αριθμητικούς υπολογισμούς, η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών είναι επίσης χρήσιμη για την απόδειξη δομικών ιδιοτήτων της συνάρτησης βέλτιστης τιμής και της βέλτιστης πολιτικής σε προβλήματα που εκφράζονται παραμετρικά. Συνήθως τέτοιες ιδιότητες αποδεικνύονται επαγωγικά για τις διαδοχικές προσεγγίσεις v_n, π_n, μέσω των αναδρομικών σχέσεων (6.6) και παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ εξασφαλίζονται για τη λύση του άπειρου ορίζοντα. Η απόδειξη δομικών ιδιοτήτων της λύσης, εκτός από την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος, πολλές φορές επιτρέπει τον σχεδιασμό απλούστερων αλγορίθμων για τον αριθμητικό υπολογισμό της βέλτιστης πολιτικής. Στο επόμενο παράδειγμα αναλύεται ένα πρόβλημα αντικατάστασης μηχανήματος αυτού του τύπου.

Παράδειγμα 6.2 *Ένα μηχάνημα λειτουργεί σε συνθήκες αβεβαιότητας. Σε κάθε περίοδο λειτουργίας υπάρχει πιθανότητα p να προκληθεί μια βλάβη. Οι βλάβες δεν προκαλούν διακοπή της λειτουργίας, όμως αυξάνουν το κόστος λειτουργίας και συντήρησης του μηχανήματος. Συγκεκριμένα, αν στην αρχή μιας περιόδου στο μηχάνημα έχουν συσσωρευτεί x βλάβες από προηγούμενες περιόδους, τότε κατά την τρέχουσα περίοδο το κόστος λειτουργίας και συντήρησης του μηχανήματος είναι ίσο με $K(x)$, όπου η K είναι μια αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση. Στην αρχή κάθε περιόδου ο ιδιοκτήτης του μηχανήματος έχει δύο επιλογές: ή να συνεχίσει τη λειτουργία του για την τρέχουσα περίοδο ή να το αντικαταστήσει. Το κόστος αντικατάστασης είναι ίσο με R και η αντικατάσταση γίνεται στιγμιαία με ένα νέο μηχάνημα. Ζητείται βρεθεί η βέλτιστη πολιτική συντήρησης αντικατάστασης που ελαχιστοποεί το αναμενόμενο συνολικό αποπληθωρισμένο κόστος σε άπειρο ορίζοντα.*

Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με κατάσταση x τον αριθμό βλαβών που έχουν συμβεί στο μηχάνημα στην αρχή της περιόδου. Ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$. Η απόφαση σε κάθε κατάσταση είναι αν το μηχάνημα θα λειτουργήσει ή θα αντικατασταθεί, εκτός από την κατάσταση 0 όπου το μηχάνημα δεν αντικαθίσταται επειδή λειτουργεί σαν καινούργιο. Επομένως τα σύνολα αποφάσεων είναι $\mathscr{A}(0) = \{1\}, \mathscr{A}(x) = \{1,2\}, x > 0$, όπου η απόφαση $a = 1$ αντιστοιχεί σε συνέχιση της λειτουργίας και η $a = 2$ σε αντικατάσταση.

Η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι $c(x,1) = K(x), c(x,2) = R+K(0)$, επειδή αν το μηχάνημα αντικατασταθεί στην αρχή μιας περιόδου, το κόστος λειτουργίας θα είναι $K(0)$ στη διάρκεια της περιόδου. Η δυναμική του συστήματος προσδιορίζεται από τις πιθανότητες μετάβασης $p_{x,x+1}(1) = p, p_{x,x}(1) = 1-p, p_{x1}(2) = p, p_{x0}(2) = 1-p$. Αν το μηχάνημα αντικατασταθεί, τότε στην αρχή της τρέχουσας περιόδου θα έχει μηδέν βλάβες και επομένως στην αρχή της επόμενης περιόδου ή μηδέν ή μια βλάβη με πιθανότητες $1-p$ και p, αντίστοιχα.

Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις βελτιστοποίησης διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} v(0) &= K(0) + \beta\left[(1-p)v(0) + pv(1)\right] \\ v(x) &= \min\left\{K(x) + \beta\left[(1-p)v(x) + pv(x+1)\right],\right. \\ &\qquad \left. R + K(0) + \beta\left[(1-p)v(0) + pv(1)\right] \right\}, x > 0. \end{aligned}$$

Ως αρχική προσέγγιση θέτουμε $v_0(x) = 0, x \geq 0$ και οι εξισώσεις των διαδοχικών προσεγγίσεων για $n = 1, 2, \ldots$ είναι

$$\begin{aligned} v_n(0) &= K(0) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(0) + pv_{n-1}(1)\right] \\ v_n(x) &= \min\left\{K(x) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(x) + pv_{n-1}(x+1)\right],\right. \\ &\quad \left. R + K(0) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(0) + pv_{n-1}(1)\right]\ \right\}, x > 0. \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι για κάθε $n \geq 0$ η συνάρτηση $v_n(x)$ είναι αύξουσα ως προς x. Αυτή η ιδιότητα θα μας επιτρέψει μετά να περιγράψουμε τη δομή της βέλτιστης πολιτικής. Η μονοτονία της $v_n(x)$ μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά. Πραγματικά για $n = 0$, η $v_0(x) = 0$ είναι τετριμμένα αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η $v_n(x)$ είναι αύξουσα ως προς x για κάποιο n. Για $n + 1$, επειδή η $v_{n+1}(x)$ έχει διαφορετικές εκφράσεις για $x = 0$ και για $x > 0$ θα δείξουμε τη μονοτονία χωριστά.

Πρώτα δείχνουμε ότι $v_{n+1}(0) \leq v_{n+1}(1)$. Έχουμε

$$v_{n+1}(0) = K(0) + \beta\left[(1-p)v_n(0) + pv_n(1)\right]$$

και

$$v_{n+1}(1) = \min\left\{K(1) + \beta\left[(1-p)v_n(1) + pv_n(2)\right], R + K(0) + \beta\left[(1-p)v_n(0) + pv_n(1)\right]\right\}.$$

Επειδή η $K(x)$ είναι αύξουσα, ισχύει $\mathrm{K}(0) \leq K(1)$. Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση, $v_n(0) \leq v_n(1)$ και $v_n(1) \leq v_n(2)$, επομένως $v_{n+1}(0) \leq K(1) + \beta\left[(1-p)v_n(0) + pv_n(1)\right]$. Τέλος, επειδή $R > 0$, $v_{n+1}(0) \leq R + K(0) + \beta\left[(1-p)v_n(0) + pv_n(1)\right]$. Επομένως $v_{n+1}(0) \leq v_{n+1}(1)$.

Για $x > 0$, έχουμε ότι $K(x) + \beta\left[(1-p)v_n(x) + pv_n(x+1)\right]$ είναι αύξουσα ως προς x λόγω της μονοτονίας της $K(x)$ και της επαγωγικής υπόθεσης. Επομένως η $v_{n+1}(x)$ είναι το ελάχιστο μιας αύξουσας συνάρτησης του x και μιας σταθεράς ως προς x, συνεπώς είναι αύξουσα ως προς x.

Έχοντας δείξει τη μονοτονία της $v_n(x)$, για τη βέλτιστη πολιτική παρατηρούμε τα εξής. Από την εξίσωση βελτιστοποίησης για τη $v_n(x)$ προκύπτει ότι η βέλτιστη απόφαση είναι $a_n^*(x) = 1$ αν

$$K(x) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(x) + pv_{n-1}(x+1)\right] \leq R + K(0) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(0) + pv_{n-1}(1)\right].$$

Επειδή το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι αύξουσα συνάρτηση του x και το δεξιό μέλος είναι σταθερό, παίρνουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $x \leq x_n^*$, όπου

$$x_n^* = \sup\left\{x \geq 0 : K(x) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(x) + pv_{n-1}(x+1)\right] \leq R + K(0) + \beta\left[(1-p)v_{n-1}(0) + pv_{n-1}(1)\right]\right\}.$$

Επομένως η βέλτιστη πολιτική στην n-οστή προσέγγιση, δηλαδή όταν μένουν n στάδια μέχρι το τέλος του ορίζοντα, είναι το μηχάνημα να συνεχίσει να λειτουργεί αν ο αριθμός βλαβών που έχουν συμβεί είναι το πολύ x_n^* και να αντικατασταθεί αν $x > x_n^*$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), x \geq 0$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής άπειρου ορίζοντα $v(x)$ είναι αύξουσα ως προς x, ενώ υπάρχει μια κρίσιμη τιμή x^* τέτοια ώστε η βέλτιστη πολιτική άπειρου ορίζοντα είναι να αντικαθίσταται το μηχάνημα την πρώτη φορά που ο αριθμός βλαβών υπερβαίνει την τιμή x^*.

Βέλτιστες πολιτικές της παραπάνω μορφής ονομάζονται γενικά πολιτικές κατωφλίου (threshold policies).

6.4 Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων στον Χώρο των Πολιτικών

Η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο των πολιτικών είναι επίσης μια επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής, όπου σε κάθε επανάληψη εφαρμόζεται μια προσδιοριστική στάσιμη πολιτική, υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους που αντιστοιχεί σε αυτήν, γίνεται έλεγχος αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις βελτιστοποίησης και αν όχι υπολογίζεται μια νέα πολιτική με κόστος μικρότερο από την προηγούμενη για τουλάχιστον μια κατάσταση. Επειδή η συνάρτηση κόστους βελτιώνεται σε κάθε επανάληψη, η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως μέθοδος βελτίωσης πολιτικών (policy improvement method).

Ο αλγόριθμος βελτίωσης πολιτικής ορίζεται ως εξής:

Βήμα 1 Έστω $\pi \in \Pi^{SD}$ μια αρχική στάσιμη προσδιοριστική πολιτική. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα $u_\pi(x), x \in \mathscr{X}$ της πολιτικής π από το Θεώρημα 6.2:

$$u_\pi(x) = c(x, \pi(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\pi(x)) u_\pi(y), \ \ x \in \mathscr{X}. \tag{6.10}$$

Βήμα 2 Υπολογίζουμε τις ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$ ως εξής:

$$\phi(x, a) = c(x, a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) u_\pi(y) - u_\pi(x). \tag{6.11}$$

Βήμα 3 Αν $\phi(x, a) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε η πολιτική π είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος σταματά, διαφορετικά πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

Βήμα 4 Έστω μια κατάσταση x_0 και μια απόφαση a_0 για τις οποίες ισχύει $\phi(x_0, a_0) < 0$. Ορίζουμε μια νέα πολιτική $\tilde{\pi} \in \Pi^{SD}$ ως εξής:

$$\tilde{\pi}(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \neq x_0 \\ a_0, & x = x_0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Θέτουμε $\pi = \tilde{\pi}$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου βελτίωσης πολιτικής εξασφαλίζεται από το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.5 (Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής) *Στον αλγόριθμο βελτίωσης πολιτικής αν για μια πολιτική π ισχύει $\phi(x, a) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε η πολιτική π είναι βέλτιστη. Διαφορετικά, για τη νέα πολιτική $\tilde{\pi}$ ισχύει ότι $u_{\tilde{\pi}}(x) \leq u_\pi(x), x \in \mathscr{X}$ και $u_{\tilde{\pi}}(x_0) < u_\pi(x_0)$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι αν $\phi(x, a) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε η u_π ικανοποιεί την εξίσωση βελτιστοποίησης, επομένως $u_\pi = v$ και η π είναι βέλτιστη πολιτική. Έστω τώρα ότι η $\phi(x, a) \geq 0$ παραβιάζεται για τουλάχιστον ένα ζεύγος κατάστασης-απόφασης (x_0, a_0). Από τις (6.10)–(6.12) παίρνουμε

$$\phi(x, \tilde{\pi}(x)) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \phi(x_0, a_0), & x = x_0 \end{cases}.$$

Επίσης, οι εξισώσεις κόστους για τη νέα πολιτική $\tilde{\pi}$ είναι

$$u_{\tilde{\pi}}(x) = c(x, \tilde{\pi}(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) u_{\tilde{\pi}}(y), \ \ x \in \mathscr{X}. \tag{6.13}$$

Ορίζουμε $\delta(x) = u_{\tilde{\pi}}(x) - u_\pi(x), x \in \mathscr{X}$. Για $x \neq x_0$ η (6.13) γράφεται

$$u_\pi(x) + \delta(x) = c(x, \tilde{\pi}(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) u_\pi(y) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y)$$

Όμως, $\tilde{\pi}(x) = \pi(x)$ για $x \neq x_0$, επομένως χρησιμοποιώντας την (6.10) παίρνουμε

$$\delta(x) = \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y), \quad x \neq x_0. \tag{6.14}$$

Για $x = x_0$ η (6.13) γράφεται

$$u_\pi(x_0) + \delta(x_0) = c(x, a_0) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0) u_\pi(y) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0)\delta(y),$$

επομένως από την (6.11),

$$\delta(x_0) = \phi(x_0, a_0) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a_0)\delta(y). \tag{6.15}$$

Από τις (6.14) και (6.15) τώρα προκύπτει ότι

$$\delta(x) = \phi(x, \tilde{\pi}(x)) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(\tilde{\pi}(x))\delta(y), x \in \mathscr{X}. \tag{6.16}$$

Επομένως η $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση κόστους κάτω από την πολιτική $\tilde{\pi}$ σε μια τροποποιημένη Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων στην οποία η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι η $\phi(x, \tilde{\pi}(x))$, δηλαδή

$$\delta(x) = E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \phi(X_t, \tilde{\pi}(X_t)) | X_0 = x\right], x \in \mathscr{X}. \tag{6.17}$$

Επειδή $\phi(x, \tilde{\pi}(x)) \le 0$, από τη (7.15) παίρνουμε $\delta(x) \le 0, x \in \mathscr{X}$, ενώ για $x = x_0$

$$\delta(x_0) = \phi(x_0, a_0) + E_{\tilde{\pi}}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \phi(X_t, \tilde{\pi}(X_t)) | X_0 = x_0\right] < 0.$$

Από το Θεώρημα 6.5 προκύπτει ότι σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου βελτίωσης πολιτικής προκύπτει μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική που έχει αυστηρά μικρότερο κόστος από την προηγούμενη σε τουλάχιστον μια κατάσταση. Όμως αν ο χώρος καταστάσεων και τα σύνολα αποφάσεων είναι πεπερασμένα, τότε και ο αριθμός των στάσιμων προσδιοριστικών πολιτικών είναι πεπερασμένος. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος βελτίωσης πολιτικής θα ολοκληρωθεί σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, έχοντας καταλήξει σε μια βέλτιστη στάσιμη προσδιοριστική πολιτική.

Παράδειγμα 6.3 *Θεωρούμε και πάλι τη Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων που ορίστηκε στο Παράδειγμα 6.1 και θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο βελτίωσης πολιτικής.*

Παίρνουμε ως αρχική προσέγγιση τη στάσιμη προσδιοριστική πολιτική π_1 που παίρνει την απόφαση 1 σε όλες τις καταστάσεις, δηλαδή $\pi_1(1) = 1, \pi_1(2) = 1$. Οι εξισώσεις κόστους για την πολιτική π_1 είναι:

$$\begin{aligned}
u_{\pi_1}(1) &= 10 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}u_{\pi_1}(1) + \frac{1}{2}u_{\pi_1}(2)\right) \\
u_{\pi_1}(2) &= 18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}u_{\pi_1}(1) + \frac{5}{8}u_{\pi_1}(2)\right)
\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων παίρνουμε $u_{\pi_1}(1) = 610/9, u_{\pi_1}(2) = 230/3$. Για την πολιτική αυτή οι ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a)$ υπολογίζονται από την (6.11):

$$\begin{aligned}
\phi(1,1) &= 10 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}u_{\pi_1}(1) + \frac{1}{2}u_{\pi_1}(2)\right) - u_{\pi_1}(1) = 0 \\
\phi(1,2) &= 5 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}u_{\pi_1}(1) + \frac{3}{4}u_{\pi_1}(2)\right) - u_{\pi_1}(1) = -\frac{29}{9} \\
\phi(2,1) &= 18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}u_{\pi_1}(1) + \frac{5}{8}u_{\pi_1}(2)\right) - u_{\pi_1}(2) = 0 \\
\phi(2,2) &= 17 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}u_{\pi_1}(1) + \frac{4}{5}u_{\pi_1}(2)\right) - u_{\pi_1}(2) = \frac{11}{45}.
\end{aligned}$$

Επειδή για $x = 1, a = 2$ η ποσότητα ελέγχου είναι αρνητική, η πολιτική π_1 δεν είναι βέλτιστη. Ορίζουμε τη βελτιωμένη πολιτική π_2, με $\pi_2(1) = 2, \pi_2(2) = 1$. Οι εξισώσεις κόστους για την πολιτική π_2 είναι:

$$\begin{aligned} u_{\pi_2}(1) &= 5 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}u_{\pi_2}(1) + \frac{3}{4}u_{\pi_2}(2)\right) \\ u_{\pi_2}(2) &= 18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}u_{\pi_2}(1) + \frac{5}{8}u_{\pi_2}(2)\right) \end{aligned}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα παίρνουμε $u_{\pi_2}(1) = 665/11, u_{\pi_2}(2) = 795/11$. Παρατηρούμε ότι η νέα πολιτική π_2 έχει μικρότερο κόστος από την π_1 και στις δύο καταστάσεις. Για την πολιτική αυτή οι ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a)$ υπολογίζονται από την (6.11):

$$\begin{aligned} \phi(1,1) &= 10 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}u_{\pi_2}(1) + \frac{1}{2}u_{\pi_2}(2)\right) - u_{\pi_2}(1) = \frac{29}{11} \\ \phi(1,2) &= 5 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}u_{\pi_2}(1) + \frac{3}{4}u_{\pi_2}(2)\right) - u_{\pi_2}(1) = 0 \\ \phi(2,1) &= 18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}u_{\pi_2}(1) + \frac{5}{8}u_{\pi_2}(2)\right) - u_{\pi_2}(2) = 0 \\ \phi(2,2) &= 17 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}u_{\pi_2}(1) + \frac{4}{5}u_{\pi_2}(2)\right) - u_{\pi_2}(2) = \frac{36}{55}. \end{aligned}$$

Τώρα όλες οι ποσότητες ελέγχου είναι μη αρνητικές, επομένως η πολιτική π_2 είναι βέλτιστη και η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι $v(1) = u_{\pi_2}(1) = 665/11, v(2) = u_{\pi_2}(2) = 795/11$.

6.5 Λύση με Γραμμικό Προγραμματισμό

Από την (6.4) προκύπτει ότι αν μια συνάρτηση $u(x), x \in \mathscr{X}$ είναι λύση των εξισώσεων βελτιστοποίησης, πρέπει να ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα γραμμικών ανισώσεων:

$$u(x) \leq c(x, a) + \beta \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a)u(y), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x). \tag{6.18}$$

Όμως αν μια συνάρτηση ικανοποιεί τις (6.18), δεν είναι απαραίτητα και λύση των (6.4). Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.6 (Μοντελοποίηση Γραμμικού Προγραμματισμού) *Αν μια φραγμένη συνάρτηση $u(x), x \in \mathscr{X}$ ικανοποιεί τις (6.18), τότε $u(x) \leq v(x), x \in \mathscr{X}$.*

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του δεύτερου μέρους του Θεωρήματος 6.1. Συγκεκριμένα εφαρμόζοντας επαναληπτικά τις ανισότητες στις ποσότητες $u(y)$ στο δεξιό μέλος της (6.18), προκύπτει ότι για οποιαδήποτε πολιτική π

$$u(x) \leq E_\pi \sum_{t=0}^{n-1} \beta^t c(X_t, A_t) + \beta^n E_\pi u(X_n).$$

Επειδή η u είναι φραγμένη, παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ προκύπτει ότι $u(x) \leq u_\pi(x), x \in \mathscr{X}$, και επειδή η π είναι αυθαίρετη, $u(x) \leq \inf_\pi u_\pi(x) = v(x)$.

Το Θεώρημα 6.6 σημαίνει ότι η $v(x)$ είναι η μέγιστη ανά κατάσταση λύση των ανισώσεων (6.18). Επομένως, αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία σταθερών συντελεστών $d(x), x \in \mathscr{X}$ με $d(x) > 0, \sum_{x \in \mathscr{X}} d(x) < \infty$, τότε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\max\left\{\sum_{x\in\mathscr{X}} d(x)u(x) : u(x) \le c(x,a) + \beta \sum_{y\in\mathscr{X}} p_{xy}(a)u(y), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)\right\} \tag{6.19}$$

έχει μοναδική βέλτιστη λύση $u(x) = v(x), x \in \mathscr{X}$, ενώ μια βέλτιστη στάσιμη προσδιοριστική πολιτική καθορίζεται από τους περιορισμούς που είναι δεσμευτικοί (δηλαδή ικανοποιούνται με ισότητα) στη βέλτιστη λύση.

Αν ο χώρος καταστάσεων και τα σύνολα αποφάσεων είναι πεπερασμένα, τότε η (6.19) είναι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού πεπερασμένης διάστασης, το οποίο μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Simplex.

Παράδειγμα 6.4 *Θεωρούμε και πάλι τη Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων που ορίστηκε στο Παράδειγμα 6.1 και θα λύσουμε το πρόβλημα μέσω γραμμικού προγραμματισμού.*

Θέτουμε τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης $d(1) = d(2) = 1$ και η (6.19) γράφεται:

$$\begin{array}{lll}
\max & & u(1) + u(2) \\
\text{υ.π.} & & \\
u(1) & \le & 10 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(2)\right) \\
u(1) & \le & 5 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}u(1) + \frac{3}{4}u(2)\right) \\
u(2) & \le & 18 + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{8}u(1) + \frac{5}{8}u(2)\right) \\
u(2) & \le & 17 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}u(1) + \frac{4}{5}u(2)\right)
\end{array}$$

το οποίο εκφράζεται ως

$$\begin{array}{ll}
\max & u(1) + u(2) \\
\text{υ.π.} & \\
& \frac{3}{5}u(1) - \frac{2}{5}u(2) + w_{11} = 10 \\
& \frac{4}{5}u(1) - \frac{3}{5}u(2) + w_{12} = 5 \\
& -\frac{3}{10}u(1) + \frac{1}{2}u(2) + w_{21} = 18 \\
& -\frac{4}{25}u(1) + \frac{9}{25}u(2) + w_{21} = 17 \\
& u(1), u(2) \in \mathbb{R}, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \ge 0,
\end{array}$$

όπου οι $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ είναι περιθώριες μεταβλητές.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex στο παραπάνω πρόβλημα παίρνουμε τη βέλτιστη λύση $u(1) = 665/11$, $u(2) = 795/11, w_{11} = 29/11, w_{12} = 0, w_{21} = 0, w_{22} = 36/55$. Από τη λύση αυτή επιβεβαιώνεται ότι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής είναι $v(1) = u(1) = 665/11, v(2) = u(2) = 795/11$. Η βέλτιστη πολιτική προσδιορίζεται από τις περιθώριες μεταβλητές που έχουν τιμή μηδέν στη βέλτιστη λύση. Εδώ $w_{12} = 0, w_{21} = 0$, επομένως η βέλτιστη πολιτική είναι η $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1$, δηλαδή ταυτίζεται με την πολιτική π_2 που βρέθηκε με τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής. Παρατηρούμε επίσης ότι οι τιμές των περιθώριων μεταβλητών ταυτίζονται με τις τιμές των ποσοτήτων ελέγχου $\phi(x, a)$ που αντιστοιχούν στη βέλτιστη πολιτική π_2 της μεθόδου βελτίωσης πολιτικής. Γιατί συμβαίνει αυτό;

6.6 Επεκτάσεις

Οι Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκαν κάτω από την υπόθεση ότι ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμο σύνολο, τα σύνολα αποφάσεων είνα πεπερασμένα και η συνάρτηση άμεσου κόστους φραγμένη. Αντίστοιχη θεωρία για Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων με κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους έχει αναπτυχθεί για περιπτώσεις όπου τα σύνολα καταστάσεων και αποφάσεων είναι μη αριθμήσιμα και για γενικές συναρτήσεις κόστους. Η ανάπτυξη της γενικής θεωρίας ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος. Εδώ θα παραμείνουμε στο πλαίσιο του αριθμήσιμου χώρου καταστάσεων και πεπερασμένων συνόλων αποφάσεων και θα εξετάσουμε τη συνάρτηση άμεσου κόστους.

Ενώ η υπόθεση φραγμένου κόστους είναι άμεσα εφαρμόσιμη όταν $|\mathscr{X}| < \infty$, σε προβλήματα με άπειρο χώρο καταστάσεων δεν μπορεί πάντα να εξασφαλιστεί. Για την περίπτωση που η συνάρτηση άμεσου κόστους δεν είναι φραγμένη, θα διατυπώσουμε ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες τα βασικά αποτελέσματα που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο συνεχίζουν να ισχύουν, είτε αυτούσια είτε σε γενικότερη μορφή.

Συγκεκριμένα, έστω $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, ...\}$ και $w(x), x \in \mathscr{X}$ αύξουσα συνάρτηση με $\inf_{x\in\mathscr{X}} w(x) > 0$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

1. Υπάρχει σταθερά $h < \infty$ τέτοια ώστε
$$|c(x, a)| \leq hw(x), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x). \tag{6.20}$$

2. Υπάρχει σταθερά $k, 0 \leq k < \infty$ τέτοια ώστε
$$\mathrm{E}\left[w(X_{n+1})|X_n = x, A_n = a\right] \leq kw(x), x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x), n \geq 0. \tag{6.21}$$

3. Υπάρχει σταθερά $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$ και ακέραιος ℓ τέτοια ώστε κάτω από οποιαδήποτε προσδιοριστική πολιτική $\pi \in \Pi^D$ (όχι απαραίτητα στάσιμη)
$$\mathrm{E}_\pi\left[w(X_{n+\ell})|X_n = x\right] \leq \alpha\beta^{-\ell}w(x), x \in \mathscr{X}, n \geq 0. \tag{6.22}$$

Οι παραπάνω υποθέσεις επιτρέπουν η συνάρτηση κόστους να είναι μη φραγμένη, αρκεί να μην αυξάνεται ταχύτερα από μια συνάρτηση $w(x)$, η οποία με τη σειρά της έχει την ιδιότητα ότι κάτω από οποιαδήποτε προσδιοριστική πολιτική ο ρυθμός αύξησής της σε μια ακολουθία ℓ καταστάσεων-αποφάσεων είναι μικρότερος από $1/\beta$ ανά περίοδο.

Οι υποθέσεις 1-3 αποτελούν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης των εξισώσεων βελτιστοποίησης και βέλτιστης πολιτικής. Συγκεκριμένα, εξασφαλίζουν το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.7 (Μη φραγμένη συνάρτηση κόστους) *Κάτω από τις (6.20)-(6.22) ισχύουν τα εξής:*

1. *Για κάθε Μαρκοβιανή (γενικά τυχαιοποιημένη) πολιτική $\pi \in \Pi^{MR}$ ισχύει ότι*
$$u_\pi(x) \leq \frac{h}{1-\beta}\sum_{t=0}^{\ell-1}(\beta\alpha)^t w(x) \tag{6.23}$$

2. *Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v(x)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης βελτιστοποίησης (6.4) και ισχύει $\sup_{x\in\mathscr{X}} \frac{|v(x)|}{w(x)} < \infty$.*

3. *Έστω π^* μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική που σε κάθε κατάσταση x επιλέγει μια απόφαση που πετυχαίνει το ελάχιστο στο δεξιό μέλος της (6.4). Τότε ισχύει $u_{\pi^*}(x) = v(x),\ x \in \mathscr{X}$ και η π^* είναι βέλτιστη.*

4. *Για τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών με αρχική προσέγγιση $v_0(x)$, η οποία ικανοποιεί την ανισότητα $\sup_{x\in\mathscr{X}} \frac{|v_0(x)|}{w(x)} < \infty$, ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} |v_n(x) - v(x)| = 0,$$

ομοιόμορφα για $x \in \mathscr{X}$.

5. *Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο των πολιτικών συγκλίνει σε μια βέλτιστη πολιτική.*

Η αυστηρή απόδειξη του Θεωρήματος 6.7 είναι πέρα από το πλαίσιο αυτού του συγγράμματος. Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι ότι το άνω φράγμα $1/\beta$ στον ρυθμό αύξησης του άμεσου κόστους ανά περίοδο εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση βέλτιστης τιμής, ενώ μπορεί να είναι μη φραγμένη, έχει αρκετά μικρό ρυθμό αύξησης έτσι ώστε τα βασικά επιχειρήματα στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 να συνεχίζουν να ισχύουν.

Οι ικανές συνθήκες (6.20)-(6.22) ικανοποιούνται για συναρτήσεις άμεσου κόστους με απόλυτη τιμή που δεν αυξάνει πολύ γρήγορα. Ένα παράδειγμα δίνεται παρακάτω.

Παράδειγμα 6.5 *Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, ...\}$ και πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος j τέτοιος ώστε $p_{xy}(a) = 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x), y > x + j$. Αυτό σημαίνει ότι από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση και με οποιαδήποτε απόφαση, η διαδικασία δεν μπορεί να μετακινηθεί σε ένα βήμα περισσότερο από j καταστάσεις προς τα πάνω. Τέτοιου τύπου υποθέσεις ικανοποιούνται σε αρκετά προβλήματα συστημάτων εξυπηρέτησης ή διαχείρισης αποθεμάτων. Για τη συνάρτηση άμεσου κόστους υποθέτουμε $c(x, a) = Cx^m$ όπου $m \geq 0$.*

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (6.20)-(6.22) με συνάρτηση $w(x) = \max(x^m, 1)$, η οποία για $x \geq 0$ είναι αύξουσα και $\inf_{x\in\mathscr{X}} w(x) = 1$. Αρχικά βλέπουμε εύκολα ότι η (6.20) ισχύει με $h = C$. Για την (6.21) έχουμε ότι αν $X_n = x$, τότε με πιθανότητα 1 $X_{n+1} \leq x + j$ για οποιαδήποτε απόφαση a, επομένως

$$\mathrm{E}\left[w(X_{n+1})|X_n = x, A_n = a\right] \leq w(x + j) = (x + j)^m.$$

Για $x \geq 1$ ισχύει $(x+j)^m = \left(1 + \frac{j}{x}\right)^m x^m \leq (1+j)^m w(x)$, ενώ για $x = 0$, $(x+j)^m = j^m \leq (1+j)^m w(0)$. Επομένως η (6.21) ισχύει για $x \geq 0$ με $k = (1 + j)^m$. , για την (6.22) έχουμε ότι για οποιαδήποτε $\ell \geq 1$, κατάσταση $X_n = x$ και αποφάσεις $A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+\ell-1}$, η κατάσταση $X_{n+\ell} \leq x + \ell j$ με πιθανότητα 1, επομένως

$$\mathrm{E}\left[w(X_{n+\ell})|X_n = x\right] \leq w(x + \ell j) = (x + \ell j)^m.$$

Για $x \geq 1$ ισχύει $(x + \ell j)^m = \left(1 + \frac{\ell j}{x}\right)^m x^m \leq (1 + \ell j)^m w(x)$, ενώ για $x = 0$, $(x + \ell j)^m = (\ell j)^m \leq (1 + \ell j)^m w(0)$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν α, ℓ με $0 \leq \alpha < 1$ και $\ell \geq 1$ τέτοια ώστε $(1 + \ell j)^m \leq \alpha\beta^{-\ell}$. Επειδή $0 < \beta < 1$, ισχύει ότι $\lim_{\ell\to\infty} \beta^\ell(1 + \ell j)^m = 0$, επομένως παίρνοντας οποιοδήποτε α με $0 < \alpha < 1$, υπάρχει αρκετά μεγάλο ℓ τέτοιο ώστε η παραπάνω ανισότητα ισχύει, επομένως προκύπτει η (6.22) .

6.7 Ασκήσεις

Άσκηση 6.1 *Έστω μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{1, 2, ...\}$, πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x), x \in \mathscr{X}$, συνάρτηση άμεσου κόστους $c(x, a)$ και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{xy}(a)$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε κατάσταση και απόφαση (x, a) υπάρχει πιθανότητα β η διαδικασία να μεταβεί σε μια τερματική κατάσταση 0 όπου η διαδικασία σταματά να εξελίσσεται. Δείξτε ότι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου συνολικού κόστους άπειρου ορίζοντα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου αποπληθωρισμένου κόστους στο πρόβλημα χωρίς την πιθανότητα σταματήματος.*

Άσκηση 6.2 *Κάθε χρόνο πρέπει να αποφασίσετε αν θα δηλώσετε ένα συγκεκριμένο μέρος του εισοδήματός σας στην εφορία. Αν δηλώσετε, θα πληρώσετε φόρο T. Αν δεν το δηλώσετε και η εφορία ελέγξει τη δήλωσή σας, θα πληρώσετε R. Η εφορία κάθε χρόνο χωρίζει τους φορολογούμενους σε τρεις κατηγορίες, αυτούς που οι δηλώσεις τους δεν ελέγχθηκαν την προηγούμενη χρονιά, αυτούς που οι δηλώσεις τους ελέγχθηκαν και βρέθηκαν σωστές και αυτούς που οι δηλώσεις τους ελέγχθηκαν και βρέθηκε να μην έχει δηλωθεί το συγκεκριμένο εισόδημα. Η εφορία έχει την πολιτική να ελέγχει τυχαία ποσοστό q_1 από τις δηλώσεις της πρώτης κατηγορίας, q_2 από αυτές της δεύτερης και q_3 από αυτές της τρίτης. Υποθέτουμε ότι γνωρίζετε αυτές τις πιθανότητες. Θέλετε να βρείτε μια πολιτική δήλωσης ή μη του εισοδήματος κάθε χρόνο που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα με συντελεστή αποπληθωρισμού β.*

1. *Κατασκευάστε ένα μοντέλο στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα και γράψτε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης.*

2. *Δείξτε ότι η βέλτιστη πολιτική εξαρτάται από τα T, R μόνο μέσω του λόγου R/T και επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε $T = 1$.*

3. *Για $T = 1, R = 2.5, q_1 = 0.5, q_2 = 0.3, q_3 = 0.8, \beta = 0.9$, εφαρμόστε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών για $n = 5$.*

4. *Βρείτε τη βέλτιστη πολιτική για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής.*

Άσκηση 6.3 *Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν M μηχανήματα τοποθετημένα σε ευθεία γραμμή σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (έστω ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μηχανημάτων είναι ίση με 1). Υπάρχει επίσης ένας συντηρητής που κάθε μέρα κάνει συντήρηση σε ένα μηχάνημα ανάλογα με τις ανάγκες. Αν στην αρχή μιας μέρας ο συντηρητής βρίσκεται στο μηχάνημα i, στην αρχή της επόμενης θα βρίσκεται στο μηχάνημα j με πιθανότητα p_{ij}, $i, j = 1, \dots, M$.*

Ο συντηρητής προμηθεύεται τα απαραίτητα εργαλεία κάθε μέρα από έναν σταθμό εργαλείων, που έχει τη δυνατότητα να μετακινείται στην αρχή κάθε μέρας όπως αποφασίζει ο εργοδηγός του εργοστασίου. Οι δυνατές θέσεις του σταθμού εργαλείων συμπίπτουν με τις M θέσεις των μηχανημάτων. Συγκεκριμένα, στην αρχή της μέρας ο εργοδηγός βλέπει τη θέση m του σταθμού, τη θέση i που θα πρέπει να εργαστεί ο συντηρητής και αποφασίζει σε ποια θέση θα τοποθετήσει τον σταθμό εργαλείων για τη συγκεκριμένη μέρα.

Το κόστος μετακίνησης του σταθμού από τη θέση m στη θέση l είναι ίσο με $d(m, l)$. Επιπλέον, αν ο συντηρητής βρίσκεται στη θέση i και ο σταθμός στη θέση l, τότε το κόστος προμήθειας εργαλείων για αυτήν τη μέρα είναι ίσο με $c(i, l)$.

Ο εργοδηγός θέλει να βρει μια πολιτική μετακίνησης του σταθμού έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο αποπληθωρισμένο κόστος άπειρου ορίζοντα με συντελεστή αποπληθωρισμού β.

1. *Να ορίσετε ένα μοντέλο Μαρκοβιανής Διαδικασίας Αποφάσεων και να γραφτούν οι εξισώσεις βελτιστοποίησης.*

2. *Να επαναλάβετε το (α) για την περίπτωση που ο ο εργοδηγός αποφασίζει τη θέση του σταθμού γνωρίζοντας πού βρισκόταν ο συντηρητής την προηγούμενη μέρα, αλλά πριν μάθει τη θέση όπου θα εργαστεί αυτήν τη μέρα.*

3. *Έστω ότι $c(i, l) = c|i - l|$ και $d(m, l) = d|m - l|$, όπου c, d σταθερές. Δείξτε ότι σ' αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική εξαρτάται από τα c, d μόνο μέσω του λόγου c/d.*

Άσκηση 6.4 *Έστω μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, \dots, M\}$, πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x)$, φραγμένη συνάρτηση κόστους ενός βήματος $|c(x, a)| \leq M$, για όλα τα x, a, και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{xy}(a)$. Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αναμενόμενης παρούσας αξίας του συνολικού κόστους σε άπειρο ορίζοντα, με συντελεστή αποπληθωρισμού β.*

Έστω ότι εφαρμόζεται ο αλγόριθμος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο τιμών. Να δείξετε ότι αν η βέλτιστη πολιτική του προβλήματος άπειρου ορίζοντα είναι μοναδική, τότε μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό προσεγγίσεων n_0 *η βέλτιστη πολιτική του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα* n_0 *είναι επίσης μοναδική και συμπίπτει με αυτήν του προβλήματος άπειρου ορίζοντα.*

(Υπόδειξη: Έστω v *η συνάρτηση βέλτιστης τιμής και* π *η μοναδική βέλτιστη πολιτική. Έστω επίσης* $\delta = \min_{x\in\mathscr{X}} \min_{a\neq\pi(x)}(c(x,a) - \beta \sum_y p_{xy}(a)v(y))$*. Παρατηρήστε ότι* $\delta > 0$ *και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 6.4.)*

Άσκηση 6.5 *Έστω μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων σύμφωνα με την περιγραφή του Παραδείγματος 6.5, με συνάρτηση άμεσου κόστους* $c(x,a) = \theta^x$*, όπου* $0 < \theta < \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{j}}$*. Δείξτε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.7.*

6.8 Σχόλια

Το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μέσου συνολικού αποπληθωρισμένου κόστους παρουσιάζεται σε όλα τα κλασικά εισαγωγικά συγγράμματα στη θεωρία του Δυναμικού Προγραμματισμού και των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων με εφαρμογές σε ποικίλα πεδία. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τα συγγράμματα Bertsekas 2017, Bertsekas 2012, Ross 1983 και Puterman 1994. Τα αποτελέσματα υπό αυτό το κριτήριο είναι ιδιαίτερα κομψά και οι σχετικές αποδείξεις παρουσιάζουν τις λιγότερες τεχνικές δυσκολίες σε σχέση με τα άλλα βασικά κριτήρια που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

[1] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 1, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2017. ISBN: 978-1886529434.

[2] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 2: Approximate Dynamic Programming, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2012. ISBN: 978-1886529441.

[3] S. Ross. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. New York, NY: Academic Press, 1983.

[4] M. Puterman. *Markov Decision Processes*. New York, NY: Wiley, 1994.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟ ΟΡΙΖΟΝΤΑ: ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων όπου το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου μέσου κόστους ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα. Αρχικά παρουσιάζονται οι διαφορές από το πρόβλημα του αποπληθωρισμένου κόστους που μελετήθηκε στο κεφάλαιο 6 ως προς την ύπαρξη βέλτιστων πολιτικών. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η βασική θεωρία που αφορά την εξίσωση βελτιστοποίησης και μια σειρά από ικανές συνθήκες για ύπαρξη λύσης και στάσιμης βέλτιστης πολιτικής. Η ανάλυση γίνεται θεωρώντας διαδοχικά προβλήματα αποπληθωρισμένου κόστους με συντελεστή αποπληθωρισμού που να συγκλίνει στη μονάδα. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται η μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων στον χώρο των πολιτικών για την επίλυση πεπερασμένων επαναληπτικών Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των Μαρκοβιανών αλυσίδων με κόστη, όπως αυτή περιγράφεται στο κεφάλαιο 3, καθώς και της θεωρίας των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων πεπερασμένου ορίζοντα και Μαρκοβιανών Δαδικασιών Αποφάσεων με κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους, που αναπτύχθηκε στα κεφάλαια 5 και 6, αντίστοιχα.

7.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου μέσου κόστους ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα. Η ανάλυση αυτών των προβλημάτων είναι αρκετά πιο πολύπλοκη από την αντίστοιχη για το κριτήριο του αποπληθωρισμένου κόστους. Για αυτόν τον

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

λόγο δεν θα ασχοληθούμε με την εντελώς γενική περίπτωση αλλά θα μελετήσουμε το πρόβλημα κάτω από συγκεκριμένες απλουστευτικές υποθέσεις, όπως θα δούμε παρακάτω.

Αντίστοιχα με το προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X}$, σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x), x \in \mathscr{X}$, συνάρτηση άμεσου κόστους $c(x,a)$ και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{xy}(a), x, y \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$. Ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμήσιμο σύνολο και τα σύνολα αποφάσεων πεπερασμένα. Και εδώ υποθέτουμε χρονική ομογένεια ως προς τα κόστη και τις πιθανότητες μετάβασης, όπως επίσης ότι η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι φραγμένη δηλαδή

$$|c(x,a)| \leq M,$$

για κάποιο $M < \infty$ και για κάθε ζεύγος (x,a). Έστω

$$h_t = x_0 a_0 x_1 a_1 \cdots x_{t-1} a_{t-1} x_t$$

μια ιστορία καταστάσεων και αποφάσεων μέχρι την περίοδο t και

$$H_t = X_0 A_0 X_1 A_1 \cdots X_{t-1} A_{t-1} X_t$$

η τυχαία μεταβλητή της ιστορίας μέχρι την περίοδο t. Σε αντιστοιχία με την ενότητα 5.4 θεωρούμε τις κλάσεις των ιστοριοεξαρτώμενων, των Μαρκοβιανών, των στάσιμων, των τυχαιοποιημένων και των προσδιοριστικών πολιτικών όπως επίσης και συνδυασμούς των παραπάνω.

Ως μέτρο απόδοσης μιας (γενικά ιστοριοεξαρτώμενης) πολιτικής π θεωρούμε το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα κάτω από αυτήν την πολιτική

$$J_\pi(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} E_\pi\left[\sum_{t=0}^{N} c(X_t, A_t) | X_0 = x_0\right], \tag{7.1}$$

με τη σύμβαση ότι αν το όριο δεν υπάρχει, τότε θεωρούμε το $\limsup$.

Η συνάρτηση βέλτιστου μέσου κόστους ορίζεται ως

$$J(x_0) = \inf_{\pi \in \Pi^{HR}} J_\pi(x_0), \tag{7.2}$$

ενώ μια πολιτική π^* είναι βέλτιστη αν $J_{\pi^*}(x_0) = J(x_0), x_0 \in \mathscr{X}$.

Η ανάλυση του προβλήματος του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους παρουσιάζει μεγαλύτερες τεχνικές δυσκολίες σε σύγκριση με το κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους. Μια βασική δυσκολία προκύπτει από το γεγονός ότι η ύπαρξη βέλτιστης πολιτικής που επιτυγχάνει το ελάχιστο στην (7.2) δεν είναι πάντα εξασφαλισμένη. Αντίθετα, μπορεί κανείς να κατασκευάσει σχετικά εύκολα αντιπαραδείγματα, στα οποία δεν υπάρχει βέλτιστη πολιτική. Ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι το εξής:

Έστω μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων με χώρο καταστάσεων

$$\mathscr{X} = \{(0,1), (0,2), \ldots\} \cup \{(1,1), (1,2), \ldots\}.$$

Στις καταστάσεις $(0,i), i \geq 1$ υπάρχουν δύο αποφάσεις $\mathscr{A}(0,i) = \{1,2\}$, ενώ στις καταστάσεις $(1,i), i \geq 1$ υπάρχει μια απόφαση $\mathscr{A}(1,i) = \{1\}$. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι

$$P_{(0,i),(0,i+1)}(1) = P_{(0,i),(1,i)}(2) = P_{(1,i),(1,i)}(1) = 1, \ \ i \geq 1,$$

ενώ τα κόστη ενός βήματος

$$c((0,i),1) = c((0,i),2) = 1, c((1,i),1) = \frac{1}{i}, \ \ i \geq 1.$$

Συνοπτικά, στην κατάσταση $(0, i)$ μπορούμε είτε να κινηθούμε στην $(0, i+1)$ είτε στην $(1, i)$ και τα δύο με κόστος 1. Αν επιλέξουμε μετακίνηση στην $(1, i)$, τότε η διαδικασία απορροφάται σε αυτήν την κατάσταση με κόστος $1/i$ ανά περίοδο για όλες τις μελλοντικές περιόδους.

Στο πρόβλημα αυτό όλα τα κόστη ενός βήματος είναι θετικά, επομένως $J_\pi(x_0) > 0$ για κάθε πολιτική π και αρχική κατάσταση x_0, επομένως $J(x_0) \geq 0, x \in \mathscr{X}$. Επίσης, για $x_0 = (1, i), i \geq 1$, ισχύει $J((1, i)) = 1/i$. Θεωρούμε την πολιτική π_i η οποία στις καταστάσεις $(0, j), j < i$ παίρνει την απόφαση 1 και στις καταστάσεις $(0, j), j \geq i$ την απόφαση 2. Για την πολιτική αυτή ισχύει

$$J_{\pi_i}(x_0) = \begin{cases} 1/i, & x_0 = (0, j), j \leq i \\ 1/j, & x_0 = (0, j), j > i \\ 1/j, & x_0 = (1, j), j \geq 1 \end{cases}.$$

Παίρνοντας i αρκετά μεγάλο, η πολιτική π_i πετυχαίνει τιμή του $J_{\pi_i}((0, j))$ αυθαίρετα κοντά στο 0, για κάθε $j \geq 1$, επομένως $J((0, j)) = 0$. Επειδή, όμως, καμιά πολιτική π δεν μπορεί να πετύχει $J_\pi((0, j)) = 0$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει βέλτιστη πολιτική.

Στο παραπάνω παράδειγμα δεν υπάρχει βέλτιστη πολιτική, όμως υπάρχουν στάσιμες ϵ-βέλτιστες πολιτικές, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στάσιμη πολιτική π για την οποία ισχύει $J_\pi(x_0) < J(x_0) + \epsilon$, για κάθε $x_0 \in \mathscr{X}$. Αυτό, επίσης, δεν ισχύει πάντα, καθώς μπορούν να κατασκευαστούν παραδείγματα στα οποία υπάρχει βέλτιστη πολιτική, αλλά δεν υπάρχουν ούτε βέλτιστες ούτε ϵ-βέλτιστες στάσιμες πολιτικές. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Ross 1983, κεφάλαιο V και Puterman 1994, κεφάλαιο 8.

Μια δεύτερη δυσκολία στην ανάλυση του προβλήματος του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους είναι ότι η συνάρτηση του μέσου κόστους στην (7.1) δεν έχει προφανή αναδρομική έκφραση που να επιτρέπει άμεση κατάστρωση εξισώσεων βελτιστοποίησης. Θα δούμε, όμως, στη συνέχεια ότι είναι δυνατό, κάτω από κατάλληλες υποθέσεις, να οριστούν εξισώσεις βελτιστοποίησης που οδηγούν σε βέλτιστες πολιτικές που είναι και στάσιμες.

7.2 Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ένα βασικό αποτέλεσμα για την ύπαρξη βέλτιστης στάσιμης πολιτικής στο πρόβλημα του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους, η οποία προκύπτει από τη λύση ενός συστήματος εξισώσεων βελτιστοποίησης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Θεώρημα 7.1 (Εξίσωση βελτιστοποίησης μακροπρόθεσμου μέσου κόστους) *Αν υπάρχουν μια σταθερά g και μια φραγμένη συνάρτηση $w(x), x \geq 0$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις*

$$g + w(x) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x, a) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w(y) \right], x \geq 0, \tag{7.3}$$

τότε

$$J(x) = g, \ \ x \geq 0$$

και η στάσιμη πολιτική π^*, η οποία σε κάθε κατάσταση x παίρνει οποιαδήποτε απόφαση που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέρος της (7.3), είναι βέλτιστη, δηλαδή

$$J_{\pi^*}(x) = g, \ \ x \geq 0.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θεωρούμε $g, w(x), x \geq 0$ που ικανοποιούν τις (7.3). Για μια ιστορία καταστάσεων και αποφάσεων για τις περιόδους $0, 1, \ldots, n-1$, $h_n = x_0 a_0 x_1 a_1 \cdots x_{n-1} a_{n-1}$ το συνολικό κόστος είναι ίσο με

$$\sum_{t=0}^{n-1} c(x_t, a_t) = \sum_{t=0}^{n-1} \left[c(x_t, a_t) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{x_t y}(a_t) w(y) \right] - \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{\infty} p_{x_t y}(a_t) w(y)$$

Από την (7.3) παίρνουμε

$$c(x_t, a_t) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{x_t y}(a_t) w(y) \geq g + w(x_t), t = 0, 1, \dots, n-1,$$

ενώ, επίσης,

$$\sum_{y=0}^{\infty} p_{x_t y}(a_t) w(y) = E[w(X_{t+1}) | X_t = x_t, A_t = a_t], t = 0, 1, \dots, n-1.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} c(x_t, a_t) &\geq ng + \sum_{t=0}^{n-1} w(x_t) - \sum_{t=0}^{n-1} E[w(X_{t+1}) | X_t = x_t, A_t = a_t] \\
&= ng + \sum_{t=0}^{n-1} w(x_t) - \sum_{t=1}^{n} E[w(X_t) | X_{t-1} = x_{t-1}, A_{t-1} = a_{t-1}] \\
&= ng + w(x_0) - E[w(X_n) | X_{n-1} = x_{n-1}, A_{n-1} = a_{n-1}] + \sum_{t=1}^{n-1} F(x_{t-1}, a_{t-1}, x_t), \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

όπου

$$F(x_{t-1}, a_{t-1}, x_t) = w(x_t) - E[w(X_t) | X_{t-1} = x_{t-1}, A_{t-1} = a_{t-1}].$$

Επειδή η (7.4) ισχύει για οποιαδήποτε ιστορία h_n, ισχύει και για την τυχαία μεταβλητή H_n, δηλαδή

$$\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, A_t) \geq ng + w(X_0) - E[w(X_n) | X_{n-1}, A_{n-1}] + \sum_{t=1}^{n-1} F(X_{t-1}, A_{t-1}, X_t).$$

Θεωρούμε τώρα μια οποιαδήποτε πολιτική $\pi \in \Pi^{HR}$. Παίρνοντας τις αναμενόμενες τιμές στα δύο μέρη της ανισότητας κάτω από την π και για αρχική κατάσταση x_0, έχουμε

$$\mathrm{E}_\pi\left[\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, A_t) | X_0 = x_0\right] \geq ng + w(x_0) - \mathrm{E}_\pi[E[w(X_n) | X_{n-1}, A_{n-1}, X_0 = x_0]] + \sum_{t=1}^{n-1} \mathrm{E}_\pi[F(X_{t-1}, A_{t-1}, X_t) | X_0 = x_0]. \qquad (7.5)$$

Όμως από το θεώρημα της διπλής μέσης τιμής ισχύει

$$\mathrm{E}_\pi[E[w(X_t) | X_{t-1}, A_{t-1}, X_0 = x_0]] = \mathrm{E}_\pi[w(X_t) | X_0 = x_0], t = 1, \dots, n,$$

επομένως

$$\mathrm{E}_\pi[E[w(X_n) | X_{n-1}, A_{n-1}, X_0 = x_0]] = \mathrm{E}_\pi[w(X_n) | X_0 = x_0]$$

και

$$\mathrm{E}_\pi[F(X_{t-1}, A_{t-1}, X_t) | X_0 = x_0] = 0, t = 1, \dots, n.$$

Αντικαθιστώντας στην (7.5), προκύπτει

$$\mathrm{E}_\pi\left[\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, A_t) | X_0 = x_0\right] \geq ng + w(x_0) - \mathrm{E}_\pi[w(X_n) | X_0 = x_0],$$

επομένως

$$\frac{\mathrm{E}_\pi\left[\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, A_t) | X_0 = x_0\right]}{n} \geq g + \frac{w(x_0)}{n} - \frac{\mathrm{E}_\pi[w(X_n) | X_0 = x_0]}{n}.$$

Επειδή η $w(x)$ είναι φραγμένη, ισχύει $\lim_{n\to\infty} w(x_0)/n = \lim_{n\to\infty} E_\pi[w(X_n)|X_0 = x_0]/n = 0$, επομένως παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}_\pi\left[\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, A_t)|X_0 = x_0\right]}{n} \geq g,$$

δηλαδή

$$g \leq J_\pi(x_0), x_0 \geq 0,$$

για κάθε πολιτική π, επομένως

$$g \leq J(x_0), x_0 \geq 0. \tag{7.6}$$

Θεωρούμε τώρα μια στάσιμη ντετερμινιστική πολιτική π^* (όχι απαραίτητα μοναδική), η οποία σε κάθε κατάσταση x παίρνει μια απόφαση $a = \pi^*(x)$ που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέρος της (7.3). Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες αποφάσεις σε μια κατάσταση, η π^* επιλέγει αυθαίρετα μία από αυτές, αλλά πάντα την ίδια. Μια τέτοια πολιτική είναι καλά ορισμένη, επειδή τα σύνολα αποφάσεων είναι πεπερασμένα, επομένως υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία απόφαση που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέρος της (7.3) για κάθε x.

Κάτω από την πολιτική π^*, μια ιστορία προσδιορίζεται μόνο από την ακολουθία καταστάσεων, επειδή οι αποφάσεις ορίζονται μονοσήμαντα σε κάθε κατάσταση, δηλαδή $h_t = x_0\pi^*(x_0)x_1\pi^*(x_1)\cdots x_t\pi^*(x_t)$. Επειδή από τον ορισμό της π^* ισχύει ότι

$$c(x_t, \pi^*(x_t)) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{x_t y}(\pi^*(x_t))w(y) = g + w(x_t), t = 0, 1, \ldots, n-1,$$

είναι εύκολο να δούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η (7.4) και όλες οι επόμενες ανισότητες ισχύουν με ισότητα. Επομένως

$$g = J_{\pi^*}(x_0), x_0 \geq 0,$$

και από την (7.6) προκύπτει ότι

$$g = J(x_0) = J_{\pi^*}(x_0), x_0 \geq 0,$$

και η πολιτική π^* είναι βέλτιστη. Επομένως η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Μια πρώτη παρατήρηση σχετικά με το Θεώρημα 7.1 είναι ότι όταν υπάρχει λύση των εξισώσεων βελτιστοποίησης (7.3), αυτή δεν είναι μοναδική, επειδή η συνάρτηση $w(x)$ είναι ορισμένη έως μια σταθερά. Πράγματι, αν οι $g, w(x), x \geq 0$ ικανοποιούν τις εξισώσεις, τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι και οι $g, w'(x), x \geq 0$ όπου $w'(x) = w(x) + \theta$ και θ οποιαδήποτε σταθερά, επίσης τις ικανοποιούν. Από την άλλη πλευρά, σε οποιαδήποτε λύση των (7.3) η σταθερά g προσδιορίζεται μονοσήμαντα, επειδή ταυτίζεται με το ελάχιστο μέσο κόστος άπειρου ορίζοντα, το οποίο είναι μοναδικό.

Το Θεώρημα 7.1 είναι σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση των προβλημάτων μακροπρόθεσμου μέσου κόστους, όμως δημιουργεί μια σειρά ερωτήματα. Ένα πρώτο ερώτημα αφορά τη γενικότητα του αποτελέσματος, δηλαδή κάτω από ποιες συνθήκες υπάρχει λύση των εξισώσεων βελτιστοποίησης (7.3) και επομένως και βέλτιστη πολιτική. Η απάντηση σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη δομή της στοχαστικής διαδικασίας που προκύπτει κάτω από κάθε πολιτική.

Ένα δεύτερο ερώτημα, που σχετίζεται με το προηγούμενο, αναφέρεται στο γεγονός ότι κάτω από το Θεώρημα 7.1 η συνάρτηση του βέλτιστου μέσου κόστους είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση. Γιατί να ισχύει μια τέτοια ιδιότητα και πόσο γενική είναι; Και εδώ η απάντηση εξαρτάται από τις κλάσεις επικοινωνίας της Μαρκοβιανής διαδικασίας κάτω από μια στάσιμη πολιτική. Στη γενική περίπτωση η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει, και για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής (όταν υπάρχει), απαιτείται η λύση γενικότερων εξισώσεων βελτιστοποίησης.

Τέλος, ένα τρίτο ερώτημα σχετίζεται με τη διαισθητική ερμηνεία των εξισώσεων βελτιστοποίησης, καθώς αυτές δεν προκύπτουν άμεσα από αναδρομικές σχέσεις, όπως στην περίπτωση των κριτηρίων του μέσου κόστους πεπερασμένου ορίζοντα και του αποπληθωρισμένου μέσου κόστους άπειρου ορίζοντα. Γενικά μπορεί να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις βελτιστοποίησης προκύπτουν αν θεωρήσουμε το πρόβλημα του μέσου κόστους ως κατάλληλα ορισμένο όριο είτε του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα όταν το μήκος του ορίζοντα τείνει στο άπειρο είτε του προβλήματος του αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα όταν ο συντελεστής αποπληθωρισμού τείνει στη μονάδα.

Οι πλήρεις απαντήσεις των παραπάνω ερωτημάτων είναι πέρα από τους σκοπούς του παρόντος συγγράμματος και ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Puterman 1994, κεφάλαια 8 και 9 για λεπτομερή ανάλυση και αποδείξεις. Στην επόμενη ενότητα θα προσδιορίσουμε ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν την ισχύ του Θεωρήματος 7.1 και θα συζητήσουμε γενικεύσεις στην περίπτωση που αυτές οι συνθήκες δεν ικανοποιούνται. Όμως, πριν προχωρήσουμε, θα συζητήσουμε μια σχετικά απλή ερμηνεία των εξισώσεων βελτιστοποίησης, η οποία, αν και δεν θα αποδειχθεί αυστηρά, εντούτοις είναι χρήσιμη για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος.

Έστω ότι το ελάχιστο μακροπρόθεσμο μέσο κόστος είναι ίσο με g και είναι ανεξάρτητο από την αρχική κατάσταση. Θεωρούμε πρώτα το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους πεπερασμένου ορίζοντα που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 5, όπου η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x)$ εκφράζει το ελάχιστο κόστος όταν απομένουν n βήματα έως το τέλος του ορίζοντα και η παρούσα κατάσταση είναι x. Όταν το μήκος του ορίζοντα τείνει στο άπειρο, είναι διαισθητικά αναμενόμενο ότι η $v_n(x)$ θα αυξάνει γραμμικά με ρυθμό ίσο με το βέλτιστο μέσο κόστος g, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n(x)}{n} = g,$$

ή ισοδύναμα

$$v_n(x) = ng + d_n(x),$$

όπου $d_n(x) = o(n)$ όταν $n \to \infty$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n(x)}{n} = 0$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η $d_n(x)$ έχει τη συγκεκριμένη μορφή $d_n(x) = w(x) + e_n(x)$ όπου $\lim_{n\to\infty} e_n(x) = 0$, δηλαδή ότι

$$v_n(x) = ng + w(x) + e_n(x),$$

και αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις βελτιστοποίησης πεπερασμένου ορίζοντα (5.14), παίρνουμε

$$ng + w(x) + e_n(x) = \min_{a\in\mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a)((n-1)g + w(y) + e_{n-1}(y)) \right], \ x \ge 0.$$

Αφαιρώντας το $(n-1)g$ από τα δύο μέρη της εξίσωσης και παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$, προκύπτει η (7.3).

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μέσου αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 6, όπου η συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v(x)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις βελτιστοποίησης (6.4). Για τιμές του συντελεστή αποπληθωρισμού β κοντά στη μονάδα, το πρόβλημα προσεγγίζει αυτό του πεπερασμένου ορίζοντα όταν $n \to \infty$, επομένως και εδώ είναι διαισθητικά αναμενόμενο ότι

$$v(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t g + \tilde{d}_\beta(x) = \frac{g}{1-\beta} + \tilde{d}_\beta(x),$$

όπου $\tilde{d}_\beta(x) = o\left(\frac{1}{1-\beta}\right)$ όταν $\beta \to 1$, δηλαδή $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\tilde{d}_\beta(x) = 0$. Αν εδώ υποθέσουμε ότι η $\tilde{d}_\beta(x)$ έχει τη μορφή $\tilde{d}_\beta(x) = w(x) + \tilde{e}_\beta(x)$, όπου $\lim_{\beta\to 1} \tilde{e}_\beta(x) = 0$, δηλαδή ότι

$$v(x) = \frac{g}{1-\beta} + w(x) + \tilde{e}_\beta(x),$$

και αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις βελτιστοποίησης (6.4), παίρνουμε

$$\frac{g}{1-\beta} + w(x) + \tilde{e}_\beta(x) = \min_{a\in\mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y\in\mathscr{X}} p_{xy}(a) \left(\frac{g}{1-\beta} + w(y) + \tilde{e}_\beta(y) \right) \right], \ x \ge 0.$$

Αφαιρώντας το $\frac{\beta g}{1-\beta}$ από τα δύο μέρη της εξίσωσης και παίρνοντας το όριο για $\beta \to 1$, προκύπτει και πάλι η (7.3).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι παραπάνω συλλογισμοί παρουσιάζονται εδώ περισσότερο ως εικασίες που οδηγούν σε διαισθητική ερμηνεία των εξισώσεων βελτιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους, και όχι ως αυστηρά αποτελέσματα. Στη βιβλιογραφία των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων έχουν αποδειχθεί αναλυτικά πολλά αποτελέσματα που αφορούν την οριακή συμπεριφορά των προβλημάτων του κόστους πεπερασμένου ορίζοντα και του αποπληθωρισμένου κόστους και πώς αυτά σχετίζονται με το πρόβλημα του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους, κάτω από πολύ γενικές συνθήκες.

7.3 Ύπαρξη Λύσης Εξισώσεων Βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μερικές ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύουν οι προϋοθέσεις του Θεωρήματος 7.1 που εξασφαλίζει την ύπαρξη στάσιμης βέλτιστης πολιτικής για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους. Η ανάλυση βασίζεται στην οριακή συμπεριφορά του προβλήματος του αποπληθωρισμένου κόστους άπειρου ορίζοντα όταν ο συντελεστής αποπληθωρισμού $\beta \to 1$. Σημειώνουμε ότι επειδή $\beta < 1$, ο συμβολισμός $\beta \to 1$ σημαίνει πάντα σύγκλιση από αριστερά.

Θεωρούμε αρχικά τη συνάρτηση βέλτιστης τιμής του προβλήματος αποπληθωρισμένου κόστους. Επειδή θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της για μεταβαλλόμενες τιμές του β, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $v_\beta(x), x \geq 0$. Η εξίσωση βελτιστοποίησης (6.4) για την $v_\beta(x)$ γράφεται ως εξής:

$$v_\beta(x) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) v_\beta(y) \right], \ \ x \geq 0.$$

Όπως έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο, κάτω από την υπόθεση ότι η συνάρτηση κόστους ενός βήματος είναι φραγμένη, η $v_\beta(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $x \geq 0$.

Παίρνουμε αυθαίρετα μια κατάσταση, έστω την κατάσταση 0, και ορίζουμε

$$\begin{aligned} g_\beta &= (1-\beta) v_\beta(0) \\ w_\beta(x) &= v_\beta(x) - v_\beta(0), \ \ x \geq 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την $v_\beta(x) = w_\beta(x) + v_\beta(0)$ στην εξίσωση βελτιστοποίησης παίρνουμε

$$w_\beta(x) + v_\beta(0) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) \left(w_\beta(y) + v_\beta(0) \right) \right], \ \ x \geq 0,$$

επομένως

$$g_\beta + w_\beta(x) = \min_{a \in \mathscr{A}(x)} \left[c(x,a) + \beta \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w_\beta(y) \right], \ \ x \geq 0 \tag{7.7}$$

για κάθε $\beta \in [0,1)$.

Επομένως αν αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\beta_n, n = 1,2,\ldots$ με $\beta_n \to 1$ τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to\infty} g_{\beta_n} = g$ και $\lim_{n\to\infty} w_{\beta_n}(x) = w(x), x \geq 0$, τότε οι $g, w(x), x \geq 0$ ικανοποιούν τις εξισώσεις βελτιστοποίησης του μέσου κόστους (7.3) και από το Θεώρημα 7.1 προκύπτει ότι υπάρχει στάσιμη βέλτιστη πολιτική. Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη των ορίων.

Θεώρημα 7.2 (Σύγκλιση προβλήματος αποπληθωρισμένου κόστους στο πρόβλημα μέσου κόστους) *Έστω ότι οι συναρτήσεις $w_\beta(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, δηλαδή υπάρχει $K < \infty$ έτσι ώστε*

$$|w_\beta(x)| < K, \ \ \beta \in [0,1), \ \ x \geq 0.$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Υπάρχει μια σταθερά g και μια φραγμένη συνάρτηση $w(x), x \geq 0$ που ικανοποιούν την (7.3).

(ii) Υπάρχει ακολουθία $\beta_n, n = 1, 2, \dots$ με $\beta_n \to 1$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} w_{\beta_n}(x) = w(x), x \geq 0$.

(iii) $\lim_{\beta\to1} g_\beta = g = J(x), x \geq 0$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θεωρούμε μια ακολουθία $\beta_n, n = 1, 2, \dots$ με $\beta_n \to 1$. Επειδή η g_β είναι φραγμένη συνάρτηση του β, η ακολουθία g_{β_n} είναι επίσης φραγμένη, επομένως υπάρχει μια υποακολουθία $\beta_{0,n}$ της β_n τέτοια ώστε η $g_{\beta_{0,n}}$ να συγκλίνει. Έστω $g = \lim_{n\to\infty} g_{\beta_{0,n}}$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης Cauchy, θα κατασκευάσουμε μια υποακολουθία $\bar{\beta}_n$ της $\beta_{0,n}$ τέτοια ώστε οι ακολουθίες $w_{\bar{\beta}_n}(x), n = 1, 2, \dots$ να συγκλίνουν για κάθε $x \geq 1$ (για $x = 0$ ισχύει $w_\beta(0) = 0$ για κάθε β). Αυτό γίνεται ως εξής:

Έστω $x = 1$. Από την υπόθεση του θεωρήματος έχουμε ότι η ακολουθία $w_{\beta_{0,n}}(1)$ είναι φραγμένη, επομένως υπάρχει υποακολουθία $\beta_{1,n}$ της $\beta_{0,n}$ για την οποία η $w_{\beta_{1,n}}(1)$ συγκλίνει, και έστω $w(1) = \lim_{n\to\infty} w_{\beta_{1,n}}(1)$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα για $x = 2$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υποακολουθία $\beta_{2,n}$ της $\beta_{1,n}$ για την οποία η $w_{\beta_{2,n}}(2)$ συγκλίνει, και έστω $w(2) = \lim_{n\to\infty} w_{\beta_{2,n}}(2)$. Όμοια για $x \geq 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικές υποακολουθίες $\beta_{x,n}$, τέτοιες ώστε για κάθε x η $\beta_{x,n}$ είναι υποακολουθία της $\beta_{x-1,n}$ και η $w_{\beta_{x,n}}(x)$ συγκλίνει. Έστω $w(x) = \lim_{n\to\infty} w_{\beta_{x,n}}(x), x = 3, 4, \dots$. Επειδή η $w_{\beta_{x,n}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για $x \geq 0$, η $w(x), x \geq 0$ είναι φραγμένη ως προς x.

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $\bar{\beta}_n = \beta_{n,n}, n = 1, 2, \dots$. Για την ακολουθία αυτή έχουμε ότι για κάθε $x \geq 1$ η υποακολουθία $\bar{\beta}_n, n = x, x+1, \dots$ της $\bar{\beta}_n$ είναι επίσης υποακολουθία της $\beta_{x,n}$, επομένως $\lim_{n\to\infty} w_{\bar{\beta}_n}(x) = w(x)$.

Επιπλέον, αντικαθιστώντας τις $g_{\bar{\beta}_n}$ και $w_{\bar{\beta}_n}(x)$ στην (7.7) παίρνουμε

$$g_{\bar{\beta}_n} + w_{\bar{\beta}_n}(x) = \min_{a\in\mathscr{A}(x)} \left[c(x, a) + \bar{\beta}_n \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w_{\bar{\beta}_n}(y) \right], \ \ x \geq 0,$$

για κάθε n.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παίρνουμε το όριο για $n \to \infty$ στην παραπάνω εξίσωση. Πρέπει όμως να δικαιολογήσουμε την εναλλαγή του ορίου με το min και το άθροισμα στο δεξιό μέρος. Όσον αφορά την ελαχιστοποίηση, επειδή το σύνολο $\mathscr{A}(x)$ είναι πεπερασμένο, η εναλλαγή ισχύει. Για το άθροισμα, επειδή οι ακολουθίες $w_{\bar{\beta}_n}(y), n = 1, 2, \dots$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες για $y = 0, 1, \dots$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w_{\bar{\beta}_n}(y) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w(y),$$

επομένως

$$g + w(x) = \min_{a\in\mathscr{A}(x)} \left[c(x, a) + \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}(a) w(y) \right], \ \ x \geq 0,$$

δηλαδή τα όρια $g, w(x), x \geq 0$ που προκύπτουν μέσω της υποακολουθίας $\bar{\beta}_n$ ικανοποιούν την (7.3). Έτσι αποδείξαμε τον ισχυρισμό (i) του θεωρήματος.

Ο ισχυρισμός (ii) προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω για την ακολουθία $\bar{\beta}_n$.

Για τον ισχυρισμό (iii) παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $\beta'_n \to 1$ τέτοια ώστε η $g_{\beta'_n}$ να συγκλίνει, μπορούμε ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία, να κατασκευάσουμε μια σταθερά g' και μια φραγμένη συνάρτηση $w'(x), x \geq 0$, για τις οποίες $\lim_{n\to\infty} g_{\beta'_n} = g'$ και $\lim_{n\to\infty} w_{\beta'_n} = w'(x), x \geq 0$, επομένως οι $g', w'(x), x \geq 0$ ικανοποιούν την (7.3). Όμως, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, όλες οι λύσεις της (7.3) έχουν την ίδια τιμή του $g = J(x), x \geq 0$, επομένως $g' = g$. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία g_{β_n} με $\beta_n \to 1$ έχει το ίδιο όριο g επομένως $\lim_{\beta\to1} g_\beta = g = J(x), x \geq 0$.

Από την απόδειξη του θεωρήματος φαίνεται ότι αν αντί για την κατάσταση 0, πάρουμε ως κατάσταση αναφοράς μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση z, τότε θα προκύψει γενικά μια διαφορετική συνάρτηση $w'(x)$, η οποία θα διαφέρει από την $w(x)$ κατά μία σταθερά. Το βέλτιστο κόστος g είναι (κάτω από την ικανή συνθήκη του θεωρήματος) ανεξάρτητο από την κατάσταση αναφοράς.

Γενικά οποιαδήποτε συνάρτηση $w(x)$ προκύψει μπορεί να ερμηνευθεί ως συνάρτηση σχετικής αξίας κάθε κατάστασης, με την έννοια ότι για κάθε x, y η διαφορά $w(x) - w(y)$ δηλώνει τη σχετική αξία της κατάστασης x ως προς την y, με βάση το αποπληθωρισμένο κόστος με συντελεστή αποπληθωρισμού κοντά στη μονάδα. Για τον λόγο αυτό μια συνάρτηση $w(x)$ που ικανοποιεί την (7.3) αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως συνάρτηση μεροληψίας (bias function). Επίσης, η $w(x)$ ως όριο, κατά κανόνα κληρονομεί τις ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας ή κοιλότητας της συνάρτησης τιμής του αποπληθωρισμένου κόστους, όπως επίσης και η βέλτιστη πολιτική κληρονομεί δομικές ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής αποπληθωρισμένου κόστους, όπως για παράδειγμα ιδιότητες κατωφλίου.

Το Θεώρημα 7.2 δίνει μια πρώτη απάντηση όσον αφορά ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης των εξισώσεων βελτιστοποίησης και την ύπαρξη στάσιμης βέλτιστης πολιτικής. Όμως, γενικά δεν είναι εύκολο να ελεγχθεί απευθείας η ιδιότητα ότι οι συναρτήσεις $w_\beta(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς β και x. Τα επόμενα αποτελέσματα δίνουν ικανές συνθήκες για να ισχύει το Θεώρημα 7.2, οι οποίες βασίζονται στις ιδιότητες της στοχαστικής ανέλιξης κάτω από στάσιμες πολιτικές και είναι ευκολότερο να ελεγχθούν.

Πριν προχωρήσουμε υπενθυμίζουμε ότι με βάση το Θεώρημα 5.4, κάτω από οποιαδήποτε στάσιμη προσδιοριστική πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$ η στοχαστική διαδικασία των διαδοχικών καταστάσεων $\{X_t, t = 0, 1, ...\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με κόστη, για την οποία οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι

$$\Pr[X_{t+1} = y | X_t = x] = p_{xy}(\pi(x)), x, y \geq 0$$

και τα άμεσα κόστη ενός βήματος $c(x, \pi(x)), x \geq 0$.

Θεωρούμε το πρόβλημα αποπληθωρισμένου κόστους με συντελεστή αποπληθωρισμού β για το οποίο γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη στάσιμη ντετερμινιστική πολιτική π_β. , Για τη Μαρκοβιανή διαδικασία κάτω από την π_β, έστω T_0 ο χρόνος πρώτης μετάβασης στην κατάσταση 0, σε αντιστοιχία με το Θεώρημα 3.2, και

$$m_{\pi_\beta}(x) = E_{\pi_\beta}[T_0 | X_0 = x], x \geq 0,$$

ο μέσος χρόνος πρώτης μετάβασης στην 0, όταν η αρχική κατάσταση είναι η x.

Θεώρημα 7.3 (Φραγμένοι χρόνοι πρώτης μετάβασης) *Έστω ότι ο μέσος χρόνος πρώτης μετάβασης στην κατάσταση 0 είναι ομοιόμορφα φραγμένος ως προς x και β, δηλαδή υπάρχει σταθερά $N < \infty$ τέτοια ώστε $m_{\pi_\beta}(x) < N$ για κάθε $x \geq 0$ και $\beta < 1$. Τότε η $w_\beta(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς x και β.*

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην έκφραση της συνάρτησης βέλτιστου αποπληθωρισμένου κόστους $v_\beta(x)$ κάτω από μια βέλτιστη πολιτική ως εξής:

$$\begin{aligned} v_\beta(x) &= E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t)) | X_0 = x\right] \\ &= E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{T_0-1} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t)) | X_0 = x\right] + E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=T_0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t)) | X_0 = x)\right]. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής δεσμεύοντας ως προς T_0, ο δεύτερος όρος στην παραπάνω έκφραση γράφεται

$$E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=T_0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t)) | X_0 = x\right] = \mathrm{E}_{\pi_\beta}\left[E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=T_0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t)) | T_0, X_0 = x\right]\right]$$

Όμως, από τον ορισμό του T_0 έχουμε ότι $X_{T_0} = 0$ και λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας, οι καταστάσεις $X_{T_0+t}, t = 1, 2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες του T_0 και του X_0. Επομένως, χρησιμοποιώντας τον ανανεωτικό συλλογισμό για $X_{T_0} = 0$:

$$\begin{aligned} E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=T_0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t))|T_0, X_0 = x\right] &= \beta^{T_0} E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(X_{T_0+t}, \pi_\beta(X_{T_0+t}))|X_{T_0} = 0\right] \\ &= \beta^{T_0} E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t))|X_0 = 0\right] \\ &= \beta^{\mathrm{T}_0} v_\beta(0). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση για την $v_\beta(x)$ παίρνουμε

$$v_\beta(x) = E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{T_0-1} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t))|X_0 = x\right] + E_{\pi_\beta}[\beta^{T_0}|X_0 = x] v_\beta(0),$$

επομένως

$$v_\beta(x) - v_\beta(0) = E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{T_0-1} \beta^t c(X_t, \pi_\beta(X_t))|X_0 = x\right] - \left(1 - E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}|X_0 = x]\right) v_\beta(0)$$

και

$$\begin{aligned} |v_\beta(x) - v_\beta(0)| &\le E_{\pi_\beta}\left[\sum_{t=0}^{T_0-1} \beta^t |c(X_t, \pi_\beta(X_t))| \Big| X_0 = x\right] + \left(1 - E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}|X_0 = x]\right) |v_\beta(0)| \\ &\le m_{\pi_\beta}(x) M + \left(1 - E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}|X_0 = x]\right) \frac{M}{1-\beta} \\ &< NM + \left(1 - E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}|X_0 = x]\right) \frac{M}{1-\beta}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει επειδή $\beta < 1$, ενώ από την υπόθεση της φραγμένης συνάρτησης κόστους $|c(X_t, \pi_\beta(X_t))| < M$ έχουμε και τη σχέση $|v_\beta(0)| \le M/(1-\beta)$.

Τέλος, επειδή η συνάρτηση β^t είναι φθίνουσα και κυρτή ως προς t, από την ανισότητα Jensen προκύπτει ότι

$$E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}] \ge \beta^{E_{\pi_\beta}[\mathrm{T}_0]} = \beta^{m_{\pi_\beta}(x)} > \beta^N,$$

επομένως

$$\frac{1 - E_{\pi_\beta}[\beta^{\mathrm{T}_0}]}{1-\beta} < \frac{1-\beta^N}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{N-1} \beta^t \le N.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει $|w_\beta(x)| < 2NM$ για κάθε $\beta < 1$ και $x \ge 0$.

Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.3 και δίνει μια πολύ χρήσιμη ικανή συνθήκη για την ύπαρξη βέλτιστης στάσιμης πολιτικής.

Πόρισμα 7.1 (Πεπερασμένη επαναληπτική ΜΔΑ) *Έστω ότι*

1. *Η Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων έχει πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, 1, \ldots, k\}$ και πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x), x = 0, 1, \ldots, k$.*

2. *Για κάθε στάσιμη προσδιοριστική πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$ η αντίστοιχη Μαρκοβιανή διαδικασία $X_t, t = 0, 1, \ldots$ κάτω από την π είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική.*

Τότε η $w_\beta(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς x και β και ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος 7.2.

Το πόρισμα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι σε μια αδιαχώριστη θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα οι μέσοι χρόνοι πρώτης μετάβασης από οποιαδήποτε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη είναι πεπερασμένοι. Επειδή ο χώρος καταστάσεων και τα σύνολα αποφάσεων είναι πεπερασμένα, και ο αριθμός των στάσιμων προσδιοριστικών πολιτικών είναι επίσης πεπερασμένος. Επομένως θέτοντας

$$N = \max_{\pi\in\Pi^{SD}} \max_{0\le x\le k} m_{pi}(x) < \infty,$$

ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 7.3 .

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων που ικανοποιεί τις συνθήκες του πορίσματος 7.1 αναφέρεται ως πεπερασμένη επαναληπτική ΜΔΑ.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα είναι χρήσιμο να κάνουμε κάποιες τελικές παρατηρήσεις. Πρώτον, μετά την ανάλυση των παραπάνω αποτελεσμάτων πρέπει να έχει γίνει προφανές ότι η ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης βελτιστοποίησης (7.3) είναι στενά συνδεδεμένη με τη δομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας κάτω από τις στάσιμες προσδιοριστικές πολιτικές. Για παράδειγμα, σε μια πεπερασμένη επαναληπτική ΜΔΑ, επειδή η διαδικασία των διαδοχικών καταστάσεων είναι θετικά επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα κάτω από κάθε πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$, το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης, όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 3. Επομένως είναι διαισθητικά αναμενόμενο ότι από τη λύση της (7.3) προκύπτει $J(x) = g$ για κάθε x. Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι για κάποια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική η Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει περισσότερες από μια επαναληπτικές κλάσεις (και ενδεχομένως και κάποιες παροδικές καταστάσεις). Κάτω από αυτήν την πολιτική το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος εξαρτάται από την αρχική κατάσταση και επομένως γενικά δεν περιμένουμε η (7.3) να έχει λύση. Στη βιβλιογραφία έχει μελετηθεί διεξοδικά η θεωρία για τη γενική περίπτωση μη επαναληπτικών ΜΔΑ και μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν γενικότερες εξισώσεις βελτιστοποίησης, όπως επίσης και κατάλληλες ικανές συνθήκες για την ύπαρξη βέλτιστης στάσιμης προσδιοριστικής πολιτικής.

Μια δεύτερη παρατήρηση σχετίζεται με την ανάπτυξη των αποτελεσμάτων αυτής της ενότητας θεωρώντας το πρόβλημα του μέσου κόστους ως κατάλληλα ορισμένο όριο του προβλήματος αποπληθωρισμένου κόστους για τιμές του συντελεστή αποπληθωρισμού κοντά στη μονάδα. Αυτή η προσέγγιση έχει το πλεονέκτημα ότι η συνάρτηση τιμής του αποπληθωρισμένου κόστους είναι φραγμένη. Αντίστοιχη ανάπτυξη μπορεί να γίνει παίρνοντας το όριο του προβλήματος πεπερασμένου ορίζοντα για $n \to \infty$, όμως αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει μεγαλύτερες τεχνικές δυσκολίες, επειδή εδώ η συνάρτηση κόστους δεν είναι φραγμένη.

7.4 Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων στον Χώρο των Πολιτικών

Στις προηγούμενες ενότητες αποδείξαμε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης και την ύπαρξη βέλτιστων πολιτικών για μια αρκετά μεγάλη κλάση Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων κάτω από το κριτήριο του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους. Στην ενότητα αυτή θα δούμε μια μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων βελτιστοποίησης για την περίπτωση μιας πεπερασμένης επαναληπτικής ΜΔΑ, που βασίζεται σε διαδοχικές προσεγγίσεις στον χώρο των πολιτκών, αντίστοιχη με τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής που είδαμε στην ενότητα 6.4 για την περίπτωση του αποπληθωρισμένου κόστους.

Σε όλη αυτήν την ενότητα θεωρούμε μια πεπερασμένη επαναληπτική ΜΔΑ με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0,1,\dots,k\}$ και πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x), x = 0,1,\dots,k$.

Πριν προχωρήσουμε στον αλγόριθμο, θα δούμε ένα αποτέλεσμα σχετικό με τον υπολογισμό του μέσου κόστους και της συνάρτησης μεροληψίας κάτω από μια στάσιμη πολιτική, που είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.1.

Θεώρημα 7.4 (Μέσο Κόστος Στάσιμης Προσδιοριστικής Πολιτικής) *Για κάθε στάσιμη προσδιοριστική πολιτική $\pi \in \Pi^{SD}$*

1. *Υπάρχει σταθερά g_π και φραγμένη συνάρτηση $w_\pi(x), 0 \le x \le k$, τέτοια ώστε*

$$g_\pi + w_\pi(x) = c(x, \pi(x)) + \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\pi(x)) w_\pi(y), 0 \le x \le k. \tag{7.8}$$

2. *Το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος κάτω από αυτήν την πολιτική είναι*

$$J_\pi(x) = g_\pi, 0 \le x \le k.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει άμεσα από τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, αν θεωρήσουμε μια ΜΔΑ με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, \dots, k\}$ και μονοσύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x) = \{\pi(x)\}, 0 \le x \le k$.

Το γραμμικό σύστημα (7.8) έχει k εξισώσεις και $k+1$ αγνώστους και άπειρες λύσεις. Όπως έχουμε δει, η συνάρτηση μεροληψίας $w_\pi(x)$ ορίζεται έως μία σταθερά, ενώ σε όλες τις λύσεις η τιμή του g_π είναι μοναδική. Για να λύσουμε το σύστημα θέτουμε $w_\pi(x) = 0$ για μια αυθαίρετη κατάσταση, έστω την κατάσταση 0.

Όπως και στην περίπτωση του αποπληθωρισμένου κόστους, σε κάθε επανάληψη της μεθόδου βελτίωσης πολιτικής εφαρμόζεται μια προσδιοριστική στάσιμη πολιτική, υπολογίζεται το μέσο κόστος g_π που αντιστοιχεί σε αυτήν, γίνεται έλεγχος αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις βελτιστοποίησης και αν όχι υπολογίζεται μια νέα πολιτική με μέσο κόστος μικρότερο από αυτό της προηγούμενης. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος βελτίωσης πολιτικής για το πρόβλημα του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους σε μια πεπερασμένη επαναληπτική ΜΔΑ ορίζεται ως εξής:

Βήμα 1 Έστω $\pi \in \Pi^{SD}$ μια αρχική στάσιμη προσδιοριστική πολιτική. Υπολογίζουμε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος g_π και τη συνάρτηση μεροληψίας $w_\pi(x)$ λύνοντας το σύστημα (7.8) και θέτοντας $w_\pi(0) = 0$.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε τις ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a), 0 \le x \le k, a \in \mathscr{A}(x)$ ως εξής:

$$\phi(x, a) = c(x, a) + \sum_{y \in \mathscr{X}} p_{xy}(a) w_\pi(y) - g_\pi - w_\pi(x). \tag{7.9}$$

Βήμα 3 Αν $\phi(x, a) \ge 0$ για κάθε $x, \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε η πολιτική π είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος σταματά, διαφορετικά πηγαίνουμε στο Βήμα 4.

Βήμα 4 Έστω μια κατάσταση x_0 και μια απόφαση a_0 για τις οποίες ισχύει $\phi(x_0, a_0) < 0$. Ορίζουμε μια νέα πολιτική $\tilde{\pi} \in \Pi^{SD}$ ως εξής:

$$\tilde{\pi}(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \ne x_0 \\ a_0, & x = x_0 \end{cases} \tag{7.10}$$

Θέτουμε $\pi = \tilde{\pi}$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου εξασφαλίζεται από το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.5 (Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής) *Στον αλγόριθμο βελτίωσης πολιτικής αν για μια πολιτική π ισχύει $\phi(x, a) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε η πολιτική π είναι βέλτιστη. Διαφορετικά, για τη νέα πολιτική $\tilde{\pi}$ ισχύει ότι $g_{\tilde{\pi}} < g_\pi$.*

Η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη με αυτήν του Θεωρήματος 6.5. Αν $\phi(x, a) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathscr{X}, a \in \mathscr{A}(x)$, τότε οι $g_\pi, w_\pi(x), 0 \le x \le k$ ικανοποιούν την (7.3), επομένως $g_\pi = J(x), 0 \le x \le k$ και η π είναι βέλτιστη πολιτική. Έστω τώρα ότι η $\phi(x, a) \ge 0$ παραβιάζεται για τουλάχιστον ένα ζεύγος κατάστασης-απόφασης (x_0, a_0). Από τις (7.8) –(7.10) παίρνουμε

$$\phi(x, \tilde{\pi}(x)) = \begin{cases} 0, & x \ne x_0 \\ \phi(x_0, a_0), & x = x_0 \end{cases} .$$

Επίσης, οι εξισώσεις κόστους για τη νέα πολιτική $\tilde{\pi}$ είναι

$$g_{\tilde{\pi}} + w_{\tilde{\pi}}(x) = c(x, \tilde{\pi}(x)) + \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) w_{\tilde{\pi}}(y), 0 \leq x \leq k. \tag{7.11}$$

με $w_{\tilde{\pi}}(0) = 0$.

Ορίζουμε $\delta_g = g_{\tilde{\pi}} - g_\pi$ και $\delta_w(x) = w_{\tilde{\pi}}(x) - w_\pi(x), 0 \leq x \leq k$. Για $x \neq x_0$ η (7.11) γράφεται

$$g_\pi + w_\pi(x) + \delta_g + \delta_w(x) = c(x, \tilde{\pi}(x)) + \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) w_\pi(y) + \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y).$$

Όμως, $\tilde{\pi}(x) = \pi(x)$ για $x \neq x_0$, επομένως χρησιμοποιώντας την (7.8) παίρνουμε

$$\delta_g + \delta_w(x) = \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y) \quad x \neq x_0. \tag{7.12}$$

Για $x = x_0$ η (7.11) γράφεται

$$g_\pi + w_\pi(x_0) + \delta_g + \delta_w(x_0) = c(x_0, \tilde{\pi}(x_0)) + \sum_{y=0}^{k} p_{x_0 y}(\tilde{\pi}(x_0)) w_\pi(y) + \sum_{y=0}^{k} p_{x_0 y}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y).$$

επομένως από την (7.9),

$$\delta_g + \delta_w(x_0) = \phi(x_0, a_0) + \sum_{y=0}^{k} p_{x_0 y}(a_0) \delta_w(y). \tag{7.13}$$

Από τις (7.12) και (7.13) τώρα προκύπτει ότι

$$\delta_g + \delta_w(x) = \phi(x, \tilde{\pi}(x)) + \sum_{y=0}^{k} p_{xy}(\tilde{\pi}(x)) \delta(y), 0 \leq x \leq k. \tag{7.14}$$

Επομένως οι δ_g και $\delta_w(x), 0 \leq x \leq k$ είναι το μέσο κόστος και η συνάρτηση μεροληψίας, αντίστοιχα, κάτω από την πολιτική $\tilde{\pi}$ σε μια τροποποιημένη Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων στην οποία η συνάρτηση άμεσου κόστους είναι η $\phi(x, \tilde{\pi}(x))$, δηλαδή

$$\delta_g = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} E_\pi \left[\sum_{t=0}^{N} \phi(X_t, \tilde{\pi}(X_t)) | X_0 = x_0 \right]. \tag{7.15}$$

Επειδή κάτω από την $\tilde{\pi}$ η Μαρκοβιανή αλυσίδα των καταστάσεων είναι θετικά επαναληπτική, από το Θεώρημα 3.4 προκύπτει ότι

$$\delta_g = \sum_{x=0}^{k} q_{\tilde{\pi}}(x) \phi(x, \tilde{\pi}(x)) = q_{\tilde{\pi}}(x_0) \phi(x_0, a_0),$$

όπου $(q_{\tilde{\pi}}(x), 0 \leq x \leq k)$ είναι το διάνυσμα στάσιμης κατανομής της διαδικασίας. Τέλος, από τις $q_{\tilde{\pi}}(x_0) > 0$ και $\phi(x_0, a_0) < 0$, προκύπτει $\delta_g < 0$, επομένως η νέα πολιτική $\tilde{\pi}$ αποτελεί αυστηρή βελτίωση της π.

Από το Θεώρημα 7.5 προκύπτει ότι σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου βελτίωσης πολιτικής προκύπτει μια στάσιμη προσδιοριστική πολιτική που έχει αυστηρά μικρότερο κόστος από την προηγούμενη σε τουλάχιστον μια κατάσταση. Επειδή σε μια πεπερασμένη ΜΔΑ ο αριθμός των στάσιμων προσδιοριστικών πολιτικών είναι πεπερασμένος, ο αλγόριθμος βελτίωσης πολιτικής θα ολοκληρωθεί σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, έχοντας καταλήξει σε μια βέλτιστη στάσιμη προσδιοριστική πολιτική.

Παράδειγμα 7.1 *Θεωρούμε πάλι τη Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων που ορίστηκε στο Παράδειγμα 6.1 κάτω από το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους ανά περίοδο και θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο βελτίωσης πολιτικής.*

Επειδή όλες οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $p_{xy}(a) > 0$, η ΜΔΑ είναι πεπερασμένη και επαναληπτική. Θεωρούμε την κατάσταση 1 ως κατάσταση αναφοράς και θέτοουμε $w_\pi(1) = 0$ για κάθε στάσιμη προσδιοριστική πολιτική.

Παίρνουμε ως αρχική προσέγγιση τη στάσιμη προσδιοριστική πολιτική π_1 που παίρνει την απόφαση 1 σε όλες τις καταστάσεις, δηλαδή $\pi_1(1) = 1, \pi_1(2) = 1$. Οι εξισώσεις κόστους για την πολιτική π_1 είναι:

$$\begin{aligned} g_{\pi_1} &= 10 + \frac{1}{2} w_{\pi_1}(2) \\ g_{\pi_1} + w_{\pi_1}(2) &= 18 + \frac{5}{8} w_{\pi_1}(2). \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων βρίσκουμε $g_{\pi_1} = 102/7, w_{\pi_1}(2) = 64/7$. Για την πολιτική αυτή οι ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a)$ υπολογίζονται από την (7.9):

$$\begin{aligned} \phi(1,1) &= 10 + \frac{1}{2} w_{\pi_1}(2) - g_{\pi_1} = 0 \\ \phi(1,2) &= 5 + \frac{3}{4} w_{\pi_1}(2) - g_{\pi_1} = -\frac{19}{7} \\ \phi(2,1) &= 18 + \frac{5}{8} w_{\pi_1}(2) - g_{\pi_1} - w_{\pi_1}(2) = 0 \\ \phi(2,2) &= 17 + \frac{4}{5} w_{\pi_1}(2) - g_{\pi_1} - w_{\pi_1}(2) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Επειδή για $x = 1, a = 2$ η ποσότητα ελέγχου είναι αρνητική, η πολιτική π_1 δεν είναι βέλτιστη. Ορίζουμε τη βελτιωμένη πολιτική π_2, με $\pi_2(1) = 2, \pi_2(2) = 1$. Οι εξισώσεις κόστους για την πολιτική π_2 είναι:

$$\begin{aligned} g_{\pi_2} &= 5 + \frac{3}{4} w_{\pi_2}(2) \\ g_{\pi_2} + w_{\pi_2}(2) &= 18 + \frac{5}{8} w_{\pi_1}(2). \end{aligned}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα παίρνουμε $g_{\pi_2} = 41/3, w_{\pi_2}(2) = 104/9$. Παρατηρούμε ότι η νέα πολιτική π_2 έχει $g_{\pi_2} < g_{\pi_1}$. Οι ποσότητες ελέγχου $\phi(x, a)$ υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \phi(1,1) &= 10 + \frac{1}{2} w_{\pi_2}(2) - g_{\pi_2} = \frac{19}{9} \\ \phi(1,2) &= 5 + \frac{3}{4} w_{\pi_2}(2) - g_{\pi_2} = 0 \\ \phi(2,1) &= 18 + \frac{5}{8} w_{\pi_2}(2) - g_{\pi_2} - w_{\pi_2}(2) = 0 \\ \phi(2,2) &= 17 + \frac{4}{5} w_{\pi_2}(2) - g_{\pi_2} - w_{\pi_2}(2) = \frac{46}{45}. \end{aligned}$$

Όλες οι ποσότητες ελέγχου είναι μη αρνητικές, επομένως η πολιτική π_2 είναι βέλτιστη και το ελάχιστο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με $g = 41/3 \approx 13.67$. Η συνάρτηση μεροληψίας κάτω από τη βέλτιστη πολιτική είναι $w = (0, 104/9) \approx (0, 11.56)$.

Τώρα θεωρούμε το πρόβλημα του μέσου αποπληθωρισμένου κόστους για μια πεπερασμένη ακολουθία τιμών του συντελεστή αποπληθωρισμού κοντά στη μονάδα. Για κάθε τιμή β_n υπολογίζουμε τη βέλτιστη πολιτική $\pi^*_{\beta_n}$, τη συνάρτηση κόστους $v^*_{\beta_n}$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής για το πρόβλημα αποπληθωρισμένου κόστους που είδαμε στην ενότητα 6.4. Επίσης υπολογίζουμε τις ποσότητες $g_{\beta_n} = (1-\beta_n)v^*_{\beta_0}$ και $w*_{\beta_n}(1) = v^*_{\beta_n}(1) - v^*_{\beta_n}(0)$ που ορίστηκαν στην ενότητα 7.3.

n	β_n	$\pi^*_{\beta_n}(0)$	$\pi^*_{\beta_n}(1)$	$v_{\beta_n}(0)$	$v_{\beta_n}(1)$	g_{β_n}	$w_{\beta_n}(1)$
1	0.80	2.00	1.00	60.45	72.27	12.09	11.82
2	0.85	2.00	1.00	83.28	95.03	12.49	11.75
3	0.90	2.00	1.00	128.88	140.56	12.89	11.69
4	0.95	2.00	1.00	265.59	277.21	13.28	11.62
5	0.98	2.00	1.00	675.61	687.19	13.51	11.58
6	0.99	2.00	1.00	1358.95	1370.52	13.59	11.57
7	0.999	2.00	1.00	13658.96	13670.52	13.66	11.56

Βλέπουμε ότι οι $g_{\beta_n}, w_{\beta_n}(1)$ έχουν συγκλίνει με ακρίβεια τουλάχιστον δύο δεκαδικών ψηφίων στις αντίστοιχες τιμές των $g, w(1)$.

7.5 Ασκήσεις

Άσκηση 7.1 *Να επαναλάβετε την Άσκηση 6.2 κάτω από το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους.*

Άσκηση 7.2 *Έστω μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, 1, ...\}$, πεπερασμένα σύνολα αποφάσεων $\mathscr{A}(x)$, συνάρτηση άμεσου κόστους $c(x, a)$ και πιθανότητες μετάβασης $p_{xy}(a), x, y \geq 0, a \in \mathscr{A}(x)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $\delta \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $p_{x0}(a) \geq \delta$, για κάθε x, a. Δείξτε ότι τότε ισχύει το Θεώρημα 7.1.*

Υπόδειξη : Μια προσέγγιση είναι να δείξετε ότι ισχύει η υπόθεση του Θεωρήματος 7.3, φράσσοντας κατάλληλα την πιθανότητα $\Pr[T_0 > k|X_0 = x]$. Μια δεύτερη προσέγγιση είναι να θεωρήσετε μια τροποποιημένη ΜΔΑ στην οποία οι πιθανότητες μετάβασης είναι

$$q_{xy}(a) = \begin{cases} \frac{p_{xy}(a)}{1-\delta}, & x \geq 0 \\ \\ \frac{p_{0y}(a)-\delta}{1-\delta}, & x = 0 \end{cases}$$

και να πάρετε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης του αποπληθωρισμένου κόστους για την τροποποιημένη ΜΔΑ.

Άσκηση 7.3 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.2. Δείξτε ότι αν για μια ακολουθία $\beta_n \to 1$ ισχύει ότι $\pi^*_{\beta_n} \to \pi^*$, όπου $\pi^*_{\beta_n}$ η βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα αποπληθωρισμένου κόστους με συντελεστή αποπληθωρισμού β_n, τότε η π^* είναι βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους.*

Άσκηση 7.4 *Ένα κατάστημα διατηρεί απόθεμα για ένα προϊόν, του οποίου η ζήτηση είναι τυχαία. Η αποθήκη έχει περιορισμένη χωρητικότητα M μονάδων προϊόντος. Στην αρχή κάθε περιόδου η ποσότητα του προϊόντος στην αποθήκη καταγράφεται και ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα κάνει παραγγελία στον προμηθευτή για επιπλέον μονάδες και πόσες. Αν γίνει παραγγελία, η νέα ποσότητα έρχεται αμέσως και τοποθετείται στην αποθήκη. Το κόστος αγοράς του προϊόντος είναι ίσο με c ανά μονάδα. Επιπλέον, σε κάθε παραγγελία υπάρχει ένα σταθερό κόστος K ανεξάρτητα από την ποσότητα που παραγγέλλεται.*

Σε κάθε περίοδο η ζήτηση του προϊόντος είναι τυχαία μεταβλητή D που ακολουθεί διακριτή κατανομή στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, M\}$, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q_k = \Pr[D = k] > 0, k = 0, 1, \ldots, M$. Οι ποσότητες ζήτησης *σε κάθε περίοδο είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η ζήτηση σε κάθε περίοδο ικανοποιείται από την ποσότητα που υπάρχει στο απόθεμα. Το έσοδο από την πώληση του προϊόντος είναι ίσο με r ανά μονάδα. Αν η ζήτηση σε μια περίοδο υπερβεί την ποσότητα που είναι διαθέσιμη στην αρχή της περιόδου, η επιπλέον ζήτηση που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί χάνεται.*

Στο τέλος κάθε περιόδου υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης h ανά μονάδα προϊόντος που έχει μείνει στο απόθεμα. Οι ποσότητες που μένουν απώλητες στο τέλος μιας περιόδου μεταφέρονται ως αρχικό απόθεμα στην αρχή της επόμενης περιόδου.

(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα.

(β) Να δείξετε ότι για το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους ανά περίοδο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1 και να καταστρώσετε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης.

Άσκηση 7.5 *Ένα σύστημα εξυπηρέτησης αποτελείται από K σταθμούς εξυπηρέτησης χωρίς χώρο αναμονής. Στην αρχή κάθε περιόδου με πιθανότητα p έρχεται ένας πελάτης που χρειάζεται εξυπηρέτηση και με πιθανότητα $1-p$ δεν έρχεται κανένας. Αν έρθει πελάτης και υπάρχει τουλάχιστον ένας ελεύθερος σταθμός, τότε ο πελάτης καταλαμβάνει έναν από τους ελεύθερους σταθμούς και αρχίζει να εξυπηρετείται, διαφορετικά φεύγει από το σύστημα χωρίς να εξυπηρετηθεί.*

Στην αρχή κάθε περιόδου (μετά την τυχόν άφιξη πελάτη) ο διαχειριστής του συστήματος παρατηρεί τον αριθμό των σταθμών που είναι κατειλημμένοι και αποφασίζει την ένταση με την οποία θα λειτουργήσουν οι κατειλημμένοι σταθμοί στη διάρκεια της περιόδου. Υπάρχουν $M+1$ δυνατά επίπεδα έντασης. Στο επίπεδο $j, 0 \leq j \leq M$, η πιθανότητα οποιοσδήποτε κατειλημμένος σταθμός να τελειώσει την εξυπηρέτηση του πελάτη κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι ίση με r_j, όπου $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_M$. Οι σταθμοί λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Το επίπεδο 0 σημαίνει ότι όλοι οι σταθμοί παραμένουν ανενεργοί στη διάρκεια της περιόδου (ανεξάρτητα αν έχουν πελάτες ή όχι). Αν όλοι οι σταθμοί είναι κατειλημμένοι στην αρχή της περιόδου, ο διαχειριστής δεν μπορεί να επιλέξει το επίπεδο 0 για αυτήν την περίοδο, διαφορετικά μπορεί. Στην αρχή της επόμενης περιόδου η διαδικασία επαναλαμβάνεται και ο διαχειριστής μπορεί να παραμείνει στο ίδιο επίπεδο έντασης ή να επιλέξει κάποιο άλλο.

Αν στην αρχή μιας περιόδου υπάρχουν x πελάτες στο σύστημα, επιφέρεται κόστος $h(x)$ για αυτήν την περίοδο. Επίσης, αν επιλεγεί επίπεδο έντασης εξυπηρέτησης j, τότε υπάρχει κόστος εξυπηρέτησης ίσο με $C(j)$ κατά τη διάρκεια της περιόδου. Υποθέτουμε ότι οι C και h είναι αύξουσες συναρτήσεις με $C(0) = h(0) = 0$.

(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα.

(β) Να δείξετε ότι για το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους ανά περίοδο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1 και να καταστρώσετε τις εξισώσεις βελτιστοποίησης.

7.6 Σχόλια

Το κριτήριο ελαχιστοποίησης του μακροπρόθεσμου μέσου κόστους παρουσιάζεται σε όλα τα συγγράμματα Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού και Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων σε διάφορα επίπεδα γενικότητας και μαθηματικής πολυπλοκότητας. Η ανάλυση αυτού του κεφαλαίου βασίζεται στα συγγράμματα Ross 1970 και Ross 1983 που αναφέρονται κυρίως στην περίπτωση ΜΔΑ με μοναδική κλάση επικοινωνίας κάτω από κάθε στάσιμη πολιτική. Για τη γενική περίπτωση ΜΔΑ με πολλές κλάσεις επικοινωνίας ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα Puterman 1994 και Sennott 1998, όπως επίσης και στο Hernandez-Lerma και Lasserre 1996 για μοντέλα με γενικούς χώρους καταστάσεων και αποφάσεων.

Βιβλιογραφία

[1] S. Ross. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. New York, NY: Academic Press, 1983.

[2] M. Puterman. *Markov Decision Processes*. New York, NY: Wiley, 1994.

[3] S. Ross. *Applied probability models with optimization appplications*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1970.

[4] L.I. Sennott. *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*. Wiley-Interscience, 1998. ISBN: 978-0471161202.

[5] O. Hernandez-Lerma και J.-B. Lasserre. *Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria*. New York, NY: Springer, 1996.

Μέρος III

ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τα βασικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν ένα σύστημα εξυπηρέτησης και παρουσιάζουμε τη σχετική ονοματολογία - ταξινόμηση του Kendall. Αναφέρουμε, επίσης, τα σημαντικότερα μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται στη μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης. Τέλος, διατυπώνουμε τέσσερα βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα συστήματα εξυπηρέτησης, τα οποία ισχύουν κάτω από πολύ γενικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, χαρακτηρίζουμε την ευστάθεια ενός συστήματος μέσω του ρυθμού συνωστισμού του και διατυπώνουμε την ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων (αφίξεων - αναχωρήσεων), την ιδιότητα PASTA (Poisson-Arrivals-See-Time-Averages) και τον νόμο του Little. Τα αποτελέσματα αυτά επιτρέπουν κάποιους πρώτους υπολογισμούς μέτρων απόδοσης που ολοκληρώνουν το κεφάλαιο.

Προαπαιτούμενη γνώση

Το κεφάλαιο αυτό προϋποθέτει τη γνώση της βασικής θεωρίας των ανανεωτικών διαδικασιών με κόστη, όπως αυτή περιγράφεται στο κεφάλαιο 1.

8.1 Βασική περιγραφή και ονοματολογία του Kendall

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης ή ουρά αναμονής είναι στην ουσία ένα σύστημα εισόδου - εξόδου διακριτών οντοτήτων (μονάδων, πελατών), στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ γενικός και περιλαμβάνει πολλές πραγματικές καταστάσεις που παρατηρούνται στην καθημερινή ζωή, καθώς και σε περίπλοκα τεχνολογικά συστήματα. Ιστορικά, η συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή άρχισε να αναπτύσσεται στις αρχές του 20ού αιώνα, όταν ο A.K. Erlang δημοσίευσε κάποιες εργασίες του για τη μαθηματική μοντελοποίηση του συνωστισμού σε τηλεφωνικά δίκτυα. Η μεγάλη επιτυχία αυτών των μεθόδων στη μελέτη πραγματικών συστημάτων έδωσε τεράστια ώθηση στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας των ουρών αναμονής

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

καθώς και των εφαρμογών της και σε άλλα πεδία.

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι:

- η διαδικασία αφίξεων (arrival process),
- οι χρόνοι εξυπηρέτησης (service times),
- ο αριθμός των (παράλληλων) παρόχων εξυπηρέτησης - υπηρετών (number of servers),
- η χωρητικότητα του συστήματος (system capacity) και
- η πειθαρχία ουράς (queue discipline).

Για τον λόγο αυτό ο D.G. Kendall εισήγαγε στην εργασία του Kendall 1953 ένα σύστημα ονοματολογίας για τις πιο απλές ουρές που περιγράφει συνοπτικά αυτά τα χαρακτηριστικά. Η ονοματολογία του Kendall έχει τη μορφή A/B/c/k( ), όπου τα A, B είναι γράμματα, τα c, k αριθμοί και μέσα στην παρένθεση γράφεται μια ακροστοιχίδα γραμμάτων. Καθεμία από τις 5 παραμέτρους της ονοματολογίας του Kendall αναφέρεται στα 5 χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω.

Η διαδικασία αφίξεων περιγράφει το πώς έρχονται οι πελάτες στο σύστημα. Οι αφίξεις είναι διαδοχικά γεγονότα που συμβαίνουν στον χρόνο και επομένως μπορούν να περιγραφούν από σημειακές διαδικασίες και τις αντίστοιχες απαριθμήτριές τους που είναι τα γενικά πρότυπα για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν με κάποιον βαθμό τυχαιότητας. Το πιο απλό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο, με τυχαίο τρόπο και κάποια μορφή πιθανοθεωρητικής περιοδικότητας, είναι μια ανανεωτική διαδικασία και γι' αυτό η διαδικασία αφίξεων σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι συνήθως μια ανανεωτική διαδικασία.

Η διαδικασία αφίξεων αντιστοιχεί στο γράμμα A της ονοματολογίας Kendall. Οι πιο συχνές τιμές που παίρνει στη βιβλιογραφία είναι GI (General independent) (ή G (General)), M (Memoryless, Markovian), D (Deterministic) και E_r (Erlang-r) για τις περιπτώσεις που οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι γενικοί, εκθετικοί, σταθεροί και Erlang-r αντίστοιχα. Υπάρχουν βέβαια και άλλες τιμές για το γράμμα A που αντιστοιχούν σε κατανομές που εμφανίζονται σπανιότερα στη βιβλιογραφία.

Οι χρόνοι εξυπηρέτησης θεωρούνται στα κλασικά μοντέλα επίσης ανεξάρτητοι και ισόνομοι και αντιστοιχούν στο γράμμα B της ονοματολογίας Kendall, που παίρνει τις ίδιες τιμές με το γράμμα A. Οι τιμές GI και G για το A και το B σηματοδοτούν σε κάποια βιβλία ακριβώς το ίδιο, δηλαδή ανεξάρτητους ισόνομους χρόνους με γενική κατανομή. Σε κάποια, όμως, βιβλία, μόνο το GI σηματοδοτεί ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους, ενώ το G αναφέρεται σε γενικούς χρόνους που μπορεί να είναι και εξαρτημένοι. Στα παλαιά κλασικά συγγράμματα, που αναφέρονται σε συστήματα εξυπηρέτησης με ανεξάρτητους ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων και χρόνους εξυπηρετήσεων, συνηθίζεται η τιμή GI για το A και η τιμή G για το B. Στο παρόν βιβλίο, θα χρησιμοποιούμε την τιμή G τόσο για το A, όσο και για το B, εφόσον αναφερόμαστε σε ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους.

Ο αριθμός των υπηρετών αναφέρεται στο πόσοι είναι οι παράλληλοι υπηρέτες που εξυπηρετούν τη ροή των πελατών που εισέρχεται στο σύστημα. Με την έννοια «παράλληλοι» υπηρέτες εννοούμε ότι υπάρχει μια κοινή ουρά για όλους και οι πελάτες πηγαίνουν στον πρώτο υπηρέτη που θα αδειάσει, αν όλοι οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι ή επιλέγουν στην τύχη κάποιον από τους άδειους υπηρέτες, αν υπάρχουν ελεύθεροι υπηρέτες. Ο αριθμός των υπηρετών αντιστοιχεί στον αριθμό c της ονοματολογίας Kendall.

Η χωρητικότητα του συστήματος εκφράζει το μέγιστο πλήθος πελατών που μπορεί να χωρέσει το σύστημα, συμπεριλαμβανομένων τόσο αυτών που περιμένουν να εξυπηρετηθούν όσο και αυτών που βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης. Αν ένα σύστημα έχει φτάσει στο μέγιστο της χωρητικότητάς του και αφιχθεί ένας πελάτης, τότε στα κλασικά μοντέλα ουρών αναμονής ο πελάτης απορρίπτεται και θεωρείται χαμένος για πάντα. Φυσικά υπάρχουν και μοντέλα στα οποία οι πελάτες που αποχωρούν λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας επανέρχονται αργότερα με την ελπίδα να υπάρχει διαθέσιμη θέση στο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για μοντέλα με επαναπροσπάθειες ή επαναδοκιμές (retrials). Σε τέτοια μοντέλα είναι απαραίτητο να αποσαφηνισθεί η διαδικασία με την οποία οι πελάτες επανέρχονται στο σύστημα και έτσι τα μοντέλα αυτά δεν περιγράφονται στο πλαίσιο της ονοματολογίας Kendall. Προς το παρόν, επομένως, μένουμε στο πλαίσιο των μοντέλων χωρίς επαναπροσπάθειες, όπου η χωρητικότητα του συστήματος αντιστοιχεί στον αριθμό k της ονοματολογίας του Kendall.

Η πειθαρχία ουράς είναι ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα διαλέγει ποιον πελάτη θα εξυπηρετήσει, μόλις βρεθεί κάποιος διαθέσιμος υπηρέτης. Η πιο συνηθισμένη πειθαρχία ουράς είναι η FCFS (First-Come-First-Served) ή FIFO (First-In-First-Out), κατά την οποία οι πελάτες επιλέγονται να εξυπηρετηθούν σύμφωνα με τη σειρά της άφιξής τους. Έτσι, μόλις αδειάσει ένας υπηρέτης, επιλέγεται για εξυπηρέτηση ο πελάτης που έχει αφιχθεί πρώτος από όλους που περιμένουν. Η πειθαρχία αυτή μοιάζει η πιο δίκαιη με πρώτη ματιά και χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη στην περίπτωση που οι πελάτες είναι άνθρωποι και μάλιστα έχουν οπτική επαφή με το τι συμβαίνει στο σύστημα (και επομένως μπορούν και βλέπουν πότε φθάνουν οι άλλοι πελάτες). Σε διάφορες εφαρμογές, πάντως, χρησιμοποιούνται και άλλες πειθαρχίες ουράς, όπως η LCFS (Last-Come-First-Served) κατά την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα από τη σειρά άφιξής τους, η SIRO (Service-In-Random-Order) όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται τυχαία, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η σειρά άφιξής τους, η SSTF (Shortest-Service-Time-First) όπου επιλέγεται προς εξυπηρέτηση ο πελάτης που έχει τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης κ.ά. Υπάρχουν επίσης πειθαρχίες ουράς για την περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός είδη πελατών και το σύστημα τους αντιμετωπίζει διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή, είναι δυνατόν κάποια είδη πελατών να έχουν προτεραιότητα έναντι κάποιων άλλων, οπότε μιλάμε για πειθαρχίες ουράς με προτεραιότητες. Γενικά, αν σκεφθούμε πρακτικές εφαρμογές των ουρών αναμονής θα συνειδητοποιήσουμε ότι υπάρχει μεγάλη ποικιλία στις πειθαρχίες ουράς που χρησιμοποιούνται (π.χ. σκεφτείτε τα ταμεία για πελάτες με λίγα προϊόντα στα supermarkets, τα ταμεία για επιχειρηματικές συναλλαγές στις τράπεζες, τις κρατήσεις θέσεων σε εστιατόρια, τα τηλεφωνικά κέντρα που εξυπηρετούν πελάτες σε περισσότερες από μία γλώσσες κλπ.).

Η χωρητικότητα του συστήματος k και/ή η πειθαρχία ουράς μπορεί να παραλείπονται στην ονοματολογία Kendall. Η χωρητικότητα παραλείπεται όταν είναι απεριόριστη ($k = \infty$), ενώ η πειθαρχία όταν είναι η FCFS.

Με βάση τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι η ονοματολογία του Kendall προσφέρει έναν πολύ συνοπτικό τρόπο για να περιγραφεί το είδος ενός συστήματος εξυπηρέτησης. Π.χ., η M/M/1 ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με Poisson διαδικασία αφίξεων (ανεξάρτητους εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων), εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και 1 υπηρέτη που έχει άπειρη χωρητικότητα και λειτουργεί υπό την πειθαρχία ουράς FCFS. Ομοίως, η $G/E_2/1/5(SIRO)$ ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με ανανεωτική διαδικασία αφίξεων (ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων), Erlang-2 χρόνους εξυπηρέτησης και 1 υπηρέτη που έχει χωρητικότητα για 5 πελάτες και λειτουργεί υπό την πειθαρχία ουράς SIRO.

Πολλές φορές η διαδικασία αφίξεων και/ή κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης δεν είναι ακριβώς γνωστή. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δίνεται κάποια αδρή πληροφορία για το πώς έρχονται και πώς εξυπηρετούνται οι πελάτες. Π.χ., μπορεί να δίνεται ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος a μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b. Ισοδύναμα, μπορεί να δίνεται ο ρυθμός αφίξεων $\lambda = 1/a$ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu = 1/b$. Τα a και b έχουν τη φυσική έννοια της (μέσης) περιόδου των διαδικασιών των αφίξεων και των εξυπηρετήσεων αντίστοιχα, ενώ τα λ και μ αντιστοιχούν στη φυσική έννοια της συχνότητας (ρυθμού) των αφίξεων και των εξυπηρετήσεων. Με τόσο ελλιπή πληροφορία, βεβαίως, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τη μαθηματική ανάλυση μπορεί να είναι πολύ αδύναμα. Για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων χρειάζεται να είναι γνωστή η κατανομή των αντίστοιχων χρόνων ή τουλάχιστον κάποιες ροπές ανώτερης τάξης. Μετά τη μέση τιμή, η διασπορά των χρόνων μεταξύ των αφίξεων και/ή των χρόνων εξυπηρέτησης επηρεάζει σημαντικά την απόδοση ενός συστήματος.

8.2 Μέτρα απόδοσης συστήματος

Αφού περιγραφεί ένα σύστημα, το πρόβλημα που τίθεται είναι να προβλέψουμε πώς θα συμπεριφέρεται. Στη Θεωρία Ουρών Αναμονής εστιάζουμε κυρίως σε συστήματα που εμφανίζουν μια πιθανοθεωρητική περιοδικότητα, δηλαδή ο τρόπος λειτουργίας τους παραμένει ομοιόμορφος στον χρόνο και ξαναρχίζει από την αρχή κάθε φορά που ολοκληρώνεται ένας κύκλος λειτουργίας. Για τον λόγο αυτό τα περισσότερα μοντέλα παριστάνονται με αναγεννητικές διαδικασίες και η μελέτη τους γίνεται χρησιμοποιώντας τη σχετική θεωρία που έχουμε παρουσιάσει.

Στο πλαίσιο της Θεωρίας Ουρών Αναμονής, οι στιγμές που αναγεννάται ένα σύστημα εξυπηρέτησης είναι συνήθως οι στιγμές που φθάνει ένας πελάτης που βρίσκει κενό το σύστημα. Στις στιγμές αυτές αρχίζει ταυτόχρονα να «τρέχει» ένας νέος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων και ένας χρόνος εξυπηρέτησης και όλα αρχίζουν από την αρχή. Οπότε η λειτουργία ενός συστήματος χωρίζεται σε κύκλους λειτουργίας (busy cycles) και ένας τυπικός κύκλος αντιστοιχεί στο διάστημα από τη στιγμή που ένας πελάτης φθάνει σε κενό σύστημα μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό. Στο πλαίσιο του παρόντος συγγράμματος θα δούμε ότι όλα τα συστήματα που θα μελετήσουμε είναι αναγεννητικά και οι στιγμές της αναγέννησής τους είναι ακριβώς οι διαδοχικές στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν κενό σύστημα.

Ορισμένα τυπικά ερωτήματα που απασχολούν τη Θεωρία Ουρών Αναμονής είναι τα ακόλουθα:

1. Πόσοι πελάτες θα βρίσκονται στο σύστημα κατά μέσο όρο μια τυχούσα χρονική στιγμή;
2. Πόσο χρόνο θα περάσει στο σύστημα κατά μέσο όρο ένας πελάτης;
3. Ποιο ποσοστό του χρόνου του θα βρίσκεται απασχολημένος ένας υπηρέτης που δουλεύει σε ένα συγκεκριμένο σύστημα;

Όπως βλέπουμε, υπάρχουν ερωτήματα που απασχολούν τον διαχειριστή του συστήματος, που βλέπει το σύστημα συνολικά ως εξωτερικός παρατηρητής (ερώτημα 1), ερωτήματα που απασχολούν τους πελάτες, που επιδρούν στο σύστημα μόνο παροδικά και κατόπιν φεύγουν (ερώτημα 2) και ερωτήματα που απασχολούν τους υπηρέτες, που απασχολούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα στο σύστημα (ερώτημα 3). Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι αυτοί οι παράγοντες του συστήματος (διαχειριστής, πελάτες και υπηρέτες) έχουν διαφορετικές οπτικές και για τον λόγο αυτό υπάρχουν μέτρα απόδοσης του συστήματος που σχετίζονται με την οπτική του καθενός.

Για τον διαχειριστή του συστήματος η πιο σημαντική πληροφορία είναι ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα μια τυχαία χρονική στιγμή. Έτσι ορίζουμε

- $Q(t)$, τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t,
- $Q_q(t)$, τον αριθμό των πελατών στον χώρο αναμονής τη στιγμή t (ο δείκτης q μπαίνει για να θυμίζει ότι αναφερόμαστε στο πλήθος των πελατών στην ουρά ($q \to$ queue),
- $Q_s(t)$, τον αριθμό των πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης τη στιγμή t (ο δείκτης s μπαίνει για να θυμίζει ότι αναφερόμαστε στο πλήθος των πελατών υπό εξυπηρέτηση ($s \to$ service).

Φυσικά, ισχύει ότι
$$Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t).$$

Όπως αναφέραμε, ένα σύστημα εξυπηρέτησης συνήθως αναγεννάται στοχαστικά στις στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν το σύστημα κενό, οπότε η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών, $\{Q(t)\}$, είναι αναγεννητική, αφού κάθε φορά που ένας πελάτης φθάνει σε κενό σύστημα όλα ξαναρχίζουν από την αρχή. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα των αναγεννητικών διαδικασιών, Θεώρημα 1.12 που δίνει εναλλακτικούς τρόπους για τη μελέτη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς μιας αναγεννητικής διαδικασίας.

Για να καταλάβουμε τη σημασία του εργοδικού θεωρήματος αναγεννητικών διαδικασιών για τη μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης, ας θεωρήσουμε την αναγεννητική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών και ας δούμε πώς ερμηνεύονται οι ποσότητες που εμφανίζονται στο θεώρημα. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της $\{Q(t)\}$, οπότε επικεντρωνόμαστε στην εύρεση του μακροπρόθεσμου ποσοστού του χρόνου που βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα, για τις διάφορες τιμές του j. Το ποσοστό αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως

$$p_j = \lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du}{t}, \tag{8.1}$$

όπου $1_{\{Q(u)=j\}}$ είναι η δείκτρια τυχαία μεταβλητή του ενδεχομένου $\{Q(u) = j\}$ που παίρνει την τιμή 1 όταν $Q(u) = j$ και την τιμή 0 διαφορετικά. Παρατηρήστε ότι ο αριθμητής του κλάσματος εκφράζει τον συνολικό χρόνο που στο σύστημα βρίσκονται j πελάτες στο χρονικό διάστημα $(0, t]$, ενώ ο παρονομαστής είναι το μήκος του αντίστοιχου διαστήματος, οπότε πράγματι το κλάσμα εκφράζει το ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται j πελάτες στο διάστημα $(0, t]$. Θέτοντας $t \to \infty$, αναπαριστούμε μαθηματικά την έννοια «μακροπρόθεσμο». Το εργοδικό θεώρημα εκμεταλλεύεται την αναγεννητικότητα της διαδικασίας $\{Q(t)\}$ και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστό αυτό περιοριζόμενοι σε έναν κύκλο λειτουργίας του συστήματος. Έχουμε, δηλαδή, ότι

$$p_j = \frac{E[\int_0^Z 1_{\{Q(u)=j\}} du]}{E[Z]}, \tag{8.2}$$

όπου Z είναι η διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος. Η έκφραση αυτή δίνει το p_j ως τον μέσο χρόνο που η $\{Q(t)\}$ μένει στην κατάσταση j σε έναν κύκλο λειτουργίας προς τη μέση διάρκεια του κύκλου, αντιστοιχώντας και πάλι σε ένα είδος ποσοστού χρόνου.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να σκεφτόμαστε την πιθανότητα ο αριθμός των πελατών να είναι j σε μια τυχούσα χρονική στιγμή είναι ο εξής: Επιλέγουμε τυχαία μια στιγμή στο $(0, t]$, σύμφωνα με μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή U_t, για μεγάλο t, και κατόπιν παρατηρούμε την $\{Q(t)\}$ την επιλεχθείσα χρονική στιγμή και μας ενδιαφέρει η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση j. Το εργοδικό θεώρημα βεβαιώνει ότι η πιθανότητα αυτή ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα. Έχουμε, δηλαδή, ότι

$$p_j = \lim_{t \to \infty} \Pr[Q(U_t) = j] = \lim_{t \to \infty} \int_0^t \Pr[Q(u) = j] \frac{1}{t} du, \ j \geq 0, \tag{8.3}$$

αφού μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U_t είναι ίση με $\frac{1}{t}$ στο $(0, t]$ και 0 οπουδήποτε αλλού.

Ένας ακόμη τρόπος να σκεφτόμαστε την πιθανότητα ο αριθμός των πελατών ενός συστήματος να είναι j μια τυχούσα χρονική στιγμή είναι ως την οριακή πιθανότητα να υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα, καθώς ο χρόνος μεγαλώνει, δηλαδή ως την $\lim_{t \to \infty} \Pr[Q(t) = j]$. Το εργοδικό θεώρημα διαβεβαιώνει ότι η οριακή πιθανότητα της κατάστασης j (εφόσον υπάρχει, πράγμα που εξασφαλίζεται όταν ο κύκλος λειτουργίας του συστήματος έχει απεριοδική κατανομή) ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η $\{Q(t)\}$ περνάει στην j, δηλαδή ότι

$$p_j = \lim_{t \to \infty} \Pr[Q(t) = j], \ j \geq 0. \tag{8.4}$$

Επομένως, το εργοδικό θεώρημα εφαρμοζόμενο στην αναγεννητική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών ενός συστήματος δίνει τέσσερις διαφορετικές ερμηνείες και τρόπους υπολογισμού για την ποσότητα p_j που διαισθητικά αντιστοιχεί στην πιθανότητα να υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα:

1. Η p_j είναι ο λόγος του μέσου χρόνου που υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα σε έναν κύκλο λειτουργίας προς τη μέση διάρκεια του κύκλου λειτουργίας.

2. Η p_j είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα, για σχεδόν όλες τις πραγματοποιήσεις της $\{Q(t)\}$. Το ενδεχόμενο να μην ισχύει αυτό για κάποια πραγματοποίηση έχει πιθανότητα 0.

3. Η p_j είναι η πιθανότητα να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα, αν το κοιτάξουμε σε μια τυχαία, ομοιόμορφα επιλεγμένη χρονική στιγμή σε ένα διάστημα μεγάλου μήκους.

4. Η p_j είναι η πιθανότητα να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα, αν το κοιτάξουμε μια χρονική στιγμή μετά την παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος (εφόσον ο κύκλος λειτουργίας του συστήματος έχει απεριοδική κατανομή).

Θα αναφέρουμε την $(p_j : j \geq 0)$ ως κατανομή ισορροπίας, οριακή κατανομή ή στάσιμη κατανομή της $\{Q(t)\}$ και θα γράφουμε εκφράσεις του τύπου $\Pr[Q = j] = p_j$, εννοώντας ότι η Q είναι μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας. Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί δεν επικεντρωνόμαστε στη μελέτη της $Q(t)$ για κάθε συγκεκριμένο χρόνο t που έχει περάσει από την έναρξη της λειτουργίας του συστήματος, δηλαδή στην εύρεση της λεγόμενης μεταβατικής κατανομής της $\{Q(t)\}$ τη στιγμή t, $\mathbf{p}(t) = (p_j(t) : j \geq 0)$ με $p_j(t) = \Pr[Q(t) = j]$. Καταρχήν, ο υπολογισμός αυτός είναι ένα μαθηματικά απαιτητικό πρόβλημα, που ακόμη και για πολύ απλά συστήματα δεν επιδέχεται λύση σε αναλυτική μορφή. Αλλά το σημαντικότερο είναι ότι μετά την παρέλευση μικρού σχετικά χρόνου η επίδραση της αρχικής κατάστασης του συστήματος (π.χ. αρχικά κενό σύστημα) χάνεται και η κατανομή της $\{Q(t)\}$ συγκλίνει στην κατανομή ισορροπίας.

Για μια εκτενέστερη συζήτηση πάνω στο θέμα των αναγεννητικών διαδικασιών, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία Wolff 1989, Φακίνος 2003, Tijms 2008 και Kulkarni 2010. Σχεδόν όλα τα συστήματα που θα μελετήσουμε είναι αναγεννητικά και επιπλέον ο κύκλος λειτουργίας του συστήματος έχει απεριοδική κατανομή. Πράγματι, η απεριοδικότητα του κύκλου λειτουργίας εξασφαλίζεται όταν η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων ή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι συνεχής. Κατά συνέπεια, οι οριακές πιθανότητες που αφορούν τον αριθμό των πελατών στο σύστημα ισούνται με τα αντίστοιχα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου που το σύστημα έχει συγκεκριμένο αριθμό πελατών, όπως είδαμε παραπάνω. Για τον λόγο αυτό, σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα κάποια από τις ισοδύναμες εκφράσεις, χωρίς περαιτέρω μνεία. Αυτό θα συμβαίνει και για άλλα μεγέθη που αφορούν άλλες τυχαίες μεταβλητές που έχουν ενδιαφέρον για τη μελέτη των συστημάτων. Π.χ., συμβολίζοντας με Q την τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή ισορροπίας $(p_j : j \geq 0)$ της $\{Q(t)\}$ και θεωρώντας μια συνάρτηση κόστους $c(u)$, θα γράφουμε

$$E[c(Q)] = \lim_{t\to\infty} E[c(Q(t))] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t c(Q(u))du, \tag{8.5}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.13. Αν έχουμε προσδιορίσει την $(p_j : j \geq 0)$ (πράγμα που δεν είναι πάντα εύκολο), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την $E[c(Q)]$ από τη σχέση $E[c(Q)] = \sum_{j=0}^{\infty} c(j)p_j$. Ειδικότερα, για $c(u) = u$, έχουμε $E[Q] = \sum_{j=0}^{\infty} jp_j$. Σε κάποιες περιπτώσεις η $E[Q]$ μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας με πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας κάποια βασικά αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω. Ομοίως με την $E[Q]$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις $E[Q_q]$ και $E[Q_s]$, δεδομένου ότι οι αντίστοιχες διαδικασίες $\{Q_q(t)\}$ και $\{Q_q(t)\}$ είναι επίσης αναγεννητικές.

Για τους πελάτες το πιο σημαντικό μέτρο απόδοσης είναι ο χρόνος που παραμένουν στο σύστημα. Έτσι ορίζουμε

- S_n τον χρόνο παραμονής στο σύστημα του n-οστού πελάτη,
- W_n τον χρόνο αναμονής στην ουρά (μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτηση) του n-οστού πελάτη,
- B_n τον χρόνο εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη.

Προφανώς έχουμε

$$S_n = W_n + B_n.$$

Ενδιαφερόμαστε και πάλι για το τι συμβαίνει σε κατάσταση ισορροπίας και για αυτό ενδιαφερόμαστε για την κατανομή ισορροπίας του χρόνου παραμονής. Και πάλι υπάρχουν πολλές ερμηνείες για την κατανομή αυτή που συμπίπτουν όταν το σύστημα έχει αναγεννητικό χαρακτήρα και ισχύει η υπόθεση της απεριοδικότητας των αναγεννητικών κύκλων. Έτσι για την κατανομή ισορροπίας $F_S(x)$ του χρόνου παραμονής πελάτη έχουμε

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \frac{1}{E[A(Z)]}E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1_{\{S_k \le x\}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k \le x\}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Pr[S_k \le x] \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr[S_n \le x], \quad x \ge 0, \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

όπου Z ο πρώτος κύκλος λειτουργίας και $A(Z)$ το πλήθος των αφίξεων σε αυτόν. Εδώ, η $1_{\{S_k \le x\}}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου $\{S_k \le x\}$ (ο k-οστός πελάτης να παραμείνει στο σύστημα το πολύ για χρόνο x) που παίρνει την τιμή 1 όταν $S_k \le x$ και την τιμή 0 διαφορετικά. Οπότε έχουμε ότι το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που παραμένουν στο σύστημα για χρόνο το πολύ x ισούται με την οριακή πιθανότητα ο n-οστός πελάτης να μείνει στο σύστημα για χρόνο το πολύ x, για $n \to \infty$. Η ισότητα που αφορά το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που παραμένουν στο σύστημα για χρόνο το πολύ x πρέπει να ερμηνευθεί ότι ισχύει με πιθανότητα 1, καθώς το ποσοστό είναι τυχαία μεταβλητή.

Συμβολίζοντας με S την τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή ισορροπίας $(F_S(x) : x \ge 0)$ για τον οριακό μέσο χρόνο παραμονής έχουμε αντίστοιχα ότι

$$
E[S] = \frac{1}{E[A(Z)]}E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[S_k] = \lim_{n\to\infty} E[S_n], \qquad (8.7)
$$

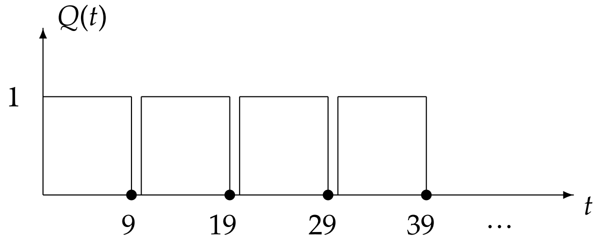
όπου και πάλι η ισότητα ισχύει με πιθανότητα 1 για τον μακροπρόθεσμο μέσο

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k,
$$

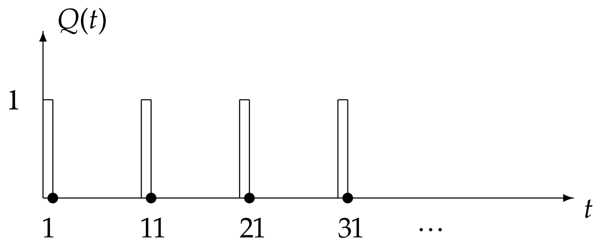
που είναι τυχαία μεταβλητή.

Ο υπολογισμός του $E[S]$ είναι εύκολος αν έχουμε υπολογίσει την κατανομή $(F_S(x) : x \ge 0)$ ή την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(f_S(x) : x \ge 0)$. Πράγματι αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)dx = \int_0^\infty (1 - F_S(x))dx$ και επομένως πρόκειται για έναν υπολογισμό ρουτίνας (ο οποίος μπορεί πάντως να έχει αρκετές πράξεις). Σε κάποιες περιπτώσεις, όμως, ο $E[S]$ μπορεί να υπολογιστεί και απευθείας, ταυτόχρονα με την $E[Q]$, με πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα.

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος που αξίζει μελέτης είναι ο κύκλος απασχόλησης ή λειτουργίας (busy cycle) του συστήματος που ορίζεται ως το διάστημα από την άφιξη ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό, μέχρι την επόμενη άφιξη πελάτη που θα βρει το σύστημα κενό. Κάθε τέτοιος κύκλος αρχίζει με ένα χρονικό διάστημα που το σύστημα είναι συνεχώς απασχολημένο. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως μια περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος (busy period). Κατόπιν το σύστημα παραμένει κενό μέχρι να εμφανιστεί ο επόμενος πελάτης. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως μια περίοδος αργίας (idle period) του συστήματος. Οι διάρκειες των περιόδων συνεχούς λειτουργίας Y_n, αργίας I_n, και των κύκλων απασχόλησης $Z_n = Y_n + I_n$ ενδιαφέρουν κυρίως από την οπτική σκοπιά των υπηρετών και του διαχειριστή του συστήματος, αφού οι ποσότητες αυτές είναι σημαντικές για να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με τη συντήρηση του συστήματος ή με διακοπές-διαλείμματα των υπηρετών. Για τον λόγο αυτό ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη των οριακών κατανομών $F_Z(x)$, $F_Y(x)$ και $F_I(x)$ ή τουλάχιστον των αντίστοιχων μέσων τιμών τους $E[Z]$, $E[Y]$ και $E[I]$.



Σχήμα 8.1: Εξέλιξη του πλήθους πελατών σε σύστημα D/D/1 με ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων $a = 10$ και χρόνους εξυπηρέτησης $b = 9$.



Σχήμα 8.2: Εξέλιξη του πλήθους πελατών σε σύστημα D/D/1 με ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων $a = 10$ και χρόνους εξυπηρέτησης $b = 1$.

8.3 Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

Όπως είπαμε παραπάνω, ο διαχειριστής ενός συστήματος, που μπορεί να θεωρηθεί ως ένας εξωτερικός παρατηρητής του συστήματος, έχει μια διαφορετική αντίληψη από τους πελάτες του συστήματος όσον αφορά τον συνωστισμό. Για τον λόγο αυτό ορίσαμε και διαφορετικά μέτρα απόδοσης που αντιστοιχούν στις διαφορετικές οπτικές. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαφορά των δυο οπτικών, διαχειριστή-εξωτερικού παρατηρητή και πελατών ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συστήματος εξυπηρέτησης υπό τις δύο οπτικές.

Παράδειγμα 8.1 (Διαφορά οπτικής διαχειριστή και πελατών) *Ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα D/D/1 σύστημα και ας εξετάσουμε τι αντιλαμβάνεται ο διαχειριστής και τι οι πελάτες.*

Σε ένα πρώτο σενάριο, ας υποθέσουμε ότι έχουμε αφίξεις σε σταθερά χρονικά διαστήματα, κάθε 10 χρονικές μονάδες και ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι επίσης σταθεροί και ίσοι με 9 χρονικές μονάδες. Τότε ο διαχειριστής βλέπει το σύστημα αρκετά απασχολημένο, για την ακρίβεια βλέπει ότι το 90% του χρόνου στο σύστημα υπάρχει 1 πελάτης ενώ μόνο ένα 10% του χρόνου το σύστημα είναι άδειο. Από την άλλη μεριά κάθε πελάτης βλέπει το σύστημα άδειο τη στιγμή που φθάνει σε αυτό (αφού ο προηγούμενος πελάτης έχει φύγει πριν 1 χρονική μονάδα). Μια τυπική πραγματοποίηση της διαδικασίας του πλήθους των πελατών, $\{Q(t)\}$, *απεικονίζεται στο σχήμα 8.1.*

Σε ένα δεύτερο σενάριο, ας υποθέσουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι και πάλι σταθεροί και ίσοι με 10 χρονικές μονάδες, αλλά τώρα θεωρούμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης διαρκούν 1 χρονική μονάδα για κάθε πελάτη. Τώρα ο διαχειριστής βλέπει το σύστημα πολύ λίγο απασχολημένο, αφού το 10% μόλις του χρόνου υπάρχει 1 πελάτης ενώ το 90% του χρόνου το σύστημα είναι άδειο. Από την άλλη μεριά, η εντύπωση που αποκομίζει κάθε πελάτης φθάνοντας στο σύστημα δεν διαφέρει από την εντύπωση που έχουν οι πελάτες στο πρώτο σενάριο: Και πάλι κάθε πελάτης βλέπει το σύστημα άδειο τη στιγμή που εισέρχεται σε αυτό. Μια τυπική πραγματοποίηση της διαδικασίας του πλήθους των πελατών, $\{Q(t)\}$, *απεικονίζεται στο σχήμα 8.2.*

Το συμπέρασμα είναι ότι οι οπτικές ενός εξωτερικού παρατηρητή και ενός αφικνούμενου πελάτη μπορεί να δίνουν πολύ διαφορετικές εικόνες για το ίδιο σύστημα. Επίσης, δυο συστήματα μπορεί να φαίνονται παρόμοια υπό τη μία οπτική (όπως τα δυο σενάρια υπό την οπτική των πελατών) και να είναι πολύ διαφορετικά υπό την άλλη οπτική (όπως τα δυο σενάρια υπό την οπτική του διαχειριστή). Αν σκεφτούμε ότι οι πελάτες δεν είναι παθητικές οντότητες αλλά μπορεί να αποφασίζουν τι θα κάνουν σε σχέση με το σύστημα (π.χ. να μπουν σε αυτό ή να φύγουν) έχει μεγάλη σημασία να ποσοτικοποιήσουμε με κάποιον τρόπο το πώς αντιλαμβάνονται τον συνωστισμό του συστήματος οι πελάτες κατά την άφιξή τους ή την αναχώρησή τους.

Προς τον σκοπό αυτό, έστω $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ οι διαδοχικές στιγμές αφίξεων και $D_1 < D_2 < D_3 < \ldots$ οι διαδοχικές στιγμές αναχωρήσεων των πελατών. Ξεκινώντας από τη στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που περιγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο, ορίζουμε τις εμφυτευμένες διαδικασίες $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων πελατών αντίστοιχα. Έτσι ορίζουμε:

- $Q_n^- = Q(A_n^-)$ τον αριθμό των πελατών αμέσως πριν τη n-οστή άφιξη πελάτη (δηλαδή τον αριθμό των παρόντων πελατών που βλέπει ο n-οστός πελάτης καθώς εισέρχεται στο σύστημα),

- $Q_n^+ = Q(D_n^+)$ τον αριθμό των πελατών αμέσως μετά τη n-οστή αναχώρηση πελάτη (δηλαδή τον αριθμό των πελατών που αφήνει πίσω του κατά την έξοδό του ο n-οστός πελάτης που φεύγει από το σύστημα).

Ενδιαφερόμαστε για τις αντίστοιχες κατανομές ισορροπίας ή οριακές κατανομές που περιγράφουν την εντύπωση που διαμορφώνει ένας πελάτης τη στιγμή που εισέρχεται στο σύστημα και τη στιγμή που αναχωρεί από αυτό, εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Μιλάμε, αντίστοιχα για τις κατανομές ισορροπίας ή οριακές κατανομές του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων. Η οριακή πιθανότητα σε στιγμή άφιξης να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα (εξαιρουμένης της νέας άφιξης), a_j, θα έχει και πάλι εναλλακτικές εκφράσεις ως C-οριακή πιθανότητα και ως μακροπρόθεσμο ποσοστό, εφόσον το σύστημα έχει αναγεννητικό χαρακτήρα με απεριοδικούς κύκλους απασχόλησης. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{E[A(Z)]} E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1_{\{Q_k^- = j\}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^- = j\}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Pr[Q_k^- = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^- = j],\ j \geq 0, \end{aligned} \tag{8.8}$$

όπου Z ο πρώτος κύκλος λειτουργίας και $A(Z)$ το πλήθος των αφίξεων σε αυτόν. Ομοίως, η οριακή πιθανότητα σε στιγμή αναχώρησης να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα (εξαιρουμένης της νέας αναχώρησης), d_j, είναι

$$\begin{aligned} d_j &= \frac{1}{E[A(Z)]} E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1_{\{Q_k^+ = j\}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^+ = j\}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Pr[Q_k^+ = j] \\ &= \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^+ = j],\ j \geq 0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Οι a_j και d_j είναι τα μακροπρόθεσμα ποσοστά των πελατών που βρίσκουν ή αφήνουν πίσω τους j πελάτες στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, ενώ η p_j είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα υπάρχουν j πελάτες (δηλ. είναι η οριακή πιθανότητα σε συνεχή χρόνο). Όπως και η p_j, έτσι και οι a_j και d_j ισούνται με τις αντίστοιχες οριακές πιθανότητες ένας πελάτης να δει j άτομα κατά την άφιξή του στο σύστημα ή κατά την αναχώρησή του, εφόσον βέβαια αυτές οι οριακές πιθανότητες υπάρχουν (πράγμα που συμβαίνει όταν η κατανομή του κύκλου απασχόλησης του συστήματος είναι απεριοδική).

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος οι κατανομές ισορροπίας (p_j), (a_j) και (d_j) να συμπίπτουν και γενικά αυτό δεν ισχύει.

Παράδειγμα 8.2 (Συνέχεια του παραδείγματος 8.1) *Ας συγκρίνουμε τα δυο σενάρια για την $D/D/1$ ουρά που περιγράψαμε στο παράδειγμα 8.1. Και στα δύο είχαμε $a_0 = 1$ και $a_j = 0,\ j \geq 1$. Όμως, στο πρώτο σενάριο είχαμε $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.9$, $p_j = 0,\ j \geq 2$, ενώ στο δεύτερο είχαμε $p_0 = 0.9$, $p_1 = 0.1$, $p_j = 0,\ j \geq 2$. Δηλαδή, και στα δυο σενάρια είναι $(p_j : j \geq 0) \neq (a_j : j \geq 0)$. Και μάλιστα, στην πραγματικότητα δεν μπορεί να βγει κανένα ουσιώδες συμπέρασμα από το a_j για το αντίστοιχο p_j (π.χ. $a_0 = 1$ και στα δυο σενάρια, ενώ $p_0 = 0.1$ στο πρώτο σενάριο και $p_0 = 0.9$ στο δεύτερο). Βέβαια στα δυο σενάρια ισχύει $(a_j : j \geq 0) = (d_j : j \geq 0)$, αφού όλοι οι πελάτες βρίσκουν το σύστημα κενό και όλοι το αφήνουν κενό.*

Παράδειγμα 8.3 (Κατανομές ισορροπίας σε στάση μεταφορικού μέσου) *Θεωρούμε την περίπτωση που επιβάτες φθάνουν σε μια στάση ενός μεταφορικού μέσου αεροδρομίου σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία και εκεί υπάρχει ένα βανάκι που αναχωρεί πάντα γεμάτο, όταν συγκεντρωθούν N επιβάτες. Αν εστιάσουμε στη στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των επιβατών που περιμένουν στη στάση, τότε βλέπουμε ότι η $\{Q(t)\}$ σε κάθε κύκλο λειτουργίας του συστήματος περνάει διαδοχικά από τις καταστάσεις $1, 2, 3, \dots, N-1$ και 0 και σε κάθε κατάσταση παραμένει για έναν ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων (παρατηρήστε ότι μόλις συγκεντρωθούν N πελάτες το βανάκι τους απομακρύνει ακαριαία, οπότε δεν παρατηρούμε την κατάσταση N και η στάση αδειάζει). Επομένως, αν ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων είναι a, τότε σε έναν κύκλο λειτουργίας η $\{Q(t)\}$ μένει στην κατάσταση $j = 1, 2, \dots, N-1$ και 0 κατά μέσο όρο για a χρονικές μονάδες, ενώ η μέση διάρκεια του κύκλου λειτουργίας είναι Na, όσο απαιτείται για να συγκεντρωθούν N επιβάτες. Οπότε, η κατανομή ισορροπίας της $\{Q(t)\}$ είναι*

$$p_j = \frac{a}{Na} = \frac{1}{N}, \quad 0 \leq j \leq N-1,$$

δηλαδή είναι διακριτή ομοιόμορφη στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Στο σύστημα αυτό οι διαδοχικά αφικνούμενοι πελάτες βλέπουν κατά την άφιξή τους $0, 1, 2, 3, \dots, N-1, 0, 1, 2, \dots, N-1, 0, 1, \dots$ πελάτες κ.ο.κ., οπότε σε κάθε κύκλο λειτουργίας του συστήματος υπάρχει ακριβώς ένας πελάτης που βλέπει $0, 1, \dots, N-1$ πελάτες κατά την άφιξή του. Επομένως τα μακροπρόθεσμα ποσοστά των πελατών που βλέπουν κατά την άφιξή τους j πελάτες, για $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, είναι όλα ίσα και έχουμε

$$a_j = \frac{1}{N}, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Εδώ, βλέπουμε ότι $(a_j : j \geq 0) = (p_j : j \geq 0)$. Όμως, επειδή οι πελάτες αναχωρούν όλοι μαζί όταν τους παίρνει το βανάκι, μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη το σύστημα είναι άδειο, δηλαδή

$$d_0 = 1, \quad \text{και} \quad d_j = 0, \quad j \geq 1.$$

Οπότε, τελικά $(d_j : j \geq 0) \neq (a_j : j \geq 0) = (p_j : j \geq 0)$.

8.4 Ρυθμός συνωστισμού - Ευστάθεια

Το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται προς διεκπεραίωση σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης ανά χρονική μονάδα αναφέρεται ως ο ρυθμός συνωστισμού ρ και ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων λ επί τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b:

$$\rho = \lambda b.$$

Το μέγιστο ποσό της εργασίας που μπορεί να διεκπεραιώσει το σύστημα ανά χρονική μονάδα είναι ίσο με το πλήθος των υπηρετών c, αφού κάθε υπηρέτης μπορεί να διεκπεραιώσει μια μονάδα εργασίας ανά χρονική μονάδα. Έτσι για να είναι το σύστημα ευσταθές και να να μην απειρίζεται η ουρά αναμένουμε διαισθητικά ότι θα πρέπει το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται ανά χρονική μονάδα να είναι μικρότερο από τη μέγιστη δυνατότητα διεκπεραίωσης του συστήματος ανά χρονική μονάδα.

Θεώρημα 8.1 (Χαρακτηρισμός ευστάθειας) *Στο $G/G/c$ σύστημα με απεριοδική (π.χ. συνεχή ή μεικτή) κατανομή για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων και/ή τους χρόνους εξυπηρέτησης ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:*

1. *$\rho < c$ οπότε το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχουν οι κατανομές ισορροπίας (p_j), (a_j) και (d_j) και είναι $p_j > 0,\ \ j \geq 0,\ \ $ και $\ \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ (και όμοια για τις (a_j) και (d_j)).*

2. *$\rho \geq c$ οπότε το σύστημα είναι ασταθές, δηλαδή το πλήθος των πελατών απειρίζεται καθώς $t \to \infty$ και $p_j = a_j = d_j = 0,\ \ j \geq 0$.*

Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το βιβλίο των Baccelli και Bremaud 1979 όπου αποδεικνύονται θεωρήματα ευστάθειας και άλλα θεωρητικά αποτελέσματα κάτω από γενικές συνθήκες. Βέβαια, το σύγγραμμα αυτό είναι μεταπτυχιακού χαρακτήρα και απαιτεί προχωρημένη γνώση της θεωρητικής θεμελίωσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Ένα σημείο του θεωρήματος που μοιάζει κάπως ασύμφωνο με τη διαίσθησή μας είναι το γεγονός ότι για $\rho = c$ το σύστημα είναι ασταθές. Αυτό συμβαίνει λόγω της τυχαιότητας που ενυπάρχει στο σύστημα. Δεδομένου του ότι δεν είναι όλα τα στοιχεία του συστήματος ντετερμινιστικά, όταν ο υπηρέτης παραμένει ανενεργός λόγω κάποιας τυχαίας μείωσης των αφίξεων για κάποιο διάστημα, χάνεται δυναμικότητα εξυπηρέτησης που δεν μπορεί να αναπληρωθεί αργότερα αφού το ρ είναι ακριβώς ίσο με c. Ένα ντετερμινιστικό σύστημα τύπου $\mathrm{D/D}/c$ με $\rho = c$ θα είναι ευσταθές. Π.χ. ένα $\mathrm{D/D/1}$ με $\rho = 1$ θα έχει πάντα σταθερό αριθμό πελατών (δείτε το παράδειγμα 8.1).

Επίσης, αξίζει να διευκρινιστεί ότι η (τεχνική) υπόθεση του θεωρήματος που αφορά την απεριοδικότητα των χρόνων δεν είναι περιοριστική, αφού ισχύει σε όλα τα συστήματα που εμφανίζονται στην πράξη λόγω του ότι υποτίθενται συνεχείς κατανομές σε αυτά. Η υπόθεση αυτή, όμως, είναι αναγκαία για να έχουμε την ερμηνεία των μακροπρόθεσμων ποσοστών του χρόνου ή των πελατών ως οριακές πιθανότητες, σύμφωνα με αυτά που είπαμε για την αναγεννητικότητα των συστημάτων εξυπηρέτησης και τις εναλλακτικές ερμηνείες των μέτρων απόδοσής τους.

8.5 Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων και ιδιότητα PASTA

Όπως είπαμε, οι κατανομές ισορροπίας (p_j), (a_j) και (d_j) γενικά δεν συμπίπτουν. Υπάρχουν όμως δυο περιπτώσεις στις οποίες κάποιες από αυτές συμπίπτουν.

Θεώρημα 8.2 (Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης στα οποία οι πελάτες έρχονται και αναχωρούν μεμονωμένα, δηλαδή δεν υπάρχουν ομαδικές αφίξεις, ούτε ομαδικές αναχωρήσεις, οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων συμπίπτουν: $(a_j) = (d_j)$.*

Η ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων μπορεί να αιτιολογηθεί ως εξής: Έστω $A_j(t)$ το πλήθος των αφίξεων στο $(0, t]$ που βρίσκουν j πελάτες και $A(t)$ το συνολικό πλήθος αφίξεων στο $(0, t]$. Τότε, έχουμε $a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}$. Ομοίως, $d_j = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$, όπου $D_j(t)$ το πλήθος των αναχωρήσεων στο $(0, t]$ που αφήνουν πίσω τους j πελάτες και $D(t)$ το συνολικό πλήθος αναχωρήσεων στο $(0, t]$. Οι μακροπρόθεσμοι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων είναι $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}$ και $\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}$.

Έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t},$$

αφού οι μακροπρόθεσμοι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων θα είναι ίσοι υπό την υπόθεση της ευστάθειας (ο ρυθμός των αφίξεων είναι προφανώς μεγαλύτερος ή ίσος του ρυθμού των αναχωρήσεων, αλλά δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος αν το σύστημα είναι ευσταθές). Επίσης, έχουμε ότι $|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1$, αφού μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων που βρίσκουν j πελάτες πρέπει να υπάρχει μια ακριβώς αναχώρηση που αφήνει j πελάτες στο σύστημα και μεταξύ δυο διαδοχικών αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες πρέπει να υπάρχει μια ακριβώς άφιξη που βρίσκει j πελάτες. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε διάσχιση του ορίου των j πελατών από τη διαδικασία του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$ από κάτω προς τα πάνω (δηλαδή από καταστάσεις μικρότερες ή ίσες του j σε καταστάσεις μεγαλύτερες του j) ακολουθείται από μια διάσχιση του ορίου από πάνω προς τα κάτω, πριν την επόμενη διάσχιση από κάτω προς τα πάνω. Με άλλα λόγια, οι διασχίσεις του ορίου των j πελατών συμβαίνουν εναλλάξ από κάτω προς τα πάνω και από πάνω προς τα κάτω. Οπότε έχουμε ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)-D_j(t)}{t} = 0$ και άρα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{t}.$$

Επομένως, είναι

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)/t}{A(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)/t}{D(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)} = d_j.$$

Θεώρημα 8.3 (Ιδιότητα PASTA (Poisson-Arrivals-See-Time-Averages)) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης στα οποία οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι με εκθετική κατανομή), οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και σε συνεχή χρόνο συμπίπτουν:* $(a_j) = (p_j)$.

Η διαισθητική αιτιολόγηση της ιδιότητα PASTA είναι ότι η διαδικασία Poisson μοντελοποιεί την ιδέα των εντελώς τυχαίων αφίξεων στον χρόνο και επομένως η παρατήρηση του αριθμού των πελατών κατά τη στιγμή της άφιξης ενός πελάτη στο σύστημα ισοδυναμεί με την παρατήρηση του αριθμού των πελατών σε μια τυχαία χρονική στιγμή (σε συνεχή χρόνο). Η αιτιολόγηση αυτή μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή αν σκεφθούμε ως εξής: Έστω $A(t, t+h)$ το πλήθος των αφίξεων σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο διάστημα $(t, t+h]$. Τότε, για το a_j, δηλαδή την οριακή πιθανότητα σε στιγμή άφιξης να παρατηρηθούν j πελάτες, έχουμε

$$\begin{aligned} a_j &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t) = j | A(t, t+h) > 0] \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j, A(t, t+h) > 0]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]} \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j] \Pr[A(t, t+h) > 0 | Q(t) = j]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]}. \end{aligned}$$

Όμως το ενδεχόμενο $\{A(t, t+h) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του $\{Q(t) = j\}$ λόγω του ότι η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson, της οποίας η (μελλοντική) εξέλιξη μετά τη χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t. Επομένως $\Pr[A(t, t+h) > 0 | Q(t) = j] = \Pr[A(t, t+h) > 0]$ και άρα

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t) = j] = p_j.$$

Η αυστηρή απόδειξη της ιδιότητας PASTA έγινε από τον Wolff 1982. Φυσικά μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο αποτελέσματα των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA.

Πόρισμα 8.1 (Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων + PASTA) *Σε συστήματα εξυπηρέτησης με μεμονωμένες μεταβάσεις (αφίξεις, αναχωρήσεις) και Poisson διαδικασία αφίξεων όλες οι κατανομές ισορροπίας του πλήθους των πελατών συμπίπτουν:* $(p_j) = (a_j) = (d_j)$.

Σε κάποιες εφαρμογές είναι χρήσιμη και η παρακάτω γενίκευση της ιδιότητας PASTA.

Θεώρημα 8.4 (Γενικευμένη ιδιότητα PASTA) *Έστω* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *μια στοχαστική διαδικασία και* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *μια διαδικασία Poisson με χρόνους γεγονότων* S_n, $n \geq 0$. *Αν ισχύει ότι για κάθε* $t \geq 0$, *η* $\{X(u) : 0 \leq u \leq t\}$ *και η* $\{N(t+u) - N(t) : u > 0\}$ *είναι ανεξάρτητες (υπόθεση έλλειψης προσδοκίας για την* $\{N(t)\}$ *- lack of anticipation assumption for* $\{N(t)\}$*), τότε οι κατανομές ισορροπίας της* $\{X(t)\}$ *όταν αυτή παρατηρείται σε συνεχή χρόνο ή αμέσως πριν από στιγμές γεγονότων της* $\{N(t)\}$ *συμπίπτουν, δηλαδή για κάθε ενδεχόμενο* B *έχουμε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\in B\}} du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n 1_{\{X(S_n^-)\in B\}}}{n}, \quad \textit{με πιθανότητα 1.} \tag{8.10}$$

Διαισθητικά, η γενικευμένη ιδιότητα PASTA αναφέρεται στην παρατήρηση μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ που καταγράφει την εξέλιξη της κατάστασης ενός συστήματος, κατά τις στιγμές των γεγονότων μιας διαδικασίας Poisson $\{N(t)\}$. Η σχέση-αλληλεπίδραση της $\{X(t)\}$ και της $\{N(t)\}$ δεν εξειδικεύεται, αλλά απαιτείται το μέλλον της διαδικασίας των στιγμών παρατήρησης $\{N(t)\}$ να είναι ανεξάρτητο από την παρελθούσα ιστορία και την παρούσα κατάσταση της $\{X(t)\}$. Με άλλα λόγια, για να ισχύει το αποτέλεσμα πρέπει οι στιγμές των μελλοντικών παρατηρήσεων του συστήματος να γίνονται εντελώς τυχαία (αυτήν την έννοια έχει το ότι η $\{N(t)\}$ είναι Poisson) και να μην καθοδηγούνται από τη μέχρι τώρα ιστορία του (αυτήν την έννοια έχει η υπόθεση έλλειψης προσδοκίας). Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, έχουμε ότι αυτό που βλέπει ο παρατηρητής που παρατηρεί το σύστημα σε συνεχή χρόνο ταυτίζεται με αυτό που βλέπει ο παρατηρητής που το παρατηρεί αμέσως πριν από τις στιγμές της $\{N(t)\}$: Το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η διαδικασία $\{X(t)\}$ περνάει σε ένα σύνολο B ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό των στιγμών της $\{N(t)\}$ που η $\{X(t)\}$ βρίσκεται σε καταστάσεις του B αμέσως πριν. Το αποτέλεσμα επικεντρώνεται στην κατάσταση του συστήματος αμέσως πριν τις στιγμές των παρατηρήσεων, ώστε να μη συμπεριλαμβάνονται στις καταστάσεις που παρατηρούνται οι επιδράσεις των παρατηρήσεων. Αυτό είναι σημαντικό διότι οι στιγμές παρατηρήσεων που παράγει η διαδικασία $\{N(t)\}$ συνδέονται στις περισσότερες εφαρμογές με αλλαγές στην κατάσταση της $\{X(t)\}$ (π.χ. οι στιγμές παρατήρησεων μπορεί να είναι οι αφίξεις σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και η $\{X(t)\}$ η διαδικασία που καταγράφει τον αριθμό των πελατών).

Η συνήθης ιδιότητα PASTA προκύπτει από τη γενικευμένη όταν η $\{X(t)\}$ είναι η διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, η $\{N(t)\}$ είναι η Poisson διαδικασία των αφίξεων του συστήματος και ως σύνολα B θεωρούνται τα μονοσύνολα $\{j\}$ που αντιστοιχούν στην παρουσία j πελατών στο σύστημα.

8.6 Νόμος του Little

Ο νόμος του Little είναι ένα πολύ γενικό αποτέλεσμα που συνδέει το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, τον ρυθμό αφίξεων λ και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη $E[S]$ σε αυτό. Το αποτέλεσμα αποδείχθηκε αρχικά στην εργασία Little 1961. Κατόπιν δημοσιεύτηκαν αρκετές εργασίες που το γενικεύουν και/ή προσφέρουν εναλλακτικές αποδείξεις, π.χ. οι εργασίες S.Jr Stidham 1972 και S.Jr Stidham 1974. Το μόνο που προϋποθέτει είναι η αναγεννητικότητα του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Συγκεκριμένα, έχουμε:

Θεώρημα 8.5 (Νόμος του Little) *Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης με αναγεννητική διαδικασία αριθμού πελατών στο σύστημα* $\{Q(t) : t \geq 0\}$, *με σημεία αναγέννησης τις στιγμές που φθάνουν πελάτες σε κενό σύστημα. Έστω, επίσης,* $\{A(t) : t \geq 0\}$ *η διαδικασία των αφίξεων πελατών του συστήματος και* $\{S_n : n \geq 1\}$ *η ακολουθία* *των χρόνων παραμονής των πελατών. Θέτουμε*

$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t}, \ \lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}, \ E[S] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} S_k}{n} \tag{8.11}$$

το μέσο πλήθος πελατών, τον ρυθμό αφίξεων και τον μέσο χρόνο παραμονής πελάτη στο σύστημα, αντίστοιχα. Τότε:

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{8.12}$$

Διαισθητικά, το αποτέλεσμα του Little μπορεί να γίνει κατανοητό θεωρώντας ότι κάθε πελάτης πληρώνει 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα. Τότε ο διαχειριστής του συστήματος λαμβάνει $E[Q]$ χρηματικές μονάδες στη μονάδα του χρόνου, αν υποθέσουμε ότι η πληρωμή γίνεται κατά τρόπο «συνεχή». Από την άλλη μεριά, η μέση είσπραξη του διαχειριστή στη μονάδα του χρόνου θα πρέπει να είναι η ίδια αν οι πελάτες πληρώνουν «προκαταβολικά», δηλαδή αν με την είσοδό τους στο σύστημα δίνουν όλο το ποσό για την παραμονή τους. Αλλά τότε θα έχουμε κατά μέσο όρο λ πελάτες ανά χρονική μονάδα και ο καθένας θα πληρώνει $E[S]$ χρηματικές μονάδες, οπότε η συνολική είσπραξη του διαχειριστή θα είναι $\lambda E[S]$ χρηματικές μονάδες στη μονάδα του χρόνου. Αφού τα δυο ποσά πρέπει να είναι ίσα (μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο με συνεχή είσπραξη = μακροπρόθεσμο μέσο έσοδο με προκαταβολική είσπραξη) έχουμε τη σχέση $E[Q] = \lambda E[S]$.

Για μια μαθηματική διατύπωση αυτής της ιδέας σκεφτόμαστε ως εξής: Λόγω της αναγεννητικότητας του συστήματος, τα μέτρα απόδοσης που εμφανίζονται στον νόμο του Little είναι καλά ορισμένα και μπορούν να υπολογιστούν αν περιοριστούμε στον πρώτο αναγεννητικό κύκλο Z, δηλ. ξεκινώντας από τη στιγμή που ένας πελάτης φθάνει σε κενό σύστημα ως την επόμενη στιγμή που ένας άλλος πελάτης θα αφιχθεί σε κενό σύστημα. Έχουμε, δηλαδή, από το εργοδικό θεώρημα των αναγεννητικών διαδικασιών ότι:

$$E[Q] = \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[Z]}, \ \lambda = \frac{E[A(Z)]}{E[Z]}, \ E[S] = \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]}. \tag{8.13}$$

Έστω $I_k(u)$ η δείκτρια τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον k-οστό πελάτη και παίρνει την τιμή 1 αν αυτός είναι παρών στο σύστημα τη χρονική στιγμή u και 0 διαφορετικά. Τότε είναι φανερό ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots, A(Z)$, ο χρόνος παραμονής του k-οστού πελάτη γράφεται ως

$$S_k = \int_0^Z I_k(u)du.$$

Επίσης, για κάθε $u \in (0, Z]$, έχουμε

$$Q(u) = \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u).$$

Αλλά τότε έχουμε:

$$\int_0^Z Q(u)du = \int_0^Z \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u)du = \sum_{k=1}^{A(Z)} \int_0^Z I_k(u)du = \sum_{k=1}^{A(Z)} S_k. \tag{8.14}$$

Ουσιαστικά η σχέση αυτή γίνεται φανερή, αν σκεφτεί κανείς ότι κάθε χρονική μονάδα παραμονής κάθε πελάτη που αφίχθη στο διάστημα $(0, Z]$ συνεισφέρει μια μονάδα στο αριστερό μέλος, επομένως το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους ισούται με τον συνολικό χρόνο παραμονής όλων των πελατών που αφίχθηκαν στο διάστημα $(0, Z]$, που είναι ακριβώς το δεξιό μέλος. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Q] &= \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[Z]} = \frac{E[A(Z)]}{E[Z]} \cdot \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[A(Z)]} \\ &= \frac{E[A(Z)]}{E[Z]} \cdot \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]} = \lambda E[S]. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα του Little μπορεί να εφαρμοστεί και σε υποσυστήματα ενός συστήματος, δίνοντας ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή το $E[Q]$ θα αναφέρεται στο μέσο πλήθος πελατών στο συγκεκριμένο υποσύστημα, το λ στον ρυθμό άφιξης στο συγκεκριμένο υποσύστημα και το $E[S]$ στον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο συγκεκριμένο υποσύστημα.

Θεωρώντας ως υποσύστημα τον χώρο αναμονής ενός συστήματος (δηλαδή την ουρά) παίρνουμε τη σχέση

$$E[Q_q] = \lambda E[W], \tag{8.15}$$

δηλαδή ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά ισούται με τον ρυθμό αφίξεων επί τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτησή του.

Ο νόμος του Little εφαρμοζόμενος στον χώρο εξυπηρέτησης δίνει τη σχέση

$$E[Q_s] = \lambda E[B] = \lambda b = \rho, \tag{8.16}$$

δηλαδή ο μέσος αριθμός πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης που προφανώς ταυτίζεται με τον μέσο αριθμό απασχολημένων υπηρετών ισούται με τον ρυθμό συνωστισμού του συστήματος. Έτσι έχουμε μια δεύτερη ερμηνεία του ρυθμού συνωστισμού. Όχι μόνο είναι το μέσο ποσό εργασίας που εισέρχεται στο σύστημα ανά χρονική μονάδα αλλά επιπλέον εκφράζει και τον μέσο αριθμό απασχολημένων υπηρετών μια τυχούσα χρονική στιγμή (σε κατάσταση ισορροπίας). Επειδή ο μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών ισούται με το πλήθος c των υπηρετών επί την πιθανότητα ένας υπηρέτης να είναι απασχολημένος, συμπεραίνουμε ότι η οριακή πιθανότητα απασχολημένου υπηρέτη ή, ισοδύναμα, το ποσοστό του χρόνου απασχόλησης ενός υπηρέτη είναι $\frac{\rho}{c}$.

Επίσης, ειδικά για την G/G/1 ουρά έχουμε

$$\rho = E[Q_s] = 0\,\Pr[Q_s = 0] + 1\,\Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q \geq 1] = 1 - p_0,$$

επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος είναι

$$p_0 = 1 - \rho. \tag{8.17}$$

Συνοψίζοντας, θεωρώντας ως υποσύστημα τον χώρο εξυπηρέτησης ενός συστήματος, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 8.2 (Ερμηνείες του ρυθμού συνωστισμού) *Σε ένα ευσταθές $G/G/c$ σύστημα ο ρυθμός συνωστισμού ισούται με τον μέσο αριθμό απασχολημένων υπηρετών. Το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που ένας υπηρέτης είναι απασχολημένος είναι ίσο με* $\frac{\rho}{c}$.

Σε ένα ευσταθές $G/G/1$ σύστημα ο ρυθός συνωστισμού ταυτίζεται επιπλέον με την πιθανότητα κατειλημμένου υπηρέτη (δηλ. μη-κενού συστήματος).

8.7 Ασκήσεις

Άσκηση 8.1 *Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι Erlang$(3, \mu)$ (αποτελούμενοι από 3 φάσεις, καθεμία εκθετικής διάρκειας μ) και γνωστοποιούνται στο σύστημα μόλις φθάνουν οι πελάτες. Στο σύστημα υπάρχουν 4 υπηρέτες. Ο χώρος αναμονής του συστήματος είναι κοινός για όλους τους υπηρέτες και έχει 6 θέσεις, πλέον των θέσεων εξυπηρέτησης (μία μπροστά από κάθε υπηρέτη). Κάθε φορά που ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει τουλάχιστον έναν ελεύθερο υπηρέτη, διαλέγει έναν στην τύχη και αρχίζει να εξυπηρετείται. Αν ένας αφικνούμενος πελάτης βρει όλους τους υπηρέτες απασχολημένους, τότε παραμένει σε μία από τις 6 θέσεις στον χώρο αναμονής του συστήματος. Αν είναι, όμως, κατειλημμένες, τότε αναχωρεί άμεσα από το σύστημα. Κάθε φορά που αναχωρεί πελάτης και υπάρχουν πελάτες στον χώρο αναμονής, ο υπηρέτης που ελευθερώθηκε επιλέγει για εξυπηρέτηση τον πελάτη που έχει δηλώσει τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης.*

1. *Πώς αναφέρεται το συγκεκριμένο σύστημα με βάση την ονοματολογία του Kendall;*

2. *Ποιος είναι ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων και ποιος ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης στο συγκεκριμένο σύστημα;*

Άσκηση 8.2 *Περιγράψτε τα βασικά στοιχεία (διαδικασία αφίξεων, χρόνους εξυπηρέτησης, αριθμό υπηρετών, χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς) για τα συστήματα $GI/M/2/5$ και $M/D/1(LCFS)$.*

Άσκηση 8.3 *Ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη λειτουργεί με κύκλους λειτουργίας ως εξής: Στην αρχή κάθε κύκλου λειτουργίας φθάνει μια παρτίδα με προϊόντα προς επεξεργασία. Τα μεγέθη των διαδοχικά αφικνούμενων παρτίδων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $(g_j : j \geq 1)$. Αμέσως μετά την άφιξη μιας παρτίδας, ο υπηρέτης αρχίζει την επεξεργασία των προϊόντων, ένα-ένα. Ο μέσος χρόνος για την επεξεργασία ενός προϊόντος είναι a χρονικές μονάδες. Μόλις τελειώσει η επεξεργασία ενός προϊόντος, αυτό αναχωρεί από το σύστημα. Όταν τελειώσει η επεξεργασία όλων των προϊόντων μιας παρτίδας, ο υπηρέτης αργεί για b χρονικές μονάδες. Κατόπιν αρχίζει ένας νέος κύκλος λειτουργίας με την άφιξη μιας νέας παρτίδας προϊόντων κ.ο.κ.*

1. *Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου, p_0, που ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση.*

2. *Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου, p_j, που υπάρχουν j προϊόντα στο σύστημα, για $j \geq 1$.*

3. *Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό προϊόντων, d_j, που με την αναχώρησή τους αφήνουν j προϊόντα στο σύστημα, για $j \geq 0$.*

Άσκηση 8.4 *Μια $G/M/1$ ουρά έχει εκθετική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης με παράμετρο μ και κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων πελατών που δίνεται από τον τύπο $a_j = (1-\alpha)\alpha^j$, για $j \geq 0$, όπου α γνωστή παράμετρος.*

1. *Να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης στο σύστημα.*

2. *Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που βρίσκει j πελάτες στο σύστημα, κατά την άφιξή του.*

3. *Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.*

Άσκηση 8.5 *Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης με μεμονωμένες μεταβάσεις (αφίξεις και αναχωρήσεις) και έστω Q_n^-, Q_n^+ οι αριθμοί των πελατών πριν την n-οστή άφιξη και μετά την n-οστή αναχώρηση, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αρχικά κενό.*

1. *Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$ και $k \geq 0$ ισχύει ότι $Q_n^+ \leq k$ αν και μόνο αν $Q_{n+k+1}^- \leq k$.*

2. *Να αποδείξετε την ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων, δηλαδή το θεώρημα 8.2.*

Άσκηση 8.6 *Με χρήση του νόμου του Little και της ιδιότητας PASTA, να βρείτε τα μακροπρόθεσμα ποσοστά του χρόνου κενού και απασχολημένου υπηρέτη, δηλαδή τις πιθανότητες p_0 και p_1, σε μια $M/G/1/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.*

Άσκηση 8.7 *Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, στην $G/G/\infty$ ουρά με μέσο ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων a και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.*

Άσκηση 8.8 *Θεωρήστε μια $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες την ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης ανά πελάτη 78 λεπτά.*

1. *Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές (δηλαδή να μην απειρίζεται η ουρά);*

2. *Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του;*

Άσκηση 8.9 *Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες το λεπτό και το σύστημα έχει πεπερασμένη χωρητικότητα $k = 9$. Αν γνωρίζουμε ότι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται $k = 9$ πελάτες είναι $p_k = p_9 = 0.8$ και ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q] = 40$, να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφιχθέντος και ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.*

8.8 Σχόλια

Η αναγεννητικότητα των υποκείμενων στοχαστικών διαδικασιών είναι μια βασική υπόθεση που διατρέχει το σύνολο σχεδόν της Θεωρίας Ουρών. Τα εισαγωγικά βιβλία Wolff 1989, Φακίνος 2003, Tijms 2008 και Kulkarni 2010 δίνουν έμφαση σε αυτήν την οπτική. Επίσης, η οπτική αυτή συνδέεται με τη μελέτη των συστημάτων εξυπηρέτησης εστιάζοντας σε μια πραγματοποίησή τους (sample-path analysis). Το βασικό σύγγραμμα που αναπτύσσει αυτήν τη θεώρηση είναι το El-Taha και S.Jr. Stidham 1998.

Άλλα συγγράμματα ακολουθούν μια πιο αναλυτική προσέγγιση. Εκεί η έμφαση δίνεται στη μοντελοποίηση των συστημάτων εξυπηρέτησης μέσω κάποιων στοχαστικών διαδικασιών με ανεπτυγμένη θεωρία (π.χ. ως Μαρκοβιανές διαδικασίες συνεχούς χρόνου) και κατόπιν χρησιμοποιούνται κυρίως αναλυτικές τεχνικές. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να δει π.χ. τα Kleinrock 1975, Kleinrock 1976 και Cohen 1969.

Οι δυο θεωρήσεις, η κλασική-αναλυτική και η σύγχρονη-πιθανοθεωρητική με έμφαση στην αναγεννητικότητα, είναι συμπληρωματικές και είναι σημαντικό ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να έρθει σε επαφή και με τις δύο.

Κάποια εισαγωγικά συγγράμματα στη Θεωρία Ουρών Αναμονής που κινούνται σε μαθηματικό επίπεδο παρόμοιο με του παρόντος βιβλίου είναι τα Shortle, Thompson, Gross και Harris 2018, Haviv 2013 και Harchol-Balter 2013, καθώς και το κλασικό σύγγραμμα του Asmussen 1987 που κινείται σε πιο προχωρημένο επίπεδο.

Τα βασικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σχεδόν σε όλα τα εισαγωγικά βιβλία της Θεωρίας Ουρών Αναμονής. Τα εισαγωγικά βιβλία Wolff 1989, Φακίνος 2003, Tijms 2008 και Kulkarni 2010 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα αυτά με αρκετή λεπτομέρεια. Για μια πολύ συνοπτική παρουσίαση μπορεί κανείς να ανατρέξει στο Adan και Resing 2001.

Αποτελέσματα σχετικά με την ευστάθεια συστημάτων εξυπηρέτησης και τη σχέση των κατανομών ισορροπίας (p_j), (a_j) και (d_j) μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο των Baccelli και Bremaud 1979, το οποίο όμως είναι πολύ προχωρημένου επιπέδου. Στη σχέση των κατανομών ισορροπίας σε συνεχή χρόνο και σε στιγμές γεγονότων αναφέρεται και το βιβλίο Sigman 1995 που είναι επίσης αρκετά θεωρητικό.

Η ιδιότητα PASTA αποδείχθηκε αυστηρά στη θεμελιώδη εργασία του Wolff 1982. Στο βιβλίο Wolff 1989 η ιδιότητα παρουσιάζεται με λεπτομέρεια.

Ο νόμος του Little αποδείχθηκε στη θεμελιώδη εργασία Little 1961. Διάφορες εναλλακτικές αποδείξεις και γενικεύσεις του παρουσιάζονται στις εργασίες S.Jr Stidham 1972, S.Jr Stidham 1974, καθώς και στο βιβλίο του Wolff 1989.

Ο νόμος του Little συνδυαζόμενος με την ιδιότητα PASTA δίνει μια ιδιαίτερα επιτυχημένη μέθοδο υπολογισμού του μέσου αριθμού πελατών και του μέσου χρόνου παραμονής ενός πελάτη σε πολλά συστήματα εξυπηρέτησης. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται ως ανάλυση μέσης τιμής (Mean Value Analysis - MVA) και παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία

[1] D.G. Kendall. "Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain". Στο: *The Annals of Mathematical Statistics* 24 (1953), σσ. 338–354.

[2] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[3] Δ. Φακίνος. *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2003. ISBN: 978-960-266-206-9.

[4] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[5] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[6] F. Baccelli και P. Bremaud. *Elements of Queueing Theory. Palm Martingale Calculus and Stochastic Recurrences, 2nd Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1979.

[7] R.W. Wolff. "Poisson arrivals see time averages". Στο: *Operations Research* 30 (1982), σσ. 223–231.

[8] J.D.C. Little. "A proof of the queueing formula $L = \lambda W$". Στο: *Operations Research* 9 (1961), σσ. 383–387.

[9] S.Jr Stidham. "$L = \lambda W$: A discounted analogue and a new proof". Στο: *Operations Research* 20 (1972), σσ. 1115–1120.

[10] S.Jr Stidham. "A last word on $L = \lambda W$". Στο: *Operations Research* 22 (1974), σσ. 417–421.

[11] M. El-Taha και S.Jr. Stidham. *Sample-path Analysis of Queueing Systems*. Kluwer, 1998. ISBN: 978-0792382102.

[12] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley, 1975. ISBN: 978-0471491101.

[13] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 2: Computer Applications*. Wiley, 1976. ISBN: 978-0471491118.

[14] J.W. Cohen. *The Single Server Queue*. Amsterdam: North-Holland, 1969. ISBN: 978-0720423587.

[15] J.F. Shortle, J.M. Thompson, D. Gross και C.M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory, 5th Edition*. Wiley, 2018. ISBN: 978-1118943526.

[16] M. Haviv. *Queues: A Course in Queueing Theory*. Springer, 2013. ISBN: 978-1461467649.

[17] M. Harchol-Balter. *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge, 2013. ISBN: 978-1107027503.

[18] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Wiley, 1987. ISBN: 978-0471911739.

[19] I. Adan και J. Resing. *Queueing Theory*. Eindhoven: Notes available online, 2001.

[20] K. Sigman. *Stationary Marked Point Processes: An Intuitive Approach*. Chapman και Hall/CRC, 1995. ISBN: 978-0412984310.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές τεχνικές της Θεωρίας Ουρών Αναμονής και τα πλέον κλασικά συστήματα ουρών αναμονής. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζεται η τεχνική της ανάλυσης μέσης τιμής για τον προσδιορισμό του μέσου αριθμού των πελατών και του μέσου χρόνου παραμονής ενός πελάτη. Η τεχνική αυτή βασίζεται στην ιδιότητα PASTA και στον νόμο του Little που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 8.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, μελετάμε τις πλέον απλές ουρές, στις οποίες ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης-θανάτου, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή το σύστημα, όντας σε μια κατάσταση n, μπορεί να μεταβεί μόνο στην $n + 1$ (λόγω άφιξης πελάτη) ή στην $n - 1$ (λόγω αναχώρησης). Παρόλο που η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι πολύ απλή, η θέση τους στη Θεωρία Ουρών είναι πολύ σημαντική, δεδομένης της μεγάλης εφαρμοσιμότητάς τους. Αναπτύσσεται αρχικά η βασική θεωρία για τη μελέτη των απλών Μαρκοβιανών ουρών και, εν συνεχεία, εφαρμόζεται σε συγκεκριμένα βασικά συστήματα όπως στις M/M/1/1, M/M/1, M/M/c και M/M/c/c ουρές, καθώς και σε κάποιες σημαντικές παραλλαγές τους.

Προαπαιτούμενη γνώση

Για την κατανόηση του παρόντος κεφαλαίου, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει κατακτήσει τα περιεχόμενα των κεφαλαίων 1, 2, 3 και 8.

9.1 Ανάλυση μέσης τιμής

Η ιδιότητα PASTA σε συνδυασμό με τον νόμο του Little μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε με πιθανοθεωρητικούς συλλογισμούς και ελάχιστους υπολογισμούς τον μέσο αριθμό πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, $E[Q]$, και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, για αρκετά συστήματα, χω-

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

ρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες κατανομές. Η ανάλυση αυτή αναφέρεται συχνά ως ανάλυση μέσης τιμής (mean value analysis - MVA) και είναι ένα απλό και κομψό εργαλείο μελέτης συστημάτων εξυπηρέτησης. Στην παρούσα ενότητα θα την παρουσιάσουμε αναλύοντας μια σειρά από συγκεκριμένα συστήματα με τη μέθοδο αυτή.

Η γενική ιδέα της ανάλυσης μέσης τιμής είναι ότι για τον προσδιορισμό των δύο άγνωστων ποσοτήτων $E[Q]$ και $E[S]$ χρειάζονται δυο εξισώσεις. Η μία είναι ο νόμος του Little και η δεύτερη προκύπτει υπολογίζοντας τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, $E[S]$, δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του, δηλαδή δεσμεύοντας στην Q^- που έχει την κατανομή (a_j), για την οποία μιλήσαμε στην ενότητα 8.3. Επομένως, η δεύτερη σχέση εκφράζει το $E[S]$ συναρτήσει της $E[Q^-]$. Στην περίπτωση συστημάτων με Poisson διαδικασία αφίξεων, η κατανομή του πλήθους των πελατών σε στιγμές αφίξεων συμπίπτει με την κατανομή του πλήθους των πελατών σε συνεχή χρόνο, δηλαδή οι Q^- και Q είναι ισόνομες (ιδιότητα PASTA), οπότε η δεύτερη σχέση εκφράζει τελικά το $E[S]$ συναρτήσει του $E[Q]$.

9.1.1 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1/1 και M/G/1/1 ουρές

Θεωρούμε μια M/M/1/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{9.1}$$

Για τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών Q^- που βλέπει ένας πελάτης κατά την άφιξή του, έχουμε

$$\begin{aligned} E[S] &= \Pr[Q^- = 0]E[S|Q^- = 0] + \Pr[Q^- = 1]E[S|Q^- = 1] \\ &= a_0 \cdot \frac{1}{\mu} + a_1 \cdot 0 = \frac{a_0}{\mu} = \frac{p_0}{\mu}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της PASTA. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (9.1)–(9.2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E[Q] = p_1$ έχουμε

$$p_1 = \lambda \frac{p_0}{\mu} = \rho p_0, \tag{9.3}$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού. Επίσης, το σύστημα είναι ευσταθές, αφού έχει πεπερασμένη χωρητικότητα και άρα

$$p_0 + p_1 = 1. \tag{9.4}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (9.3)–(9.4) παίρνουμε

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho},\ p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}, \tag{9.5}$$

οπότε

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho},\ E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}.$$

Η ανάλυση παραμένει έγκυρη και στην περίπτωση της M/G/1/1 ουράς, με ρυθμό αφίξεων λ και γενικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b. Πράγματι, η (9.1) εξακολουθεί να ισχύει, ενώ η (9.2) γίνεται $E[S] = p_0 b$. Επομένως, η (9.3) γίνεται $p_1 = \lambda p_0 b = \rho b$, και η (9.5) ισχύει. Επίσης, έχουμε

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho},\ E[S] = \frac{b}{1+\rho}.$$

9.1.2 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1 και M/G/1 ουρές

Θεωρούμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{9.6}$$

Για τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών Q^- που βλέπει ο πελάτης κατά την άφιξή του, έχουμε

$$E[S] = E[E[S|Q^-]] = E[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i],$$

όπου B_1 είναι ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται (αν εξυπηρετείται κάποιος), $B_2, B_3, \ldots, B_{Q^-}$ οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών στον χώρο αναμονής (αν υπάρχουν) και B_{Q^-+1} ο χρόνος εξυπηρέτησης του αφικνούμενου πελάτη. Ο χρόνος B_1 έχει και αυτός την $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Έχουμε, λοιπόν, ότι όλες οι τυχαίες μεταβλητές B_i, $i = 1, 2, \ldots, Q^- + 1$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και επιπλέον η $Q^- + 1$ είναι ανεξάρτητη των B_i (διότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης B_i δεν έχουν παίξει κάποιον ρόλο στον καθορισμό της Q^- που εξαρτάται από παρελθόντες χρόνους εξυπηρέτησης μόνο). Επομένως, έχουμε

$$E[S] = E[Q^- + 1]E[B_1] = \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} = \frac{E[Q] + 1}{\mu}, \tag{9.7}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ιδιότητας PASTA.

Λύνοντας το σύστημα των (9.6) και (9.7) για τις $E[S]$ και $E[Q]$ προκύπτει ότι

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}, \; E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \tag{9.8}$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της M/G/1 ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και γενική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης $F_B(x)$. Θα συμβολίζουμε έναν γενικό χρόνο εξυπηρέτησης με B. Έστω $b = E[B]$, $b_2 = E[B^2]$, $\sigma_B^2 = Var[B]$ και $\rho = \lambda b$ ο ρυθμός συνωστισμού. Η (9.6) εξακολουθεί να ισχύει, αλλά η αντίστοιχη της (9.7), $E[S] = (E[Q] + 1)b$, όχι. Ο λόγος είναι ότι ένας πελάτης που βρίσκει κατά την άφιξή του j πελάτες στο σύστημα θα παραμείνει σε αυτό για j ολόκληρους χρόνους εξυπηρέτησης (για τον δικό του και για τους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που βρίσκονται ήδη στο σύστημα στον χώρο αναμονής) συν τον υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του πελάτη που ήδη εξυπηρετείται. Οπότε, δεδομένου ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικοί, αυτός ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης δεν έχει την ίδια κατανομή με έναν ολόκληρο χρόνο εξυπηρέτησης. Έτσι, για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα και να βρούμε κάποια αντίστοιχη της σχέσης (9.7), δεσμεύουμε καταρχήν στο κατά πόσο ο αριθμός των πελατών, Q^- που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης είναι θετικός ή όχι. Έτσι ξεκινώντας και πάλι από τη σχέση

$$S = \sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[S] \;&=\; \Pr[Q^- = 0]E\left[B_1|Q^- = 0\right] \\ &\quad + \Pr[Q^- > 0]\left(E\left[B_1|Q^- > 0\right] + E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i|Q^- > 0\right]\right). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Εδώ, χρησιμοποιώντας τον τύπο (8.17) για την πιθανότητα κενού συστήματος της G/G/1 ουράς και την ιδιότητα PASTA (βλέπε θεώρημα 8.3) έχουμε $\Pr[Q^- = 0] = a_0 = p_0 = 1 - \rho$ και $\Pr[Q^- > 0] = 1 - a_0 = 1 - p_0 = \rho$. Επίσης, $E[B_1|Q^- = 0] = b$, διότι στην περίπτωση που ο επιλεγμένος πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό, ο B_1 είναι ο δικός του χρόνος εξυπηρέτησης και όχι ένας υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης και άρα η μέση τιμή του είναι b. Επίσης, $E[B_i|Q^- > 0] = E[B_i] = b$, για $i = 2, 3, \ldots$, καθώς οι $B_2, B_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητοι από την Q^-. Επομένως, η (9.9) γίνεται

$$\begin{aligned} E[S] &= (1-\rho)b + \rho\,(E[B_1|Q^- > 0] + E[Q^-|Q^- > 0]b) \\ &= (1-\rho)b + \rho E[B_1|Q^- > 0] + \Pr[Q^- > 0]E[Q^-|Q^- > 0]b. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Μένει να βρούμε την $E[B_1|Q^- > 0]$. Η πληροφορία $Q^- > 0$ μας λέει ότι ο επιλεγμένος πελάτης φθάνει κατά τη διάρκεια μιας περιόδου συνεχούς λειτουργίας του συστήματος. Αν παρατηρούμε το σύστημα μόνο κατά τη διάρκεια των περιόδων συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, τότε οι στιγμές που ολοκληρώνονται οι εξυπηρετήσεις είναι οι χρόνοι γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης του συστήματος. Αυτό συμβαίνει επειδή ο υπηρέτης εξυπηρετεί συνεχώς αν κοιτάζουμε το σύστημα μόνο κατά τη διάρκεια των περιόδων συνεχούς λειτουργίας. Επομένως, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης αν κοιτάξουμε το σύστημα σε μια τυχαία χρονική στιγμή έχει την ίδια κατανομή με την οριακή κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης, R_B, αυτής της ανανεωτικής διαδικασίας (όπου το B εισάγεται ως δείκτης για να θυμίζει τους ενδιάμεσους χρόνους της ανανεωτικής διαδικασίας στην οποία αναφερόμαστε). Αυτή είναι η κατανομή ισορροπίας της ανανεωτικής διαδικασίας που δίνεται στην περίπτωσή μας από τον τύπο

$$F_{R_B}(x) = \frac{\int_0^x (1 - F_B(t))dt}{b}, \tag{9.11}$$

εφαρμόζοντας τη σχέση (2.5). Η μέση τιμή είναι η

$$E[R_B] = \frac{b_2}{2b} = \frac{b^2 + \sigma_B^2}{2b} \tag{9.12}$$

(εφαρμόζοντας τη σχέση (2.2) ή την (1.3)). Επειδή οι αφίξεις κατά τη διάρκεια των περιόδων συνεχούς απασχόλησης γίνονται σύμφωνα με διαδικασία Poisson, από τη γενικευμένη ιδιότητα PASTA (θεώρημα 8.4), η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης αν κοιτάξουμε το σύστημα σε μια τυχαία στιγμή άφιξης ταυτίζεται με την κατανομή σε τυχαία χρονική στιγμή. Έτσι έχουμε ότι

$$E[B_1|Q^- > 0] = E[R_B] = \frac{b^2 + \sigma_B^2}{2b}. \tag{9.13}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την (9.13) στην (9.10) έχουμε

$$E[S] = (1-\rho)b + \rho E[R_B] + \Pr[Q^- > 0]E[Q^-|Q^- > 0]b. \tag{9.14}$$

Όμως, $\Pr[Q^- > 0]E[Q^-|Q^- > 0] = E[Q^- 1_{\{Q^- > 0\}}] = E[Q^-] = E[Q]$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με λ τη σχέση (9.14), και χρησιμοποιώντας τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = (1-\rho)\rho + \lambda\rho E[R_B] + \rho E[Q].$$

Λύνοντας ως προς $E[Q]$, παίρνουμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα

$$E[Q] = \rho + \frac{\rho}{1-\rho}\lambda E[R_B],$$

και διαιρώντας με λ παίρνουμε και τον μέσο χρόνο παραμονής πελάτη στο σύστημα

$$E[S] = b + \frac{\rho}{1-\rho}E[R_B].$$

Ένας εύκολος τρόπος να θυμάται κανείς αυτά τα αποτελέσματα, είναι να θυμάται ότι ο μέσος χρόνος αναμονής στην M/G/1 ουρά ισούται με τον μέσο αριθμό πελατών στην M/M/1 ουρά επί τη μέση τιμή της κατανομής ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης:

$$E[W] = \frac{\rho}{1-\rho} E[R_B].$$

9.1.3 Ανάλυση μέσης τιμής στις M/M/1 και M/G/1 ουρές με την K-πολιτική ενεργοποίησης

Θεωρούμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, όπου μόλις το σύστημα αδειάσει ο υπηρέτης παύει να παρέχει εξυπηρέτηση και αρχίζει και πάλι να εξυπηρετεί, μόλις μαζευτούν K πελάτες με $K \geq 1$ (για $K = 1$ έχουμε την κλασική M/M/1 ουρά). Ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό των $E[Q]$ και $E[S]$.

Από τον νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{9.15}$$

Έστω I η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην κατάσταση του υπηρέτη:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν ο υπηρέτης παρέχει εξυπηρέτηση,} \\ 0 & \text{αν ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση.} \end{cases}$$

Τότε δεσμεύοντας στην κατάσταση του υπηρέτη που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης, I^-, έχουμε τη σχέση

$$E[S] = \Pr[I^- = 0]E[S|I^- = 0] + \Pr[I^- = 1]E[S|I^- = 1]. \tag{9.16}$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα τις ποσότητες $\Pr[I^- = 0]$, $\Pr[I^- = 1]$, $E[S|I^- = 0]$ και $E[S|I^- = 1]$ συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος.

Για τις $\Pr[I^- = 0]$, $\Pr[I^- = 1]$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Little στον χώρο εξυπηρέτησης, θεωρώντας ότι ένας πελάτης βρίσκεται στον χώρο εξυπηρέτησης μόνο εφόσον του παρέχεται εξυπηρέτηση. Έτσι, έχουμε τη σχέση (8.16), που στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται

$$\Pr[I = 1] = \mathrm{E[I]} = E[Q_s] = \lambda E[B] = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho,$$

και επομένως $\Pr[I = 0] = 1-\rho$. Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη ιδιότητα PASTA (βλέπε θεώρημα 8.4) έχουμε ότι οι πιθανότητες αυτές είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες σε στιγμές αφίξεων πελατών, οπότε

$$\Pr[I^- = 0] = 1 - \rho, \tag{9.17}$$

$$\Pr[I^- = 1] = \rho, \tag{9.18}$$

Για την $E[S|I^- = 0]$, ας θεωρήσουμε έναν αφικνούμενο πελάτη που βρίσκει j πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του, δεδομένου ότι ο υπηρέτης δεν παρέχει εξυπηρέτηση, τότε αυτός θα πρέπει να περιμένει $K-j-1$ αφίξεις ώστε να μαζευτούν οι K πελάτες που απαιτούνται για την ενεργοποίηση του υπηρέτη. Λόγω του ότι ο μέσος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων είναι $\frac{1}{\lambda}$, ο μέσος χρόνος για την ενεργοποίηση του υπηρέτη είναι $(K - j - 1)\frac{1}{\lambda}$. Κατόπιν θα απαιτηθούν $j + 1$ ολόκληροι χρόνοι εξυπηρέτησης μέχρι να εξυπηρετηθεί ο αφικνούμενος πελάτης, οπότε ο μέσος απαιτούμενος χρόνος είναι $(j + 1)\frac{1}{\mu}$. Επομένως, έχουμε ότι

$$E[S|I^- = 0] = (K - E[Q^-|I^- = 0] - 1)\frac{1}{\lambda} + (E[Q^-|I^- = 0] + 1)\frac{1}{\mu}. \tag{9.19}$$

Για την $E[S|I^- = 1]$, έχουμε ότι

$$E[S|I^- = 1] = (E[Q^-|I^- = 1] + 1)\frac{1}{\mu}. \tag{9.20}$$

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει j πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του και τον υπηρέτη να παρέχει εξυπηρέτηση, θα μείνει στο σύστημα για $j+1$ χρόνους εξυπηρέτησης, έναν υπολειπόμενο και j ολόκληρους. Όμως, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται είναι σαν να ξεκινάει εκείνη τη στιγμή και άρα ο μέσος απαιτούμενος χρόνος παραμονής για την εξυπηρέτηση του αφικνούμενου πελάτη είναι $(j+1)\frac{1}{\mu}$.

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (9.17)-(9.20) στην (9.16) παίρνουμε

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K - E[Q^-|I^- = 0] - 1}{\lambda} + \frac{E[Q^-]+1}{\mu}. \tag{9.21}$$

Λόγω της PASTA έχουμε ότι $E[Q^-] = E[Q]$ και $E[Q^-|I^- = 0] = E[Q|I = 0]$. Για τον υπολογισμό της $E[Q|I = 0]$, έχουμε ότι αν παρατηρούμε το σύστημα μόνο στις περιόδους που ο υπηρέτης είναι ανενεργός $(I = 0)$ τότε το πλήθος των πελατών περνάει διαδοχικά από τις καταστάσεις $0,1,2,\dots,K-1,0,1,2,\dots,K-1,0,\dots$ και σε κάθε κατάσταση μένει για $\text{Exp}(\lambda)$ χρόνο. Επομένως, η δεσμευμένη κατανομή του πλήθους των πελατών, δεδομένου ότι $I = 0$ είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{0,1,2,\dots,K-1\}$, οπότε $E[Q|I = 0] = \frac{K-1}{2}$. Οπότε η (9.21) γίνεται

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K-1}{2\lambda} + \frac{E[Q]+1}{\mu}. \tag{9.22}$$

Λύνοντας το σύστημα των (9.15) και (9.23) για τις $E[Q]$ και $E[S]$ παίρνουμε

$$E[Q] = \frac{K-1}{2} + \frac{\rho}{1-\rho}, \; E[S] = \frac{K-1}{2\lambda} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{9.23}$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την M/G/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης με κάποια κατανομή $F_B(x)$. Συμβολίζουμε με B έναν γενικό χρόνο εξυπηρέτησης και θέτουμε $b = E[B]$, $b_2 = E[B^2]$, $\sigma_B^2 = Var[B]$ και $\rho = \lambda b$. Τι αλλάζει από την ανάλυση της αντίστοιχης M/M/1 ουρά με την K-πολιτική ενεργοποίησης; Οι εξισώσεις (9.15)-(9.18) εξακολουθούν να ισχύουν με την ίδια λογική που αναπτύξαμε παραπάνω, μόνο που τώρα $\rho = \lambda b$. Για την $E[S|I^- = 0]$, έχουμε με ακριβώς την ίδια συλλογιστική

$$E[S|I^- = 0] = (K - E[Q^-|I^- = 0] - 1)\frac{1}{\lambda} + (E[Q^-|I^- = 0] + 1)b. \tag{9.24}$$

Όμως, για την $E[S|I^- = 1]$, η συλλογιστική πρέπει να διαφοροποιηθεί λίγο, λόγω της έλλειψης της αμνήμονης ιδιότητας. Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$E[S|I^- = 1] = E[Q^-|I^- = 1]b + E[R|I^- = 1], \tag{9.25}$$

όπου R ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται. Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη PASTA, έχουμε ότι η κατανομή του R σε στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν τον υπηρέτη ενεργό ταυτίζεται με την κατανομή του R_B σε συνεχή χρόνο, όταν ο υπηρέτης είναι ενεργός. Όμως, όταν κοιτάμε το σύστημα σε περιόδους που ο υπηρέτης είναι ενεργός, οι χρόνοι αναχωρήσεων των πελατών γίνονται οι ενδιάμεσοι χρόνοι μιας ανανεωτικής διαδικασίας (αφού στο σύστημα εξυπηρετείται πάντα κάποιος πελάτης). Δηλαδή έχουμε την ίδια συλλογιστική που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση μέσης τιμής της M/G/1 ουράς. Επομένως, υπό τη δέσμευση $I = 1$, ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης R αντιστοιχεί στον οριακό υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης του συστήματος (βλέπε τα παραδείγματα 1.2 και 1.3, καθώς και την ενότητα 2.5). Επομένως, χρησιμοποιώντας την (1.3) ή την (2.2), έχουμε

$$E[R|I = 1] = E[R_B] = \frac{b_2}{2b} = \frac{b^2 + \sigma_B^2}{2b}, \tag{9.26}$$

όπου R_B συμβολίζει μια τυχαία μεταβλητή που έχει την κατανομή ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης.

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (9.17)-(9.18) και τις (9.24)-(9.26) στην (9.16) παίρνουμε

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K - E[Q^-|I^- = 0] - 1}{\lambda} + E[Q^-]b + (1-\rho)b + \rho E[R_B]. \tag{9.27}$$

Με τη συλλογιστική που έχουμε αναπτύξει και συνεχίζει να ισχύει με τους γενικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης έχουμε $E[Q^-] = E[Q]$ και $E[Q^-|I^- = 0] = E[Q|I = 0] = \frac{K-1}{2}$. Οπότε η (9.27) γίνεται

$$E[S] = (1-\rho)\frac{K-1}{2\lambda} + E[Q]b + (1-\rho)b + \rho E[R_B]. \tag{9.28}$$

Λύνοντας το σύστημα των (9.15) και (9.28) για τις $E[Q]$ και $E[S]$ παίρνουμε

$$E[Q] = \frac{K-1}{2} + \rho + \frac{\rho}{1-\rho}\lambda E[R_B],\ E[S] = \frac{K-1}{2\lambda} + b + \frac{\rho}{1-\rho}E[R_B]. \tag{9.29}$$

9.2 Απλές Μαρκοβιανές ουρές

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις πλέον απλές ουρές, στις οποίες ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης-θανάτου, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή το σύστημα όντας σε μια κατάσταση n μπορεί να μεταβεί μόνο στην $n+1$ (λόγω άφιξης πελάτη) ή στην $n-1$ λόγω αναχώρησης. Παρόλο που η μελέτη αυτών των συστημάτων είναι πολύ απλή, η θέση τους στη Θεωρία Ουρών είναι πολύ σημαντική δεδομένης της μεγάλης εφαρμοσιμότητάς τους.

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης αναφέρεται ως απλή Μαρκοβιανή ουρά αν η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης θανάτου με ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu_i & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας τέτοιας διαδικασίας δίνεται στο σχήμα 3.5. Σε ένα τέτοιο σύστημα οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμένα. Οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων είναι λ_j και μ_j αντίστοιχα, όταν υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα.

Από τη συζήτηση στο τέλος της παραγράφου 3.3, έχουμε δει ότι το σύστημα είναι ευσταθές, δηλαδή υπάρχει στάσιμη κατανομή, αν και μόνο αν

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n = 0, \\ B\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} & \text{αν } n \geq 1. \end{cases} \tag{9.30}$$

Βεβαίως, αν $\lambda_k = 0$ για κάποιο k, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα απορροφάται στο πεπερασμένο σύνολο $\{0, 1, \dots, k\}$ (για τον μικρότερο τέτοιο k) και στο σύνολο αυτό η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική. Επομένως, απλές Μαρκοβιανές ουρές με πεπερασμένη χωρητικότητα είναι πάντα ευσταθείς.

9.3 Ο ρυθμός διαπέρασης και οι εμφυτευμένες κατανομές

Ως ρυθμό διαπέρασης (throughput) μ^* ενός συστήματος εξυπηρέτησης εννοούμε τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό εξυπηρετούμενων πελατών ανά χρονική μονάδα. Η ποσότητα αυτή έχει αποδοθεί με πολλούς διαφορετικούς όρους στα ελληνικά, όπως ρυθμός διαμεταγωγής, ρυθμός διακίνησης και ρυθμαπόδοση ενός συστήματος. Ο ρυθμός αυτός, στην περίπτωση που εξυπηρετούνται όλοι οι πελάτες που εισέρχονται (δηλαδή δεν συμβαίνουν υπαναχωρήσεις πελατών), ισούται με τον μακροπρόθεσμο ρυθμό εισερχομένων πελατών ανά χρονική μονάδα λ^*. Για έναν διαισθητικό υπολογισμό του λ^* μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Έστω $A(t, t+h)$ και $D(t, t+h)$ τα πλήθη αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα σε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά στο διάστημα $(t, t+h]$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{E[A(t,t+h)]}{h} = \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{\Pr[A(t,t+h)=1]+o(h)}{h}\\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pr[Q(t)=n]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=n]}{h}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n\lambda_n.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει καθώς η πιθανότητα για δύο αφίξεις στο $(t, t+h]$ είναι $o(h)$ για $h \to 0^+$. Ομοίως, έχουμε

$$\mu^* = \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{E[D(t,t+h)]}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n.$$

Για την αυστηρή αιτιολόγηση αυτών των σχέσεων, αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.9 για τον υπολογισμό του μακροπρόθεσμου ρυθμού κόστους. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι έχουμε κόστος 1 χρηματική μονάδα για κάθε μετάβαση τύπου $n \to n+1$, δηλαδή για κάθε άφιξη, έχουμε τη δομή κόστους με κόστη παραμονής $c_j = 0$ για $j \geq 0$ και κόστη μετάβασης $d_{jk} = 1$ για $j \geq 0$ και $k = j+1$ και $d_{jk} = 0$, διαφορετικά. Οπότε το θεώρημα 3.9 δίνει

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j\in\mathscr{S}} p_j c_j + \sum_{j\in\mathscr{S}}\sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d_{jk}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_j q_{j,j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j\lambda_j.
\end{aligned}$$

Ομοίως, θεωρώντας ότι έχουμε κόστος 1 χρηματική μονάδα για κάθε μετάβαση τύπου $n \to n-1$, δηλαδή για κάθε αναχώρηση, συνάγουμε την έκφραση για τον μ^*. Ισχύει, όπως είπαμε $\lambda^* = \mu^*$, που μπορεί να αποδειχθεί και αλγεβρικά αθροίζοντας τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας $\lambda_{n-1}p_{n-1} = \mu_n p_n$, για όλες τις καταστάσεις $n \geq 1$.

Οι οριακές κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων μπορούν να βρεθούν αν σκεφτούμε διαισθητικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
a_j &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\Pr[Q(t)=j|A(t,t+h)=1]\\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{\Pr[Q(t)=j, A(t,t+h)=1]}{\Pr[A(t,t+h)=1]}\\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{\Pr[Q(t)=j]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=j]}{\Pr[A(t,t+h)=1]}\\
&= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+}\frac{\Pr[Q(t)=j]\Pr[A(t,t+h)=1|Q(t)=j]/h}{\Pr[A(t,t+h)=1]/h}\\
&= \frac{p_j\lambda_j}{\lambda^*},
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\begin{aligned} d_j &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t+h)=j|D(t,t+h)=1] \\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t+h)=j, D(t,t+h)=1]}{\Pr[D(t,t+h)=1]} \\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j+1]\Pr[D(t,t+h)=1|Q(t)=j+1]}{\Pr[D(t,t+h)=1]} \\ &= \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=j+1]\Pr[D(t,t+h)=1|Q(t)=j+1]/h}{\Pr[D(t,t+h)=1]/h} \\ &= \frac{p_{j+1}\mu_{j+1}}{\mu^*}. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την αναγεννητικότητα του συστήματος, όταν είναι ευσταθές, έχουμε ότι η πιθανότητα a_j ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό των αφίξεων που βλέπουν j πελάτες, το οποίο ισούται με τον λόγο του ρυθμού των αφίξεων που βλέπουν j πελάτες προς τον συνολικό ρυθμό των αφίξεων, οπότε έχουμε άμεσα τη σχέση $a_j = p_j\lambda_j/\lambda^*$. Και, ομοίως, η πιθανότητα d_j είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό των αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες, το οποίο ισούται με τον λόγο του ρυθμού των αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες προς τον συνολικό ρυθμό των αναχωρήσεων. Έτσι παίρνουμε ότι $d_j = p_{j+1}\mu_{j+1}/\mu^*$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στην περίπτωση των απλών Μαρκοβιανών ουρών η ιδιότητα των μεμονωμένων αφίξεων και η ιδιότητα PASTA προκύπτουν άμεσα. Πράγματι οι εξισώσεις ισορροπίας δίνουν $\lambda_j p_j = \mu_{j+1}p_{j+1}$ για κάθε $j \geq 0$, οπότε $\lambda^* = \mu^*$ και $a_j = d_j$, για κάθε $j \geq 0$. Επίσης, όταν η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson έχουμε $\lambda_j = \lambda$, για κάθε $j \geq 0$, οπότε έχουμε $\lambda^* = \lambda$ και $a_j = \frac{p_j\lambda_j}{\lambda^*} = \frac{p_j\lambda}{\lambda} = p_j$, για $j \geq 0$.

9.4 Η M/M/1/1 ουρά

Η M/M/1/1 ουρά χρησιμοποιήθηκε ως το μοντέλο μιας τηλεφωνικής γραμμής που μπορεί να είναι ελεύθερη ή κατειλημμένη (θεωρώντας ότι δεν υπάρχει δυνατότητα κράτησης μιας κλήσης σε αναμονή). Η βασική μελέτη της μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την τεχνική της ανάλυσης μέσης τιμής, όπως είδαμε στην ενότητα 9.1.1. Εδώ θα τη μελετήσουμε, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου.

Αν ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού, τότε έχουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0,1\}$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i=0,\ j=1, \\ \mu & \text{αν } i=1,\ j=0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 3.3. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1, \\ \mu p_1 &= \lambda p_0, \end{aligned}$$

ενώ η εξίσωση κανονικοποίησης δίνει

$$p_0 + p_1 = 1.$$

Παρατηρήστε ότι η μία εξίσωση ισορροπίας είναι περιττή και μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό ισχύει πάντα, και μία από τις εξισώσεις ισορροπίας μπορεί να παραλειφθεί αφού προκύπτει από τις υπόλοιπες (με άθροισή τους).

Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1+\rho}, \\ p_1 &= \frac{\rho}{1+\rho}. \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της ιδιότητας PASTA έχουμε

$$d_0 = a_0 = p_0 = \frac{1}{1+\rho}, \; d_1 = a_1 = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Το ποσοστό των χαμένων πελατών, δηλαδή των πελατών που τελικά δεν εξυπηρετούνται, είναι το ποσοστό των πελατών που βρίσκουν έναν πελάτη κατά την άφιξή τους, δηλαδή δίνεται από την πιθανότητα a_1.

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q] = 0p_0 + 1p_1 = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little έχουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα είναι

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1+\rho)}.$$

Αυτός ο μέσος χρόνος αναφέρεται σε όλους τους πελάτες που φθάνουν στο σύστημα. Ο υπολογισμός του θα μπορούσε να γίνει και ως εξής:

$$E[S] = a_0 \frac{1}{\mu} + a_1 \cdot 0 = \frac{1}{\mu(1+\rho)},$$

δηλαδή δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει ένας αφικνούμενος πελάτης. Αν μας ενδιέφερε ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα, που προφανώς είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησής του, ο νόμος του Little δίνει και πάλι το σωστό αποτέλεσμα, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε όχι τον συνολικό ρυθμό αφίξεων λ, αλλά τον ρυθμό εισερχομένων πελατών $\lambda^* = \lambda a_0$. Πράγματι θα είχαμε

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{1}{\mu}.$$

Για την κατανομή του χρόνου παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη έχουμε

$$F_S(x) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-\mu x}\right), \quad x \geq 0,$$

αφού ο χρόνος παραμονής είναι 0 με πιθανότητα a_1 και ίσος με τον χρόνο εξυπηρέτησής του που ακολουθεί την $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή με πιθανότητα $1 - a_1$. Η κατανομή του χρόνου παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη είναι η $\text{Exp}(\mu)$, αφού στην περίπτωση αυτή ο χρόνος παραμονής είναι ακριβώς ο χρόνος εξυπηρέτησης του συγκεκριμένου πελάτη.

Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η μέση περίοδος αργίας είναι $E[I] = \frac{1}{\lambda}$, αφού η περίοδος αργίας I ακολουθεί την $\text{Exp}(\lambda)$, ενώ η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι $E[Y] = \frac{1}{\mu}$, αφού η Y ακολουθεί την $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή. Ο μέσος κύκλος απασχόλησης είναι $E[Z] = E[I] + E[Y] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$.

9.5 Η M/M/1 ουρά και οι παραλλαγές της

Η $M/M/1$ ουρά είναι το απλούστερο μοντέλο συστήματος εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής. Η βασική μελέτη της μπορεί να γίνει με την τεχνική της ανάλυσης μέσης τιμής, όπως περιγράψαμε στην ενότητα 9.1.2. Θα προχωρήσουμε, τώρα, σε μια πληρέστερη μελέτη της, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από τις Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου.

Αν ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού, τότε συνάγουμε εύκολα ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 3.4. Χρησιμοποιώντας τη γενική θεωρία των διαδικασιών γέννησης-θανάτου, έχουμε

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & \text{αν } \rho < 1 \text{ (ευστάθεια)} \\ \infty & \text{αν } \rho \geq 1 \text{ (αστάθεια).} \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε, για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών, όταν $\rho < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_n &= \begin{cases} B & \text{αν } n = 0 \\ B\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} & \text{αν } n \geq 1 \end{cases} \\ &= (1-\rho)\rho^n,\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια η οριακή κατανομή (p_n) είναι $\mathrm{Geom}(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$. Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο. Για τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα έχουμε

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Από τον νόμο του Little, έχουμε για τον μέσο χρόνο παραμονής:

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}. \tag{9.31}$$

Όσον αφορά την κατανομή $F_S(x)$ του χρόνου παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, ο υπολογισμός γίνεται με δέσμευση στον αριθμό των πελατών που βρίσκει ο πελάτης κατά την άφιξή του, Q^-. Συγκεκριμένα, αν ο πελάτης βρει $Q^- = n$ πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή του, τότε θα περιμένει συνολικά όσο το άθροισμα $n+1$ χρόνων εξυπηρέτησης, δηλαδή έναν χρόνο που έχει την $\mathrm{Erlang}(n+1,\mu)$ κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{\mu^{n+1}}{n!}x^n e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr[S \le x] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] \Pr[S \le x | Q^- = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^x \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du \\ &= \int_0^x \mu(1-\rho)e^{-\mu u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu\rho u)^n}{n!} du \\ &= \int_0^x \mu(1-\rho)e^{-\mu u} e^{\mu\rho u} du = \int_0^x \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)u} du. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Επομένως, βλέπουμε ότι η S είναι στην περίπτωση αυτή συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x}$, για $x \ge 0$. Επομένως, έχουμε ότι η S ακολουθεί την $\text{Exp}(\mu(1-\rho))$ κατανομή.

Εναλλακτικά, ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει μέσω του αντίστοιχου μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes. Μάλιστα, αυτή η μέθοδος πλεονεκτεί καθώς δεν χρειάζεται υπολογισμούς ολοκληρωμάτων, παρά μόνο αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και επομένως θα πρέπει εν γένει να προτιμάται για τους υπολογισμούς σε πιο πολύπλοκα συστήματα. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{F}_S(s) &= E[e^{-sS}] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] E[e^{-sS} | Q^- = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s}\left(1 - \frac{\rho\mu}{\mu+s}\right)^{-1} \\ &= \frac{(1-\rho)\mu}{(1-\rho)\mu + s}, \end{aligned} \tag{9.33}$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα PASTA, ενώ για την τέταρτη απαιτείται η σύγκλιση της σειράς που εξασφαλίζεται καθώς για s με $Re(s) \ge 0$ και $\rho < 1$ έχουμε $\left|\frac{\rho\mu}{\mu+s}\right| < 1$. Ο τελευταίος είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $\text{Exp}(\mu(1-\rho))$, οπότε συνάγουμε και πάλι ότι η S ακολουθεί την $\text{Exp}(\mu(1-\rho))$ κατανομή.

Όσον αφορά την εύρεση των μέσων τιμών που αφορούν τον κύκλο απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η περίοδος αργίας I είναι $\text{Exp}(\lambda)$, αφού ταυτίζεται με τον υπολειπόμενο ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων κατά τη στιγμή της αναχώρησης ενός πελάτη που αφήνει κενό το σύστημα (χρησιμοποιείται κι εδώ η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής). Οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, λόγω του αναγεννητικού χαρακτήρα του συστήματος, έχουμε ότι η οριακή πιθανότητα κενού συστήματος που ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, ισούται επίσης με τον λόγο του μέσου χρόνου που το σύστημα είναι κενό σε έναν αναγεννητικό κύκλο προς τη μέση διάρκεια του κύκλου (βλέπε θεώρημα 1.12 και ειδικότερα τη σχέση (8.2)). Ένας αναγεννητικός κύκλος στην περίπτωση του συστήματος αυτού είναι ένας κύκλος απασχόλησης και στη διάρκειά του το σύστημα είναι κενό μόνο κατά την αντίστοιχη περίοδο αργίας. Επομένως

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]},$$

όπου $E[Z]$ η μέση διάρκεια ενός κύκλου απασχόλησης. Οπότε

$$E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}.$$

Η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας θα είναι

$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

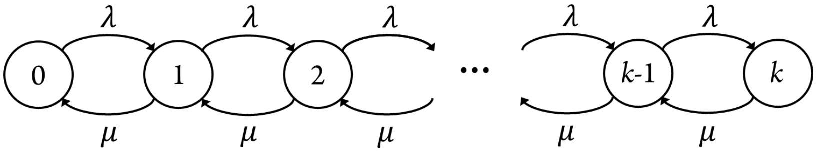
Έχοντας δει την ανάλυση της M/M/1 ουράς, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε κάποιες ενδιαφέρουσες τροποποιήσεις της που εμφανίζονται στις εφαρμογές.

9.5.1 Η M/M/1/k ουρά

Θεωρούμε την $M/M/1/k$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ και χωρητικότητα k. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, 1, \dots, k\}$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } 0 \le i \le k-1,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } 1 \le i \le k,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 9.1.



Σχήμα 9.1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης $M/M/1/k$ ουράς.

Επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος, το σύστημα είναι πάντα ευσταθές και έχουμε

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{k} \rho^n \\ &= \begin{cases} \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} & \text{αν } \rho \neq 1, \\ k+1 & \text{αν } \rho = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε, για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } 0 \le n \le k,\ \rho \neq 1, \\ \frac{1}{k+1} & \text{αν } 0 \le n \le k,\ \rho = 1. \end{cases}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο. Ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος που αναφέρεται στους τελικά εισερχόμενους πελάτες στο σύστημα είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda p_n = \lambda(1-p_k) = \begin{cases} \frac{\lambda(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } \rho \neq 1, \\ \frac{\lambda k}{k+1} & \text{αν } \rho = 1. \end{cases} \tag{9.34}$$

Οπότε, αν ενδιαφερόμαστε για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε στιγμές «πραγματικών αφίξεων», δηλαδή σε στιγμές εισόδων πελατών έχουμε

$$\begin{aligned} a_n^{enter} &= \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} \\ &= \begin{cases} \frac{p_n}{1-p_k} & \text{αν } 0 \le n \le k-1, \\ 0 & \text{αν } n = k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^k} & \text{αν } 0 \le n \le k-1, \quad \rho \neq 1, \\ \frac{1}{k} & \text{αν } 0 \le n \le k-1, \quad \rho = 1, \\ 0 & \text{αν } n = k, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή η PASTA δεν είναι εφαρμόσιμη. Ουσιαστικά, έχουμε ότι η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων στην $M/M/1/k$ ουρά ταυτίζεται με την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο στην $M/M/1/k-1$ ουρά.

Για τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned} E[Q] &= \sum_{n=0}^{k} n p_n \\ &= \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{k\rho^{k+1}-(k+1)\rho^k+1}{1-\rho^{k+1}} & \text{αν } \rho \neq 1, \\ \frac{k}{2} & \text{αν } \rho = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.35}$$

Από τον νόμο του Little έχουμε για τον μέσο χρόνο παραμονής που αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι):

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda}.$$

Όμως, αν μας ενδιαφέρει ο μέσος χρόνος παραμονής μόνο των πελατών που εισέρχονται, έχουμε

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*}.$$

Το (μακροπρόθεσμο) ποσοστό των χαμένων πελατών βρίσκεται ως

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda(1-p_k)}{\lambda} = p_k.$$

Εναλλακτικά, το ποσοστό των χαμένων πελατών ισούται με την οριακή πιθανότητα ένας πελάτης να βρει το σύστημα πλήρες και να αναγκαστεί να φύγει, είναι δηλαδή ίσο με a_k. Οπότε, λόγω της ιδιότητας PASTA, συνάγουμε ότι είναι ίσο με p_k.

Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, έχουμε ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επιπλέον, λόγω του αναγεννητικού χαρακτήρα του συστήματος, έχουμε ότι η πιθανότητα κενού συστήματος που ισούται με το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (θεώρημα 1.11). Ένας αναγεννητικός κύκλος στην περίπτωση του συστήματος αυτού είναι ένας κύκλος απασχόλησης και στη διάρκειά του το σύστημα είναι κενό μόνο κατά την αντίστοιχη περίοδο αργίας. Επομένως

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]},$$

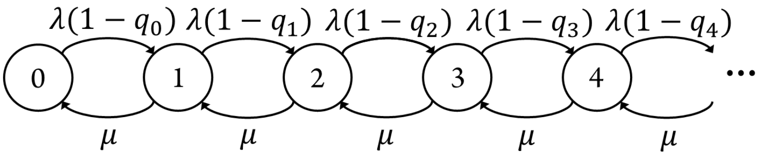
όπου $E[Z]$ η μέση διάρκεια ενός κύκλου απασχόλησης. Οπότε, ισχύει ακριβώς η ίδια λογική προσδιορισμού που περιγράφηκε για την $M/M/1$ ουρά. Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς $E[Z]$, αφού τα $E[I]$ και p_0 έχουν προσδιοριστεί και κατόπιν προσδιορίζουμε και τη μέση περίοδο συνεχούς λειτουργίας από τη σχέση $E[Y] = E[Z] - E[I]$.

9.5.2 Η M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες

Θεωρούμε, τώρα, την M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, όπου υποθέτουμε ότι οι πελάτες μπορεί να αποθαρρυνθούν να μπουν στο σύστημα, αφού παρατηρήσουν τον υπάρχοντα συνωστισμό σε αυτό. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n πελάτες φεύγει (balks) με πιθανότητα q_n. Ισοδύναμα, το ποσοστό των πελατών που αναχωρούν άμεσα επί αυτών που βρίσκουν το σύστημα με n πελάτες είναι q_n. Και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda(1-q_i) & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 9.2.



Σχήμα 9.2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/1 ουράς με αποθαρρυνόμενους πελάτες.

Στα πραγματικά συστήματα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η q_i είναι αύξουσα ως προς i και ότι τείνει στο 1, καθώς το i τείνει στο άπειρο. Το προηγούμενο σύστημα της M/M/1/k ουράς μπορεί να θεωρηθεί μια ειδική περίπτωση της M/M/1 ουράς με αποθαρρυνόμενους πελάτες, αφού εμπίπτει σε αυτήν την κατηγορία (με $q_i = 0$ για $0 \leq i \leq k-1$ και $q_i = 1$ για $i \geq k$). Εδώ θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $q_i = \frac{i}{i+1}$ που δίνει κομψά αποτελέσματα. Έχουμε

$$B^{-1} \quad = \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty,$$

δηλαδή το συγκεκριμένο σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Οπότε για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n \quad = \quad e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!},\ n \geq 0,$$

δηλαδή η (p_n) είναι Poisson(ρ). Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο. Αυτό βέβαια ισχύει όταν αναφερόμαστε σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες, είτε μπαίνουν είτε όχι στο σύστημα. Ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος που αναφέρεται στους τελικά εισερχόμενους πελάτες στο σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \lambda^* \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \quad \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho}(e^{\rho} - 1) = \mu(1 - e^{-\rho}). \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει αν σκεφτόμαστε με εξυπηρετήσεις:

$$\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_n = \mu(1 - p_0) = \mu(1 - e^{-\rho}).$$

Αν ενδιαφερόμαστε για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε στιγμές «πραγματικών αφίξεων», δηλαδή σε στιγμές εισόδων πελατών έχουμε

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}, \ n \geq 0,$$

δηλαδή η PASTA δεν είναι εφαρμόσιμη. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q] = \rho$. Από τον νόμο του Little έχουμε για τον μέσο χρόνο παραμονής που αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι) ότι $E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$. Αυτό μοιάζει κάπως παράδοξο, αφού ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\frac{1}{\mu}$. Όμως, δεν είναι παράδοξο αφού η μέση τιμή του χρόνου παραμονής αναφέρεται σε όλους τους αφικνούμενους πελάτες, οπότε κάποιοι από αυτούς (αυτοί που φεύγουν αμέσως) έχουν μηδενικό χρόνο παραμονής. Αν μας ενδιαφέρει ο μέσος χρόνος παραμονής μόνο των πελατών που εισέρχονται, έχουμε

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{\rho}{\mu(1-e^{-\rho})}.$$

Το ποσοστό των χαμένων πελατών βρίσκεται ως

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{\mu(1-e^{-\rho})}{\lambda} = 1 - \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}.$$

Εναλλακτικά, το ποσοστό των χαμένων πελατών μπορεί να υπολογιστεί ως η πιθανότητα ένας πελάτης να αποχωρήσει από το σύστημα μόλις αφιχθεί σε αυτό. Οπότε, δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει φθάνοντας έχουμε ότι είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n q_n &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= 1 - \frac{e^{-\rho}}{\rho}(e^{\rho} - 1) = 1 - \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}.
\end{aligned}$$

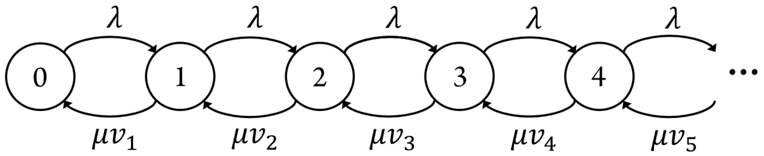
Όσον αφορά τη μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, αυτή μπορεί να γίνει όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, δηλαδή να ξεκινήσουμε με το ότι η περίοδος αργίας I ακολουθεί την κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$ και κατόπιν να λύσουμε ως προς τον μέσο κύκλο απασχόλησης τη σχέση $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$, αφού το p_0 έχει ήδη υπολογιστεί. Τέλος, η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας βρίσκεται από τη σχέση $E[Y] = E[Z] - E[I]$.

9.5.3 Η M/M/1 ουρά με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

Θεωρούμε, τώρα, την M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ και ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, όπου υποθέτουμε ότι ο υπηρέτης δουλεύει με ταχύτητα v_n όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι αν ένας ονομαστικός χρόνος εξυπηρέτησης X διανύεται ενώ στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες, τότε η αντίστοιχη πραγματική διάρκεια της εξυπηρέτησης είναι X/v_n, δηλαδή η πραγματική διάρκεια εξυπηρέτησης είναι στην περίπτωση αυτή $\text{Exp}(\mu v_n)$ (λόγω του ότι αν μια τυχαία μεταβλητη ακολουθεί κατανομή $\text{Exp}(\mu)$ και α είναι ένας θετικός αριθμός, τότε η τυχαία μεταβλητή αX ακολουθεί την κατανομή $\text{Exp}(\mu/\alpha)$). Συνεπώς, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μv_n στην κατάσταση n. Σε αυτήν την περίπτωση η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι διαδικασία τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0, \ j = i+1, \\ \mu v_i & \text{αν } i \geq 1, \ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 9.3.



Σχήμα 9.3: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/1 ουράς με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης.

Στα πραγματικά συστήματα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η v_i είναι αύξουσα ως προς i. Εδώ θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $v_i = i$ που δίνει κομψά αποτελέσματα. Έχουμε

$$B^{-1} \quad = \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty,$$

δηλαδή το συγκεκριμένο σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Οπότε για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών έχουμε

$$p_n \quad = \quad e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \; n \geq 0,$$

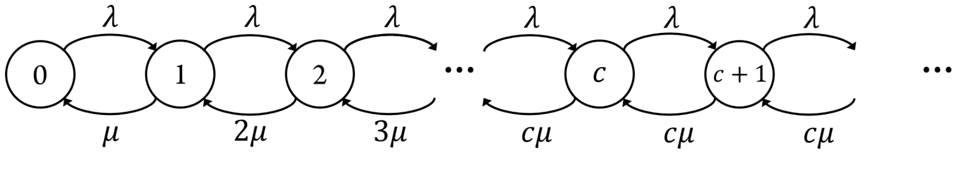
δηλαδή η (p_n) είναι Poisson(ρ). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών συμπίπτει με την αντίστοιχη κατανομή για το σύστημα με αποθαρρυνόμενους πελάτες που μελετήσαμε πρωτύτερα, στην ενότητα 9.5.2, καίτοι τα δυο συστήματα είναι πολύ διαφορετικά. Η PASTA είναι εδώ εφαρμόσιμη, όπως και η ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων, οπότε οι κατανομές ισορροπίας των αριθμών των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο: $p_n = a_n = d_n$, $n \geq 0$. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι $E[Q] = \rho$. Από τον νόμο του Little έχουμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα $E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$. Τέλος, η μελέτη του κύκλου απασχόλησης του συστήματος μπορεί να γίνει όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα.

9.6 Η M/M/c ουρά

Θεωρούμε την M/M/c ουρά, με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ, ρυθμό συνωστισμού $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, c υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ \min(i,c)\mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 9.4.



Σχήμα 9.4: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/c ουράς.

Εδώ έχουμε

$$
\begin{aligned}
B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \\
&= \begin{cases} \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{\rho - c} & \text{αν } \rho < c \text{ (ευστάθεια)}, \\ \infty & \text{αν } \rho \geq c \text{ (αστάθεια)}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Οπότε, για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών, όταν το σύστημα είναι ευσταθές, έχουμε

$$
p_n = \begin{cases} B \frac{\rho^n}{n!} & \text{αν } 0 \leq n \leq c, \\ B \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} & \text{αν } n \geq c+1. \end{cases}
$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο.

Η πιθανότητα να καθυστερήσει ένας πελάτης και να περιμένει κάποιον χρόνο για την έναρξη της εξυπηρέτησής του είναι

$$
C(c, \rho) = \sum_{n=c}^{\infty} a_n = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \Pr[Q \geq c] = B \frac{\rho^c}{c!} \frac{c}{c - \rho}, \tag{9.36}
$$

η οποία αναφέρεται και ως τύπος καθυστερήσεων του Erlang ή τύπος Erlang C (Erlang C formula).

Η κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών στον χώρο αναμονής, δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες είναι απασχολημένοι βρίσκεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\Pr[Q_q = n | Q \geq c] &= \Pr[Q = n + c | Q \geq c] = \frac{B \frac{\rho^{c+n}}{c! c^n}}{\sum_{m=c}^{\infty} B \frac{\rho^m}{c! c^{m-c}}} \\
&= \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{\rho}{c}\right)^n, \; n \geq 0,
\end{aligned}
$$

δηλαδή, η δεσμευμένη κατανομή της Q_q, δοθέντος ότι $Q \geq c$ (συμβολικά $(Q_q | Q \geq c)$), ακολουθεί την $\text{Geom}(\rho/c)$ στο $\mathbb{N}_0$. Οπότε, έχουμε και ότι $E[Q_q | Q \geq c] = \frac{\rho/c}{1-\rho/c}$. Ο μέσος αριθμός πελατών στον χώρο αναμονής μπορεί τώρα να βρεθεί εύκολα ως εξής:

$$
\begin{aligned}
E[Q_q] &= \Pr[Q < c] E[Q_q | Q < c] + \Pr[Q \geq c] E[Q_q | Q \geq c] \\
&= \Pr[Q < c] \cdot 0 + \Pr[Q \geq c] \cdot \frac{\rho/c}{1 - \rho/c} \\
&= B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}.
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Little στον χώρο αναμονής παίρνουμε τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη που είναι

$$
E[W] = \frac{E[Q_q]}{\lambda} = B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} \frac{1}{\mu}.
$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής είναι

$$
E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \left(B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1\right) \frac{1}{\mu}, \tag{9.37}
$$

οπότε εφαρμόζοντας και πάλι τον νόμο του Little παίρνουμε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα

$$
E[Q] = \lambda E[S] = B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho.
$$

Αν ενδιαφερόμαστε για την κατανομή του χρόνου παραμονής S ενός πελάτη στο σύστημα, είναι βολικότερο για το συγκεκριμένο σύστημα να προσδιορίσουμε πρώτα την κατανομή του χρόνου αναμονής W. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει εντελώς ανάλογα με τον αντίστοιχο υπολογισμό για τον χρόνο παραμονής πελάτη στην M/M/1 ουρά, είτε εστιάζοντας στη συνάρτηση κατανομής είτε στον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes (βλέπε στην ενότητα 9.5 τους υπολογισμούς (9.32) και (9.33) αντίστοιχα). Για οικονομία θα παρουσιάσουμε τον υπολογισμό μόνο μέσω μετασχηματισμών Laplace-Stieltjes.

Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_W(s)$ του χρόνου αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα βρίσκεται εύκολα δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βρίσκει ο πελάτης κατά την άφιξή του σε αυτό. Αν ο πελάτης βρει λιγότερους από c πελάτες στο σύστημα, τότε ο χρόνος αναμονής του είναι μηδενικός. Αν βρεί $n \geq c$ πελάτες, τότε θα περιμένει να γίνουν $n+1-c$ αναχωρήσεις για να αρχίσει να εξυπηρετείται από κάποιον ελεύθερο υπηρέτη. Οι χρόνοι μεταξύ αυτών των εξυπηρετήσεων είναι $\text{Exp}(c\mu)$, αφού καθένας τους αντιστοιχεί στον ελάχιστο από τους c ανεξάρτητους $\text{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης που τρέχουν παράλληλα. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_W(s) &= E[e^{-sW}] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^- = n] E[e^{-sW} | Q^- = n] \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} \Pr[Q^- = n] \cdot 1 + \sum_{n=c}^{\infty} \Pr[Q^- = n] \cdot \left(\frac{c\mu}{s + c\mu}\right)^{n+1-c} \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} B \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} B \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \left(\frac{c\mu}{s + c\mu}\right)^{n+1-c} \\
&= \sum_{n=0}^{c-1} B \frac{\rho^n}{n!} + B \frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \cdot \frac{c\mu - \lambda}{s + c\mu - \lambda} \\
&= \Pr[Q < c] \cdot 1 + \Pr[Q \geq c] \frac{c\mu - \lambda}{s + c\mu - \lambda}.
\end{aligned}$$

Στους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα PASTA, ενώ η σύγκλιση της σειράς εξασφαλίζεται αφού για s με $Re(s) \geq 0$ και $\rho < c$ έχουμε $\left|\frac{c\rho\mu}{\mu+s}\right| < 1$. Αυτή η μορφή του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes δείχνει ότι η τυχαία μεταβλητή W είναι μεικτή και παίρνει την τιμή 0 με πιθανότητα $\Pr[Q < c]$, ενώ ακολουθεί την $\text{Exp}(c\mu - \lambda)$ κατανομή με πιθανότητα $\Pr[Q \geq c]$. Για τον μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes του χρόνου παραμονής S θα έχουμε $\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_W(s)\frac{\mu}{s+\mu}$, καθώς $S = W + B$, με W, B ανεξάρτητες και ο χρόνος εξυπηρέτησης B έχει την $\text{Exp}(\mu)$ κατανομή.

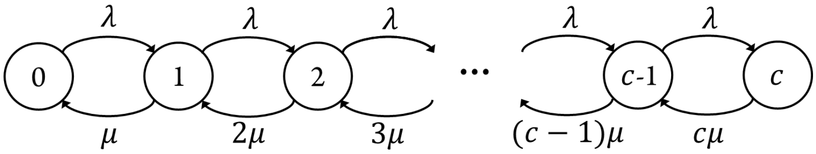
Όσον αφορά τον προσδιορισμό του μέσου κύκλου απασχόλησης του συστήματος $E[Z]$, έχουμε καταρχήν ότι η περίοδος αργίας I έχει την $\text{Exp}(\lambda)$ κατανομή, οπότε $E[I] = \frac{1}{\lambda}$. Επίσης, έχουμε $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$, οπότε $E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda B}$. Τέλος, η μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας είναι $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda B} - \frac{1}{\lambda}$.

9.7 Η M/M/*c*/*c* ουρά

Αν στο μοντέλο της M/M/c ουράς της παραγράφου 9.6 δεν υπάρχει χώρος αναμονής για τους πελάτες που δεν μπορούν να αρχίσουν να εξυπηρετούνται άμεσα, τότε έχουμε την M/M/c/c ουρά, που είναι γνωστή και ως το μοντέλο απωλειών του Erlang (Erlang loss model). Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι διαδικασία τύπου γέννησης-θανάτου με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, \ldots, c\}$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } 0 \leq i \leq c-1,\ j = i+1, \\ i\mu & \text{αν } 1 \leq i \leq c,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη διαδικασία $\{Q(t)\}$ δίνεται στο σχήμα 9.5.



Σχήμα 9.5: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης M/M/c/c ουράς.

Θέτοντας $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, έχουμε

$$B^{-1} \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!},$$

και η κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών είναι

$$p_n \;=\; \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{m=0}^{c} \frac{\rho^m}{m!}}, \quad 0 \le n \le c. \tag{9.38}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο, εφόσον αναφερόμαστε σε όλους τους πελάτες και όχι μόνο στους πραγματικά εισερχόμενους.

Επομένως η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης αφού θα βρει όλους τους υπηρέτες κατειλημμένους είναι

$$B(c,\rho) = a_c = p_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{m=0}^{c} \frac{\rho^m}{m!}}, \tag{9.39}$$

η οποία αναφέρεται και ως τύπος απωλειών του Erlang ή Erlang B (Erlang B formula).

Το ενδιαφέρον είναι ότι ο τύπος των απωλειών του Erlang (9.39) και γενικότερα ο τύπος για την κατανομή ισορροπίας (9.38) ισχύει και για το αντίστοιχο M/G/c/c σύστημα, με $\rho = \lambda E[B]$, όπου B ένας τυπικός χρόνος εξυπηρέτησης με γενική κατανομή. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται ως ιδιότητα της μη-ευαισθησίας (insensitivity property) του M/G/c/c συστήματος, εννοώντας ότι η κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα εξαρτάται μόνο από τους ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων και δεν επηρεάζεται από τη μορφή της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης. Ελάχιστα συστήματα έχουν την ιδιότητα της μη-ευαισθησίας. Όμως, όποτε αυτή υπάρχει, διευκολύνει την εφαρμογή των θεωρητικών αποτελεσμάτων, αφού αρκεί η εκτίμηση μόνο του ρυθμού εξυπηρέτησης και δεν χρειάζεται εκτίμηση της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης.

9.8 Η M/M/∞ ουρά

Η M/M/∞ ουρά είναι το μοντέλο με απεριόριστη χωρητικότητα και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου κάθε πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται με την άφιξή του στο σύστημα. Είναι η οριακή περίπτωση των μοντέλων M/M/c και M/M/c/c που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες όταν $c \to \infty$. Είναι κατάλληλο μοντέλο για συστήματα στα οποία κάθε πελάτης αυτο-εξυπηρετείται και απλά χρειάζεται κάποιον πόρο του συστήματος εξυπηρέτησης που υπάρχει σε αφθονία (και επομένως ο αριθμός των παρόντων πελατών δεν επηρεάζει τον συγκεκριμένο πελάτη). Έστω, ένα τέτοιο σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ, ρυθμό εξυπηρέτησης μ και έστω $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ο ρυθμός συνωστισμού του. Η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι και εδώ Μαρκοβιανή αλυσίδα τύπου γέννησης-θανάτου με χώρο καταστάσεων

$\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς μετάβασης

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{αν } i \geq 0,\ j = i+1, \\ i\mu & \text{αν } i \geq 1,\ j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εδώ έχουμε

$$B^{-1} \quad = \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty.$$

Οπότε, για την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών, όταν το σύστημα είναι ευσταθές, έχουμε

$$p_n \quad = \quad e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n \geq 0. \tag{9.40}$$

Λόγω της ιδιότητας των μεμονωμένων μεταβάσεων και της PASTA, έχουμε ότι και οι κατανομές ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν με την κατανομή ισορροπίας σε συνεχή χρόνο.

Το ενδιαφέρον είναι ότι ο τύπος για την κατανομή ισορροπίας (9.40) ισχύει και για το αντίστοιχο $\mathrm{M}/\mathrm{G}/\infty$ σύστημα, με $\rho = \lambda E[B]$, όπου B ένας τυπικός χρόνος εξυπηρέτησης με γενική κατανομή. Δηλαδή, έχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η ιδιότητα της μη-ευαισθησίας (insensitivity property) του $\mathrm{M}/\mathrm{G}/c/c$ συστήματος και για το $\mathrm{M}/\mathrm{G}/\infty$ σύστημα.

9.9 Ασκήσεις

Άσκηση 9.1 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου έχει Exp(μ) χρόνο εξυπηρέτησης. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον νεοαφιχθέντα πελάτη τύπου 1. Να βρεθούν οι μέσοι οριακοί αριθμοί πελατών τύπων 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$, αντίστοιχα.*

Άσκηση 9.2 *Να βρείτε τις οριακές κατανομές (p_n), (a_n) και (d_n) των αριθμών των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, αντίστοιχα, σε μια ευσταθή M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Little και την ιδιότητα PASTA. Για τον σκοπό αυτό θεωρήστε ως «σύστημα» την i θέση του συστήματος εξυπηρέτησης για $i = 1, 2, \ldots$.*

Άσκηση 9.3 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ. Οι πελάτες που βρίσκουν το σύστημα κενό εισέρχονται σε αυτό με πιθανότητα p, ενώ όσοι το βρίσκουν μη-κενό εισέρχονται με πιθανότητα q. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών που βρίσκουν το σύστημα κενό είναι Exp(ν), ενώ αυτών που βρίσκουν το σύστημα μη-κενό είναι Exp(μ). Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες και ειδικούς πρώτους χρόνους εξυπηρέτησης σε κάθε περίοδο συνεχούς λειτουργίας. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.*

Άσκηση 9.4 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την κατανομή Exp(μ). Ο υπηρέτης εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αργίας. Οι χρόνοι λειτουργίας έχουν την κατανομή Exp(ζ), ενώ οι χρόνοι αργίας την κατανομή Exp(θ). Οι αφίξεις στο σύστημα γίνονται κανονικά, ανεξάρτητα αν* *ο υπηρέτης είναι σε περίοδο λειτουργίας ή αργίας. Όμως, εξυπηρέτηση παρέχεται μόνο όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε περίοδο λειτουργίας. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με ενεργές και ανενεργές περιόδους εξυπηρετήσεων. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα,* $E[Q]$, *και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό,* $E[S]$, *χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.*

Άσκηση 9.5 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο* λ, *ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την κατανομή* $Exp(\mu)$. *Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη ενός πελάτη σε κενό σύστημα, ο υπηρέτης μπαίνει σε διαδικασία ενεργοποίησης. Ο χρόνος που χρειάζεται να ενεργοποιηθεί (οπότε και θα αρχίσει να παρέχει κανονικά εξυπηρέτηση) ακολουθεί την κατανομή* $Exp(\theta)$. *Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εκθετικούς χρόνους εκκίνησης. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα,* $E[Q]$, *και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό,* $E[S]$, *χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.*

Άσκηση 9.6 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και μηδενικό χώρο αναμονής. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ, *ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι* $Exp(\mu)$. *Ένας πελάτης που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ελεύθερο αρχίζει άμεσα να εξυπηρετείται. Αν, όμως, βρει τον υπηρέτη κατειλημμένο, τότε αναχωρεί από το σύστημα και προσπαθεί αργότερα μέχρι τελικά να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επαναπροσπαθειών ενός πελάτη έχουν την κατανομή* $Exp(\gamma)$. *Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1/1 ουρά με (εκθετικές) επαναπροσπάθειες. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα,* $E[Q]$, *και τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό,* $E[S]$, *χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.*

Άσκηση 9.7 *Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/1 ουράς με ρυθμό αφίξεων* λ *και* $Exp(\mu)$ *χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ο χρόνος υπομονής κάθε πελάτη που περιμένει στον χώρο αναμονής έχει την κατανομή* $Exp(\nu)$ *και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί.*

1. *Αιτιολογήστε ότι η στοχαστική διαδικασία* $\{Q(t)\}$ *του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και δώστε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.*

2. *Για την ειδική περίπτωση* $\nu = \mu$, *βρείτε την κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.*

Άσκηση 9.8 *Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/1 ουράς με ρυθμό αφίξεων* λ *και* $Exp(\mu)$ *χρόνους εξυπηρέτησης, με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει* n *πελάτες κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα* q_n, *με* $q_0 = \frac{1}{4}$ *και* $q_n = \frac{3}{4}$ *για* $n \geq 1$.

1. *Να διατυπωθεί η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα.*

2. *Να υπολογιστούν οι κατανομές ισορροπίας* (p_n), (a_n) *και* (d_n) *του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα.*

3. *Να προσδιοριστεί το ποσοστό των χαμένων πελατών.*

Άσκηση 9.9 *Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και εξυπηρετήσεων* $\lambda_n = \alpha^n \lambda \ (n \geq 0)$ *και* $\mu_n = n\alpha^n \mu \ (n \geq 1)$ *αντίστοιχα, όπου* $\alpha \in (0,1)$, $\lambda, \mu > 0$ *γνωστές παράμετροι.*

1. *Πότε η ουρά είναι ευσταθής; Να βρεθεί η κατανομή ισορροπίας* (p_n) *του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Τι είδους κατανομή είναι;*

2. *Να βρεθούν οι κατανομές ισορροπίας* (a_n) *και* (d_n) *του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα. Τι κατανομές είναι;*

3. *Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, καθώς και οι μέσοι χρόνοι συνεχούς λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης $E[Y]$, $E[I]$ και $E[Z]$ αντίστοιχα.*

Άσκηση 9.10 *Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/c/c$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ορισμένοι πελάτες αναχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν, χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{c}$, $0 \le n \le c$.*

1. *Να βρεθεί η κατανομή ισορροπίας (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$. Τι είδους κατανομή είναι;*

2. *Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών (χαμένων πελατών).*

3. *Να βρεθούν οι κατανομές ισορροπίας (a_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, που αναφέρονται στους πραγματικά εισερχόμενους πελάτες του συστήματος.*

4. *Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, $E[S]$, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους αφιχθέντες πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτης στο σύστημα, $E[S']$, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους τελικά εισερχόμενους πελάτες.*

5. *Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος, $E[Z]$.*

Άσκηση 9.11 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής. Πελάτες δυο τύπων φθάνουν στο σύστημα, «υπομονετικοί» και «βιαστικοί», σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_υ και λ_β αντίστοιχα. Οι υπομονετικοί πελάτες εισέρχονται πάντα στο σύστημα, ενώ οι βιαστικοί μόνο όταν το συνολικό πλήθος πελατών που βρίσκουν κατά την άφιξή τους στο σύστημα είναι το πολύ $K-1$, όπου $K \ge 2$ δοσμένος ακέραιος. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών ανεξαρτήτως τύπου είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $Exp(\mu)$ και η πειθαρχία ουράς είναι η FCFS.*

1. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα, $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να σχεδιαστεί το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.*

2. *Να βρεθεί η κατανομή ισορροπίας (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα, σε συνεχή χρόνο.*

3. *Να βρεθεί ο ρυθμός διαπέρασης, λ^*, του συστήματος, καθώς και το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών.*

4. *Να βρεθούν οι κατανομές ισορροπίας (a_n^{enter}) και (d_n^{enter}) των αριθμών των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων, που αναφέρονται στους εισερχόμενους πελάτες.*

5. *Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.*

9.10 Σχόλια

Το βιβλίο Adan και Resing 2001 αναλύει πολλά από τα βασικά μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης με τη μέθοδο της ανάλυσης μέσης τιμής. Για μια διεξοδική περιγραφή της μεθόδου ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να διαβάσει την εργασία των Adan και Wal 2011 και τη μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία Τσουπαρόπουλος 2015.

Οι απλές Μαρκοβιανές ουρές είναι τα πιο βασικά μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης. Όλα τα εισαγωγικά βιβλία της Θεωρίας Ουρών Αναμονής αφιερώνουν αρκετό χώρο στη μελέτη τους. Για μια σύντομη εισαγωγή με πολλά παραδείγματα και υπολογιστικό προσανατολισμό, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να μελετήσει το σύγγραμμα των Adan και Resing 2001. Για περισσότερη λεπτομέρεια και παραδείγματα, μπορεί κανείς να δει τα κλασικά βιβλία Kleinrock 1975, Wolff 1989, Tijms 2008, Kulkarni 2010 και Shortle, Thompson, Gross και Harris 2018, ή τα νεότερα συγγράμματα των Haviv 2013 και Harchol-Balter 2013.

Βιβλιογραφία

[1] I. Adan και J. Resing. *Queueing Theory*. Eindhoven: Notes available online, 2001.

[2] I. Adan και J. van der Wal. “Mean value techniques”. Στο: *Boucherie, R. and van Dijk, N.M. (eds.) Queueing Networks: A Fundamental Approach*. Springer, 2011. Κεφ. 13, σσ. 561–586. ISBN: 978-1-4419-6471-7. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6472-4_13.

[3] Ν. Τσουπαρόπουλος. *Ανάλυση Μέσης Τιμής σε Συστήματα Εξυπηρέτησης*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, 2015.

[4] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley, 1975. ISBN: 978-0471491101.

[5] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[6] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[7] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[8] J.F. Shortle, J.M. Thompson, D. Gross και C.M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory, 5th Edition*. Wiley, 2018. ISBN: 978-1118943526.

[9] M. Haviv. *Queues: A Course in Queueing Theory*. Springer, 2013. ISBN: 978-1461467649.

[10] M. Harchol-Balter. *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge, 2013. ISBN: 978-1107027503.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο 9 είδαμε κάποιες μεθόδους για την αποτίμηση της απόδοσης συγκεκριμένων συστημάτων εξυπηρέτησης. Στο παρόν κεφάλαιο προχωράμε, παρουσιάζοντας κάποιες μεθόδους για τη βελτιστοποίηση της απόδοσής τους. Αρχικά συγκρίνουμε κάποια M/M/c συστήματα με τα αντίστοιχα M/M/1 συστήματα. Στο πλαίσιο αυτό εξετάζουμε κατά πόσο είναι συμφέρον σε ένα σύστημα με πολλούς υπηρέτες να υπάρχει κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή ουρά ανά υπηρέτη. Επιπλέον, μελετάμε κατά πόσο είναι προτιμότεροι πολλοί αλλά αργοί υπηρέτες ή λίγοι και γρήγοροι. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα κλασικό πρόβλημα σχεδιασμού, την επιλογή βέλτιστου ρυθμού εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα υπό κατασκευή. Εδώ το ζητούμενο είναι να βρούμε μια βέλτιστη ισορροπία μεταξύ λειτουργικού κόστους και κόστους παραμονής των πελατών.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα εξετάσουμε τι συμβαίνει αν οι οντότητες που εμπλέκονται σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης δεν είναι παθητικές αλλά λαμβάνουν αποφάσεις. Πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι κάποιες από τις οντότητες είναι στρατηγικές, δηλαδή παίρνουν αποφάσεις για μεγιστοποίηση της ωφέλειάς τους και θα αναλύσουμε τη συμπεριφορά τους και την επίδρασή της στο αντίστοιχο σύστημα. Η περιοχή αυτή συνθέτει ιδέες από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής, από τον Μαθηματικό Προγραμματισμό και από τη Θεωρία Παιγνίων. Θα παρουσιάσουμε το πλαίσιο μελέτης στην περιοχή αυτή της Θεωρίας Ουρών και, κατόπιν, θα δούμε κάποιες πρώτες εφαρμογές σε συγκεκριμένα συστήματα.

Προαπαιτούμενη γνώση

Για την κατανόηση του παρόντος κεφαλαίου, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει κατακτήσει τα περιεχόμενα των κεφαλαίων 3, 8 και 9.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

10.1 Σύγκριση M/M/c και αντίστοιχων M/M/1 συστημάτων

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε το M/M/c σύστημα εξυπηρέτησης με «ισοδύναμα», υπό κάποια έννοια, συστήματα εξυπηρέτησης τύπου M/M/1. Οι συγκρίσεις αυτές θα δώσουν μερικές πρώτες διαισθήσεις για το πώς συμφέρει να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που να ανταποκρίνεται σε ένα συγκεκριμένο πρακτικό πρόβλημα, ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος.

10.1.1 Κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες ή μία ουρά για κάθε υπηρέτη;

Έστω ότι πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και έχουμε διαθέσιμους c όμοιους υπηρέτες. Τι είναι προτιμότερο; Να έχουμε ξεχωριστή ουρά για κάθε υπηρέτη ή μια κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες;

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό σε ένα συγκεκριμένο, αλλά αρκετά ειδικό πλαίσιο, υποθέτοντας ότι έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων δυνητικών πελατών με ρυθμό λ, $\mathrm{Exp}(\mu)$ κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης και $c = 2$ διαθέσιμους υπηρέτες. Υποθέτουμε ότι $\lambda < 2\mu$ που είναι μια αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές. Ορίζουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ τον ρυθμό συνωστισμού του συστήματος, οπότε $\rho < 2$.

Αν χρησιμοποιήσουμε ξεχωριστή ουρά για κάθε υπηρέτη και υποθέσουμε ότι κάθε αφικνούμενος πελάτης επιλέγει να πάει στο υποσύστημα ουρά - χώρο εξυπηρέτησης του υπηρέτη i με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, για $i = 1, 2$, τότε θα έχουμε δυο πανομοιότυπα υποσυστήματα τύπου M/M/1 με ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{2}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, το καθένα. Επομένως, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (9.31), οπότε θα έχουμε ότι για την περίπτωση ξεχωριστών ουρών ο μέσος χρόνος παραμονής είναι

$$E[S_1] = \frac{1}{\mu - \frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{\mu(2-\rho)}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε μια κοινή ουρά για όλους τους υπηρέτες, τότε θα έχουμε ένα σύστημα τύπου M/M/2 με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, οπότε ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (9.37) που στην περίπτωση αυτή δίνει

$$E[S_2] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}. \tag{10.1}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1] - E[S_2] &= \frac{2}{\mu(2-\rho)} - \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{2\rho}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} > 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να υπάρχει μια κοινή ουρά και για τους όλους τους υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (το ίδιο ισχύει και για τον χρόνο αναμονής στην ουρά, αφού έχουμε $E[W_i] = E[S_i] - \frac{1}{\mu}$, $i = 1, 2$, οπότε $E[W_1] - E[W_2] = E[S_1] - E[S_2]$). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι $\lim_{\rho\to 2^-}(E[S_1] - E[S_2]) = \infty$, και επομένως η κοινή ουρά μειώνει σημαντικά τον μέσο χρόνο παραμονής σε συστήματα με ρυθμό συνωστισμού κοντά στην κρίσιμη τιμή για αστάθεια. Επίσης,

$$\frac{E[S_2]}{E[S_1]} = \frac{2}{2+\rho} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \rho \in (0, 2),$$

που δείχνει ότι η χρήση κοινής ουράς βελτιώνει σημαντικά τη λειτουργία του συστήματος όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής συνωστισμού και συγκεκριμένα οδηγεί σε μείωση του μέσου χρόνου παραμονής των πελατών με έναν συντελεστή που μπορεί να φθάσει κοντά στο $\frac{1}{2}$ για μεγάλες τιμές του ρυθμού συνωστισμού.

Το γενονός ότι η χρήση κοινής ουράς (pooling) βελτιώνει την απόδοση του συστήματος ισχύει σε πολύ γενικότερες καταστάσεις και για τον λόγο αυτό η χρήση κοινής ουράς έχει υιοθετηθεί σε πολλές πρακτικές εφαρμογές των ουρών σε πραγματικά συστήματα τα τελευταία χρόνια. Βέβαια, αν οι πελάτες είναι ετερογενείς μπορεί να είναι προτιμότερο σε κάποιες περιπτώσεις να έχουμε διαφορετικές ουρές για διαφορετικές κατηγορίες πελατών. Επίσης, αν οι υπηρέτες δεν είναι όμοιοι, το ερώτημα θα πρέπει να εξεταστεί εξαρχής με προσοχή.

10.1.2 Πολλοί αργοί υπηρέτες ή λίγοι γρήγοροι υπηρέτες;

Έστω ότι πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με συγκεκριμένη δυναμικότητα (δηλαδή συνολικό ρυθμό) εξυπηρέτησης. Τι είναι προτιμότερο; Να έχουμε έναν υπηρέτη με όλη τη δυναμικότητα ή να τη μοιράσουμε σε περισσότερους υπηρέτες;

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό σε ένα ειδικό πλαίσιο, ώστε να έχουμε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Υποθέτουμε ότι έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων πελατών με ρυθμό λ και συνολική δυναμικότητα (δηλαδή συνολικό ρυθμό) εξυπηρέτησης 2μ την οποία μπορούμε να αναθέσουμε σε έναν υπηρέτη ή σε 2 υπηρέτες. Υποθέτουμε ότι $\lambda < 2\mu$ ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος και συμβολίζουμε με $\rho < 2$ τον ρυθμό συνωστισμού.

Αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπηρέτη, τότε θα έχουμε μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ. Τότε, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (9.31), που στην προκειμένη περίπτωση δίνει

$$E[S_1] = \frac{1}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε δυο υπηρέτες, τότε θα έχουμε μια M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ ανά υπηρέτη. Τότε, ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη θα δίνεται από τον τύπο (10.1). Επομένως, θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[S_1] - E[S_2] &= \frac{1}{\mu(2-\rho)} - \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho - 2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} = -\frac{1}{\mu(2+\rho)} < 0. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να ανατεθεί όλη η δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε έναν υπηρέτη, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα. Εδώ έχουμε ότι

$$\frac{E[S_1]}{E[S_2]} = \frac{\rho+2}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \rho \in (0,2). \tag{10.3}$$

Επομένως, η ανάθεση όλης της δυναμικότητας εξυπηρέτησης σε έναν υπηρέτη βελτιώνει σημαντικά τη λειτουργία του συστηματος όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής συνωστισμού και συγκεκριμένα οδηγεί σε μείωση του μέσου χρόνου παραμονής των πελατών με έναν συντελεστή που φθάνει κοντά στο $\frac{1}{2}$ για μικρές τιμές του ρυθμού συνωστισμού. Αυτό είναι λογικό, διότι αν το σύστημα είναι σχεδόν άδειο πάντα, τότε μόνο ένας υπηρέτης χρησιμοποιείται ακόμη κι αν υπάρχουν δυο διαθέσιμοι υπηρέτες. Επομένως, είναι καλύτερο όλη η δυναμικότητα να ανατίθεται σε έναν υπηρέτη.

Όσον αφορά τους αντίστοιχους χρόνους αναμονής στην ουρά, για την M/M/1 ουρά θα έχουμε

$$E[W_1] = E[S_1] - \frac{1}{2\mu} = \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)},$$

ενώ για την M/M/2 ουρά θα έχουμε

$$E[W_2] = E[S_2] - \frac{1}{\mu} = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Επομένως, θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[W_1] - E[W_2] &= \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)} - \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)} \\ &= \frac{\rho}{2\mu(2+\rho)} > 0. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι προτιμότερο να μοιραστεί η δυναμικότητα εξυπηρέτησης σε δυο υπηρέτες, αν ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην ουρά, δηλαδή ισχύει το αντίθετο από αυτό που είδαμε για τον χρόνο παραμονής. Αυτό είναι βέβαια λογικό, αφού η παρουσία πολλών υπηρετών διευκολύνει να αρχίσουν οι πελάτες την εξυπηρέτησή τους, ανεξάρτητα από το ότι αυτό μπορεί να συνεπάγεται πιο αργή εξυπηρέτηση.

10.2 Το πρόβλημα της επιλογής βέλτιστου ρυθμού εξυπηρέτησης

Ένα άλλο πρόβλημα που εμφανίζεται κατά τον σχεδιασμό ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι η επιλογή του βέλτιστου ρυθμού εξυπηρέτησης ώστε τα συνολικά έξοδα παροχής εξυπηρέτησης και αναμονής να ελαχιστοποιούνται. Τυπικά, αν επιλεγεί ένας υψηλός ρυθμός εξυπηρέτησης το κόστος παροχής της εξυπηρέτησης είναι μεγάλο, ενώ τα κόστη αναμονής μικρά. Αντίθετα, ένας χαμηλός ρυθμός εξυπηρέτησης συνεπάγεται χαμηλό κόστος παροχής εξυπηρέτησης, αλλά επάγει μεγάλα κόστη αναμονής. Επομένως, ποιος ρυθμός εξισορροπεί καλύτερα αυτά τα δύο κόστη;

Για να μελετήσουμε μια απλή και συγκεκριμένη περίπτωση του προβλήματος, θεωρούμε μια $M/M/1$ ουρά με δοσμένο ρυθμό αφίξεων λ. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μεταβλητή απόφασης που θέλουμε να καθοριστεί έτσι ώστε να μειωθεί το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος. Το σύστημα έχει δύο είδη κόστους. Αφενός έχει κόστος εξυπηρέτησης s ανά χρονική μονάδα, για κάθε μονάδα ρυθμού εξυπηρέτησης που παρέχει και αφετέρου έχει κόστος αναμονής c ανά χρονική μονάδα και ανά πελάτη. Δηλαδή, αν ο ρυθμός εξυπηρέτησης που έχει επιλεγεί είναι μ, τότε το κόστος εξυπηρέτησης είναι $s\mu$ ανά χρονική μονάδα και αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα μια χρονική μονάδα, τότε το κόστος αναμονής για αυτήν τη χρονική μονάδα είναι cn.

Επομένως, αν ο ρυθμός εξυπηρέτησης τεθεί μ, τότε το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα είναι

$$C(\mu) = s\mu + cE_\mu[Q] = s\mu + c\frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad \mu > \lambda. \tag{10.4}$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το

$$\begin{aligned} &\min_\mu (s\mu + cE_\mu[Q]) = \min_\mu \left(s\mu + \frac{c\lambda}{\mu - \lambda} \right) \\ &\quad \text{υπό τον περιορισμό} \\ &\mu > \lambda. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} C'(\mu) &= s - \frac{c\lambda}{(\mu-\lambda)^2}, \\ C''(\mu) &= \frac{2c\lambda}{(\mu-\lambda)^3} > 0, \quad \mu > \lambda. \end{aligned}$$

Επομένως, η $C(\mu)$ είναι κυρτή στο (λ, ∞), με

$$\lim_{\mu \to \lambda^+} C(\mu) = \lim_{\mu \to \infty} C(\mu) = \infty,$$

οπότε το ολικό ελάχιστο βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση $C'(\mu) = 0$, που δίνει τον βέλτιστο ρυθμό εξυπηρέτησης

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda c}{s}}, \tag{10.6}$$

που επάγει το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος ανά χρονική μονάδα

$$C(\mu^*) = s\lambda + 2\sqrt{\lambda cs}. \tag{10.7}$$

Το πρόβλημα της επιλογής ρυθμού εξυπηρέτησης που εξετάσαμε στην ενότητα αυτή είναι ένα πρόβλημα σχεδιασμού υπό την έννοια ότι ο βέλτιστος ρυθμός εξυπηρέτησης επιλέγεται μια φορά και για πάντα και δεν προσαρμόζεται στην κατάσταση του συστήματος. Όμως, συνήθως, ο διαχειριστής του συστήματος έχει τη δυνατότητα προσαρμογής του ρυθμού εξυπηρέτησης ανάλογα με τον συνωστισμό που παρατηρείται στο σύστημα. Π.χ., σε ένα σουπερμάρκετ, οι υπάλληλοι που εξυπηρετούν στα ταμεία αυξομειώνονται ανάλογα με τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται σε αναμονή. Επίσης, στο τηλεφωνικό κέντρο μιας εταιρείας, σε περίπτωση μεγάλου φόρτου κλήσεων, καλούνται να εξυπηρετήσουν πελάτες και υπάλληλοι που εργάζονται σε άλλα τμήματα.

Το πρόβλημα της προσαρμογής του ρυθμού εξυπηρέτησης ανάλογα με τον συνωστισμό του συστήματος είναι αρκετά δυσκολότερο στην επίλυσή του από το πρόβλημα της επιλογής ρυθμού εξυπηρέτησης που είδαμε παραπάνω. Ακόμα και στην απλούστερη εκδοχή του χρειάζεται πιο προχωρημένες μαθηματικές μεθόδους ώστε να λυθεί. Στην περίπτωση Μαρκοβιανών συστημάτων, η βασική προσέγγιση είναι μέσω της Θεωρίας των Μαρκοβιανών Διαδικασιών Αποφάσεων (Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός).

Καθώς οι μέθοδοι του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού σε συνεχή χρόνο εκφεύγουν της παρούσας εισαγωγής, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο Cassandras και Lafortune 2008, στο κεφάλαιο 9, για μια σύντομη εισαγωγή στη μεθοδολογία του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού σε συνεχή χρόνο με βασικές εφαρμογές στη Θεωρία Ουρών Αναμονής. Στο βιβλίο αυτό περιγράφεται αναλυτικά και η λύση του προβλήματος της προσαρμογής του ρυθμού εξυπηρέτησης ανάλογα με τον συνωστισμό του συστήματος, στο απλούστερο δυνατό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, μελετάται μια M/M/1 ουρά, όπου ο υπηρέτης μπορεί να λειτουργεί με ρυθμό $\mu \in \{\mu_1, \mu_2\}$ με $\mu_1 > \mu_2$, όπου το κόστος εξυπηρέτησης ανά χρονική μονάδα για ρυθμό μ_i είναι s_i, για $i = 1, 2$, με $s_1 > s_2$. Το κόστος αναμονής ανά πελάτη και χρονική μονάδα είναι c. Τότε, αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη πολιτική προσαρμογής για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους ανά χρονική μονάδα είναι τύπου κατωφλίου, δηλαδή ο υπηρέτης πρέπει να δουλεύει με τον αργό ρυθμό μ_2 όσο ο αριθμός των πελατών είναι μικρότερος ή ίσος από κάποιον κρίσιμο αριθμό n^*, ενώ πρέπει να δουλεύει με τον γρήγορο ρυθμό μ_1, όταν ο αριθμός των πελατών είναι μεγαλύτερος του n^*. Επιπλέον, ο κρίσιμος αριθμός n^* χαρακτηρίζεται με βάση τις παραμέτρους λειτουργίας του συστήματος λ, μ_1, μ_2 και τις οικονομικές παραμέτρους s_1, s_2 και c.

10.3 Ουρές Αναμονής με Στρατηγικούς Πελάτες

10.3.1 Γενικό πλαίσιο στρατηγικής συμπεριφοράς

Στα παραδείγματα που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες, ο σχεδιασμός του συστήματος έγινε υπό την παραδοχή ότι οι πελάτες είναι παθητικές οντότητες, δηλαδή δεν παίρνουν αποφάσεις. Όμως, οι μελέτες για τον βέλτιστο σχεδιασμό και/ή τον βέλτιστο έλεγχο συστημάτων αναμονής, θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών, το γεγονός δηλαδή, ότι οι πελάτες είναι ενεργητικές οντότητες που παίρνουν αποφάσεις με σκοπό τη μεγιστοποίηση της ωφέλειάς τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλοι πελάτες συμπεριφέρονται όμοια.

Επομένως, για να γίνει μια ανάλυση της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν ιδέες και εργαλεία από τη Θεωρία Παιγνίων. Υπάρχουν όμως δυο προβλήματα που ανακύπτουν για τη χρήση της κλασικής θεωρίας παιγνίων. Το πρώτο πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες, δηλαδή οι δυνητικοί πελάτες ενός συστήματος είναι άπειροι το πλήθος. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες δεν παίρνουν ταυτόχρονα τις αποφάσεις τους, αφού φθάνουν στο σύστημα διαδοχικά σε άπειρο ορίζοντα. Τα προβλήματα αυτά ξεπερνιούνται δημιουργώντας ανάλογες έννοιες με αυτές της κλασικής Θεωρίας Παιγνίων, εκμεταλλευόμενοι την ομοιογένεια των πελατών. Δηλαδή σε πρώτο επίπεδο θεωρούμε ότι όλοι οι πελάτες είναι όμοιοι και κατόπιν μπορούμε να επεκτείνουμε το πλαίσιο και στην περίπτωση ετερογενών πελατών, υποθέτοντας ότι υπάρχουν διάφορες κλάσεις πελατών και οι πελάτες κάθε κλάσης είναι όμοιοι (ομογενείς).

Στην περίπτωση, λοιπόν, ομογενών πελατών, ένα παιχνίδι μεταξύ των πελατών προσδιορίζεται από το κοινό σύνολο των στρατηγικών τους, $\mathscr{S}$, και μια συνάρτηση πληρωμής $\mathscr{U}(s,s')$, που δίνει την πληρωμή ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική s, όταν όλοι οι άλλοι χρησιμοποιούν τη στρατηγική s'. Με τον όρο στρατηγική εννοούμε ένα δυνατό πλάνο δράσης κάθε πελάτη που του υπαγορεύει πώς να συμπεριφερθεί κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής του με το σύστημα εξυπηρέτησης.

Η συνάρτηση $\mathscr{U}(s,s')$ είναι γραμμική ως προς s, υπό την έννοια ότι αν η s είναι η μείξη των στρατηγικών $s^k, k=1,2,\dots,r$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\alpha_k, k=1,2,\dots,r$, με $\sum_{k=1}^r \alpha_k = 1$, τότε

$$\mathscr{U}(s,s') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathscr{U}(s^k,s').$$

Αν s^1 και s^2 είναι δυο στρατηγικές ενός πελάτη, τότε λέμε ότι η s^1 κυριαρχεί τελείως ασθενώς της s^2, αν για κάθε στρατηγική s' των άλλων πελατών ισχύει

$$\mathscr{U}(s^1,s') \geq \mathscr{U}(s^2,s').$$

Αν η ανισότητα ισχύει γνήσια για μια τουλάχιστον στρατηγική s', λέμε ότι η s^1 κυριαρχεί ασθενώς της s^2. Τέλος, αν η ανισότητα ισχύει γνήσια για όλες τις στρατηγικές s', τότε λέμε ότι η s^1 κυριαρχεί ισχυρά της s^2.

Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης. Δοθείσης μιας στρατηγικής s' που ακολουθούν όλοι οι άλλοι πελάτες, η στρατηγική s^* του επιλεγμένου πελάτη λέγεται βέλτιστη απάντηση στην s', αν για κάθε στρατηγική s του επιλεγμένου πελάτη ισχύει

$$\mathscr{U}(s^*,s') \geq \mathscr{U}(s,s'),$$

δηλαδή η s^* βελτιστοποιεί της $f(s) = \mathscr{U}(s,s')$. Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων στο s' συμβολίζεται με $BR(s')$.

Μια στρατηγική ενός επιλεγμένου πελάτη λέγεται ισχυρά κυριαρχούσα, αν ακολουθώντας την ο επιλεγμένος πελάτης αποκομίζει αυστηρά μεγαλύτερη ωφέλεια από όση θα αποκόμιζε ακολουθώντας οποιαδήποτε άλλη στρατηγική, ανεξάρτητα από το τι θα έκαναν οι υπόλοιποι πελάτες. Αντίστοιχα, μια στρατηγική ενός επιλεγμένου πελάτη λέγεται ασθενώς (αντίστοιχα τελείως ασθενώς) κυριαρχούσα, αν ακολουθώντας την ο επιλεγμένος πελάτης αποκομίζει μεγαλύτερη ή ίση ωφέλεια (αντίστοιχα μεγαλύτερη ή ίση ωφέλεια με τουλάχιστον μια φορά μεγαλύτερη) από όση θα αποκόμιζε ακολουθώντας οποιαδήποτε άλλη στρατηγική, ανεξάρτητα από το τι θα έκαναν οι υπόλοιποι πελάτες.

Μια στρατηγική s^e λέγεται (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας, αν είναι βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της. Δηλαδή, η s^e είναι στρατηγική ισορροπίας αν

$$\mathscr{U}(s^e,s^e) \geq \mathscr{U}(s,s^e),\ s \in \mathscr{S},$$

ή, ισοδύναμα, όταν $s^e \in BR(s^e)$. Με άλλα λόγια, μια στρατηγική είναι στρατηγική ισορροπίας, αν κανένας πελάτης δεν έχει κίνητρο να την αλλάξει μονομερώς, όταν όλοι οι άλλοι την ακολουθούν.

Ένα βασικό ερώτημα αφορά τον υπολογισμό της συνάρτησης πληρωμής $\mathscr{U}(s,s')$ σε ένα στρατηγικό πρόβλημα απόφασης πελατών στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου συστήματος εξυπηρέτησης. Η βασική ιδέα είναι ότι αν έχουμε έναν επιλεγμένο πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική s, όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική s', τότε αυτός δεν επηρεάζει τη γενική συμπεριφορά του συστήματος. Η γενική συμπεριφορά του συστήματος προσδιορίζεται από τη στρατηγική s' που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες, μια και η επίδραση του επιλεγμένου πελάτη είναι αμελητέα. Στον υπολογισμό της συμπεριφοράς του συστήματος υποτίθεται, επίσης, ότι το σύστημα εξετάζεται για μεγάλο χρονικό διάστημα και επομένως τα διάφορα μέτρα υπολογίζονται υποθέτοντας ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας (στασιμότητας).

Επομένως, η διαδικασία εύρεσης των στρατηγικών ισορροπίας σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με στρατηγικούς πελάτες γίνεται σε βήματα ως εξής:

Βήμα 1ο: Μελέτη της στάσιμης συμπεριφοράς ενός συστήματος κάτω από κάθε στρατηγική s' των πελατών.

Βήμα 2ο: Υπολογισμός της συνάρτησης πληρωμής $\mathscr{U}(s,s')$ ενός επιλεγμένου πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική s, όταν οι άλλοι ακολουθούν τη στρατηγική s'.

Βήμα 3ο: Εύρεση βέλτιστης απάντησης του επιλεγμένου πελάτη έναντι μιας στρατηγικής των άλλων:

$$BR(s') = \{s \in \mathscr{S} : \mathscr{U}(s,s') \geq \mathscr{U}(\hat{s},s'), \hat{s} \in \mathscr{S}\}.$$

Βήμα 4ο: Εύρεση στρατηγικών με την ιδιότητα $s^e \in BR(s^e)$.

10.3.2 Συμπεριφορές απόφυγε-το-πλήθος και ακολούθησε-το-πλήθος

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πρόβλημα στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος, δηλαδή υπάρχει σχέση διάταξης, ώστε για κάθε δυο στρατηγικές s και s' να ισχύει $s \leq s'$ ή $s \geq s'$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι κάθε στρατηγική s έχει μοναδική βέλτιστη απάντηση, την οποία συμβολίζουμε με $BR(s)$ (κανονικά το $BR(s)$ είναι το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων, αλλά αφού εδώ πρόκειται για μονοσύνολο το ταυτίζουμε με τη μοναδική στρατηγική που περιέχει).

Αν η συνάρτηση $BR(s)$ είναι αύξουσα ως προς s, λέμε ότι η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών στο εν λόγω σύστημα είναι του τύπου ακολούθησε-το-πλήθος (Follow-The-Crowd (FTC)). Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια καινούργια στρατηγική που είναι «μεγαλύτερη», τότε και η βέλτιστη αντίδραση ενός επιλεγμένου πελάτη είναι η μετακίνηση σε μια καινούργια στρατηγική που είναι «μεγαλύτερη» της αρχικής του. Οπότε, ο επιλεγμένος πελάτης αλλάζει στρατηγική προς την ίδια κατεύθυνση με τους άλλους πελάτες. Στην περίπτωση αυτή συνήθως υπάρχουν πολλές στρατηγικές ισορροπίας. Πράγματι οι στρατηγικές ισορροπίας αντιστοιχούν στα σημεία που το γράφημα της συνάρτησης $y = BR(s)$ τέμνει την ευθεία $y = s$. Δεδομένου ότι η $BR(s)$ είναι αύξουσα, τα αντίστοιχα σημεία τομής μπορεί να είναι περισσότερα από ένα.

Αν η συνάρτηση $BR(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s, τότε η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών αναφέρεται ως τύπου απόφυγε-το-πλήθος (Avoid-The-Crowd (ATC)). Στην περίπτωση αυτή, αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια καινούργια στρατηγική που είναι «μεγαλύτερη» από την προηγούμενη επιλογή τους, τότε η βέλτιστη αντίδραση ενός επιλεγμένου πελάτη είναι να κινηθεί σε αντίθετη κατεύθυνση. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας που βρίσκεται στο σημείο τομής του γραφήματος της φθίνουσας συνάρτησης $y = BR(s)$ με την ευθεία $y = s$.

Τα πιο κλασικά προβλήματα στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών είναι αυτά στα οποία οι πελάτες αντιμετωπίζουν το δίλημμα της εισόδου/αποχώρησης κατά την άφιξή τους σε ένα σύστημα. Στις περισσότερες τέτοιες περιπτώσεις η στρατηγική συμπεριφορά είναι τύπου ATC. Πράγματι, αν ένας επιλεγμένος πελάτης μάθει ότι οι άλλοι πελάτες γίνονται περισσότερο πρόθυμοι να εισέλθουν στο σύστημα, τότε αυτός γίνεται περισσότερο απρόθυμος να εισέλθει, καθώς αναμένει μεγαλύτερο συνωστισμό σε αυτό και επομένως μεγαλύτερα κόστη αναμονής.

Βεβαίως υπάρχουν και περιπτώσεις προβλημάτων στρατηγικής συμπεριφοράς στις οποίες η συμπεριφορά είναι τύπου FTC. Π.χ., όταν οι πελάτες αντιμετωπίζουν το δίλημμα της αγοράς δικαιώματος προτεραιότητας, αν ένας πελάτης μάθει ότι οι άλλοι πελάτες γίνονται περισσότερο πρόθυμοι να αγοράσουν ένα τέτοιο δικαίωμα, τότε και αυτός γίνεται περισσότερο πρόθυμος να αγοράσει το δικαίωμα, αλλιώς θα εξυπηρετηθεί αργότερα από τους πελάτες που έχουν το δικαίωμα και επομένως θα υποστεί μεγαλύτερη αναμονή.

10.3.3 Στρατηγικές κατωφλίου

Ας υποθέσουμε ότι οι πελάτες ενός συστήματος εξυπηρέτησης παρατηρούν το πλήθος των πελατών στο σύστημα πριν επιλέξουν μία από δύο αποφάσεις A_1 και A_2 (π.χ., μπορεί να παρατηρούν το πλήθος των πελατών στο σύστημα κατά τη στιγμή της άφιξής τους και να αποφασίζουν αν θα μπουν ή όχι). Στην περίπτωση αυτή, και εφόσον δεν υπάρχει επιπλέον πληροφορία που να δίνεται στους πελάτες για την κατάσταση του συστήματος, μια γενική στρατηγική έχει τη μορφή $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2 \ldots)$, όπου q_i είναι η πιθανότητα ένας πελάτης να πάρει την απόφαση A_1, όταν το πλήθος των πελατών είναι i.

Η στρατηγική $\mathbf{q} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ με 1 στις πρώτες n θέσεις και 0 στις υπόλοιπες λέγεται (καθαρή) στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n και υπαγορεύει τη λήψη της απόφασης A_1 εφόσον ο πελάτης παρατηρήσει $0, 1, 2, \ldots, n-1$ πελάτες πριν πάρει την απόφαση και τη λήψη της απόφασης A_2, διαφορετικά. Με άλλα λόγια, υπό τη στρατηγική κατωφλίου n, ο πελάτης παίρνει την απόφαση A_1 αν το πλήθος των πελατών συμπεριλαμβανομένου του εαυτού του είναι το πολύ n.

Η στρατηγική $\mathbf{q} = (1, 1, \ldots, 1, p, 0, 0, \ldots)$ με 1 στις πρώτες n θέσεις, $p \in [0, 1]$ στην $n+1$ θέση και 0 στις υπόλοιπες λέγεται μεικτή (ή τυχαιοποιημένη) στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $x = n + p$. Υπό αυτήν τη στρατηγική, ένας πελάτης λαμβάνει την απόφαση A_1 εφόσον παρατηρήσει $0, 1, \ldots, n-1$ πελάτες πριν πάρει την απόφασή του και την απόφαση A_2 εφόσον παρατηρήσει $n+1, n+2, \ldots$ πελάτες. Αν παρατηρήσει ακριβώς n πελάτες, τότε παίρνει την απόφαση A_1 με πιθανότητα p και την απόφαση A_2 με τη συμπληρωματική πιθανότητα $1-p$. Για $p = 0$ ή 1, δηλαδή x ακέραιο, η μεικτή στρατηγική κατωφλίου $x = n + p$ ανάγεται στην αντίστοιχη καθαρή στρατηγική κατωφλίου.

Σε αρκετές εφαρμογές αποδεικνύεται ότι οι στρατηγικές ισορροπίας ή οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές είναι τύπου κατωφλίου. Ακόμη και αν αυτό δεν ισχύει, συχνά η αναζήτηση στρατηγικών ισορροπίας και/ή κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών περιορίζεται στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου ή στην κλάση των μεικτών στρατηγικών κατωφλίου.

Στην περίπτωση που έχουμε συμπεριφορά FTC και οι βέλτιστες απαντήσεις είναι τύπου κατωφλίου, τότε εμφανίζονται τυπικά πολλές καθαρές στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου και ανάμεσα σε κάθε δύο διαδοχικές από αυτές παρεμβάλλεται μια μεικτή στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Αν έχουμε συμπεριφορά ATC και οι βέλτιστες απαντήσεις είναι τύπου κατωφλίου, τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας που μπορεί να είναι είτε καθαρή στρατηγική κατωφλίου είτε μεικτή στρατηγική κατωφλίου.

10.3.4 Πλαίσιο κοινωνικής βελτιστοποίησης και βελτιστοποίησης μονοπωλίου

Σε ένα περιβάλλον όπου συνυπάρχουν ως οντότητες οι πελάτες και ο διαχειριστής ενός συστήματος, οι πελάτες επιθυμούν να βελτιστοποιήσουν το καθαρό πλεόνασμά τους, δηλαδή την αναμενόμενη αμοιβή/ωφέλεια από την εξυπηρέτηση μείον την πλήρη τιμή που περιλαμβάνει τόσο την τιμή της υπηρεσίας που μπορεί να επιβάλει ο διαχειριστής όσο και τα αναμενόμενα κόστη αναμονής. Συνήθως, οι πελάτες θεωρούνται ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, δηλαδή επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο πλεόνασμά τους, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη διασπορά του. Από την άλλη μεριά, ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής (social planner) ή ως μονοπώλιο.

Όταν ο διαχειριστής ενός συστήματος δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, υποθέτουμε ότι επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τον συνολικό κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα, που ορίζεται ως η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα όλων των εμπλεκομένων οντοτήτων (και των πελατών και του ιδίου). Στην περίπτωση αυτή, οι πληρωμές μεταξύ των οντοτήτων δεν εμφανίζονται στη συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας, αφού αφαιρούνται από κάποιες οντότητες και προστίθενται σε άλλες. Έτσι, π.χ., η επιβολή ενός τέλους εισόδου σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης δεν θα εμφανιστεί στη συνάρτηση της κοινωνικής ωφέλειας, αφού θα αφαιρεθεί από την ωφέλεια των πελατών και θα προστεθεί στην ωφέλεια του διαχειριστή συνεισφέροντας τελικά 0 στη συνολική κοινωνική ωφέλεια. Όμως, η επιβολή του τέλους επηρεάζει τη συμπεριφορά των πελατών που δρουν ιδιοτελώς προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν την ωφέλειά τους και επομένως εμμέσως επηρεάζει τη συνολική κοινωνική ωφέλεια. Σε γενικές γραμμές, η συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα ισούται με τη συνολική ωφέλεια των πελατών από την εξυπηρέτηση μείον τα κόστη λειτουργίας του συστήματος και τα κόστη αναμονής των πελατών.

Όταν ο διαχειριστής ενός συστήματος δρα ως μονοπώλιο, υποθέτουμε ότι επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια (συνολικά έσοδα ή κέρδος) ανά χρονική μονάδα. Στην περίπτωση αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση που βελτιστοποιεί ο διαχειριστής ισούται με τα έσοδα από τους πελάτες μέσω των τελών/τιμών που επιβάλλει ή με το κέρδος του που ισούται με τα έσοδα μείον τα κόστη λειτουργίας του συστήματος.

10.4 Το πρόβλημα εισόδου/αποδοχής πελατών στη μη-παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης τύπου M/M/1, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$, υπάρχει 1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα και η πειθαρχία ουράς είναι η FCFS. Για απλότητα στην παρουσίαση υποθέτουμε ότι $\lambda < \mu$ και επομένως το σύστημα είναι ευσταθές, ακόμα κι αν όλοι οι αφικνούμενοι πελάτες εισέρχονται σε αυτό. Κάθε πελάτης λαμβάνει μέση αμοιβή r για την εξυπηρέτησή του, ενώ υφίσταται κόστος αναμονής με ρυθμό c, όσο βρίσκεται στο σύστημα (το οποίο συσσωρεύεται είτε βρίσκεται στον χώρο αναμονής είτε εξυπηρετείται). Ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλλει ένα τέλος εισόδου p (τιμή της παρεχόμενης εξυπηρέτησης) για κάθε πελάτη. Υποθέτουμε ότι $p \in [0, r)$.

Το δίλημμα που αντιμετωπίζουν οι πελάτες αφορά το αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Θεωρούμε ότι δεν μπορούν να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών στο σύστημα πριν λάβουν την απόφασή τους, αλλά οι παράμετροι του συστήματος λ, μ, r, c, p είναι κοινή γνώση για όλους.

Οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι στην περίπτωση αυτή δύο: Είσοδος (απόφαση 1) ή αποχώρηση (απόφαση 0). Μια μεικτή στρατηγική προσδιορίζεται στην περίπτωση αυτή από έναν αριθμό $q \in [0, 1]$ που αντιστοιχεί στην πιθανότητα εισόδου.

Σκοπός μας είναι σε πρώτη φάση ο προσδιορισμός των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών. Για τον σκοπό αυτό θα ακολουθήσουμε τη γενική διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα.

Αρχικά, προσδιορίζουμε τη στάσιμη συμπεριφορά του συστήματος κάτω από μια στρατηγική των πελατών. Έστω ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q. Τότε, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λq και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, επομένως ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που θα αποφασίσει να εισέλθει σε αυτό το σύστημα είναι $\frac{1}{\mu - \lambda q}$ (λόγω της (9.31)).

Έστω, τώρα, ένας επιλεγμένος πελάτης που ακολουθεί τη στρατηγική q' όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική q. Τότε η ωφέλειά του είναι

$$\mathscr{U}(q', q) = (1 - q') \cdot 0 + q' \left(r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q} \right).$$

Επομένως, ο επιλεγμένος πελάτης για να βρει βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική q των άλλων έχει να λύσει το πρόβλημα

$$\max_{q' \in [0,1]} \mathscr{U}(q', q).$$

Η συνάρτηση $\mathscr{U}(q', q)$ είναι γραμμική ως προς q', οπότε για το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων έναντι της q, $BR(q)$, έχουμε

$$BR(q) \quad = \quad \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q} < 0 \\ [0, 1], & \text{αν } r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q} > 0, \end{cases}$$

ή λύνοντας ως προς q (υπό την προϋπόθεση ότι $q \in [0, 1]$ και $\lambda q < \mu$)

$$BR(q) \quad = \quad \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } q > \bar{q}_e \\ [0, 1], & \text{αν } q = \bar{q}_e \\ \{1\}, & \text{αν } q < \bar{q}_e, \end{cases}$$

με

$$\bar{q}_e = \frac{1}{\lambda} \left(\mu - \frac{c}{r - p} \right).$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε, τώρα, στην εύρεση των στρατηγικών ισορροπίας για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ας θυμηθούμε ότι μια στρατηγική q είναι στρατηγική ισορροπίας, αν και μόνο αν $q \in BR(q)$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} & q_e = 0 \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & 0 \in BR(0) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geq \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & r - p \leq \frac{c}{\mu}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} & q_e \in (0,1) \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & q_e \in BR(q_e) \\ \Leftrightarrow\ & q_e = \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{c}{r-p}\right), \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\bar{q}_e \in (0,1)$ που ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{c}{\mu} < r - p < \frac{c}{\mu - \lambda}.$$

Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} & q_e = 1 \text{ είναι στρατηγική ισορροπίας} \\ \Leftrightarrow\ & 1 \in BR(1) \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq \bar{q}_e \\ \Leftrightarrow\ & r - p \geq \frac{c}{\mu - \lambda}. \end{aligned}$$

Επομένως, αποδείξαμε το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.1 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στη μη-παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, υπάρχει πάντα στρατηγική ισορροπίας, $q_e = q_e(p)$, που είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο*

$$q_e = q_e(p) = \begin{cases} 0, & r - p \leq \frac{c}{\mu}, \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{c}{r-p}\right), & \frac{c}{\mu} < r - p < \frac{c}{\mu-\lambda}, \\ 1, & r - p \geq \frac{c}{\mu-\lambda}. \end{cases}$$

Προχωράμε, τώρα, στη λύση του προβλήματος της κοινωνικής βελτιστοποίησης. Ο διαχειριστής του συστήματος, όταν δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, θέλει να επιλέξει μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, q_{soc}, που να μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα. Αν ο διαχειριστής αφήνει να εισέλθει στο σύστημα κάθε πελάτης με πιθανότητα q, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους πελάτες, τότε η διαδικασία αφίξεων στο σύστημα είναι Poisson με ρυθμό λq και το σύστημα είναι μια M/M/1 ουρά με αυτόν τον ρυθμό των αφίξεων και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Αν επιβληθεί τιμή p για την είσοδο των πελατών, τότε η ωφέλεια του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα θα είναι $\lambda q p$, ενώ η συνολική ωφέλεια των πελατών θα είναι $\lambda q\left(r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q}\right)$. Επομένως, η συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα θα είναι

$$S_{soc}^{(un)}(q) = \lambda q\left(r - p - \frac{c}{\mu - \lambda q}\right) + \lambda q p = \lambda q\left(r - \frac{c}{\mu - \lambda q}\right),$$

που είναι ανεξάρτητη του p, όπως έχουμε πει παραπάνω (αφού στον κοινωνικό πλούτο δεν εμφανίζονται οι εσωτερικές πληρωμές). Ο «εκθέτης» (un) στη συνάρτηση $S_{soc}^{(un)}(q)$ δείχνει ότι αναφερόμαστε στο μη-παρατηρήσιμο (unobservable) μοντέλο. Είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq}S_{soc}^{(un)}(q) &= \lambda\left(r - \frac{c\mu}{(\mu-\lambda q)^2}\right), \\ \frac{d^2}{dq^2}S_{soc}^{(un)}(q) &= -\frac{2c\mu\lambda^2}{(\mu-\lambda q)^3} < 0. \end{aligned}$$

Επομένως, η $S_{soc}^{(un)}(q)$ είναι κοίλη για $q \in [0, \frac{\mu}{\lambda})$ και μεγιστοποιείται στο $\bar{q}_{soc}$ που μηδενίζει την $\frac{d}{dq}S_{soc}^{(un)}(q)$ και δίνεται από τον τύπο

$$\bar{q}_{soc} = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}\right). \tag{10.8}$$

Εφόσον $\bar{q}_{soc} \in [0,1]$, συνάγουμε ότι η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική (δηλ. η πιθανότητα εισόδου) δίνεται από τον τύπο (10.8), διαφορετικά το μέγιστο της κοινωνικής ωφέλειας επιτυγχάνεται στο 0 ή στο 1. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.2 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στη μη-παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο*

$$q_{soc} = \begin{cases} 0, & r \leq \frac{c}{\mu}, \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}\right), & \frac{c}{\mu} < r < \frac{c\mu}{(\mu-\lambda)^2}, \\ 1, & r \geq \frac{c\mu}{(\mu-\lambda)^2}. \end{cases}$$

Αν η τιμή εισόδου που επιβάλλει ο διαχειριστής είναι μηδενική ($p = 0$), τότε ισχύει ότι $q_e(0) \geq q_{soc}$ για όλες τις τιμές των παραμέτρων λ, μ, r και c. Επομένως, βλέπουμε ότι, χωρίς την επιβολή κάποιας τιμής εισόδου, οι πελάτες χρησιμοποιούν το σύστημα περισσότερο από όσο είναι κοινωνικά βέλτιστο.

Προχωράμε, τώρα, στο πρόβλημα της τιμολόγησης του μονοπωλίου. Στην περίπτωση αυτή, ο διαχειριστής δρα με σκοπό τη βελτιστοποίηση της συνολικής του ωφέλειας ανά χρονική μονάδα. Θέτοντας μια τιμή εισόδου, p, οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας $q_e(p)$ που περιγράψαμε παραπάνω. Για να επάγει μια πιθανότητα εισόδου $q \in (0,1)$, ο διαχειριστής πρέπει να επιβάλει τιμή $p(q) = r - \frac{c}{\mu-\lambda q}$. Για $q = 1$, θα πρέπει να επιβάλει τη μέγιστη δυνατή τιμή που είναι η $p(1) = r - \frac{c}{\mu-\lambda}$. Όταν επάγει πιθανότητα εισόδου $q = 0$, επιβάλλοντας μια μεγάλη τιμή το κέρδος του είναι 0. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση του κέρδους ανά χρονική μονάδα είναι

$$S_{prof}^{(un)}(q) = \lambda q p(q) = \lambda q\left(r - \frac{c}{\mu-\lambda q}\right),$$

ταυτίζεται δηλαδή με τη συνάρτηση της συνολικής κοινωνικής ωφέλειας ανά χρονική μονάδα. Επομένως, η βέλτιστη πιθανότητα εισόδου για τον διαχειριστή του συστήματος όταν δρα ως μονοπώλιο είναι η κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου. Λόγω της ομοιογένειας των πελατών, οι αντικειμενικές συναρτήσεις της κοινωνικής ωφέλειας και του κέρδους του μονοπωλίου συμπίπτουν και ο διαχειριστής του συστήματος, επιβάλλοντας την τιμή

$$p_{prof} = r - \frac{c}{\mu - \lambda q_{soc}},$$

μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, αλλά ταυτόχρονα την καρπούται ολόκληρη, αφήνοντας μηδενικό περιθώριο καθαρής ωφέλειας στους πελάτες.

Αντικαθιστώντας την κοινωνικά βέλτιστη πιθανότητα εισόδου στον τύπο της p_{prof}, έχουμε ότι

$$p_{prof} = \begin{cases} r - \frac{c}{\mu - \lambda}, & \text{αν } \lambda < \mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}} \\ r - \sqrt{\frac{rc}{\mu}}, & \text{αν } \lambda \geq \mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}, \end{cases}$$

που είναι φθίνουσα και τελικά σταθερή συνάρτηση του λ. Αυτό μοιάζει παράδοξο, αφού το λ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ζήτηση της εξυπηρέτησης και επομένως αύξηση στη ζήτηση επάγει μείωση στην τιμή της! Όμως, αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί διότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η αύξηση στη ζήτηση επάγει μείωση στην ποιότητα του αγαθού της εξυπηρέτησης που οφείλεται στην αύξηση του μέσου χρόνου αναμονής, και επομένως οι πελάτες γίνονται λιγότερο πρόθυμοι να το αγοράσουν.

10.5 Το πρόβλημα εισόδου/αποδοχής πελατών στην παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης M/M/1 με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, όπου κάθε πελάτης αντιμετωπίζει το δίλημμα εισόδου/αποχώρησης, αφού παρατηρήσει το πλήθος των πελατών που υπάρχει στο σύστημα και γνωρίζοντας ότι η μέση αμοιβή από την εξυπηρέτησή του είναι r, ενώ συσσωρεύει κόστη αναμονής με ρυθμό c ανά χρονική μονάδα.

Ο διαχειριστής του συστήματος επιβάλλει ένα τέλος εισόδου p, το οποίο είναι επίσης γνωστό σε κάθε πελάτη.

Μια μεικτή στρατηγική ενός πελάτη στην περίπτωση αυτή δίνεται από μια ακολουθία $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, ...)$, όπου $q_n \in [0,1]$, $n = 0, 1, 2, ...$, είναι η πιθανότητα εισόδου στο σύστημα όταν ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει n άτομα στο σύστημα (χωρίς να μετρά τον εαυτό του).

Αρχικά, θέλουμε να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών. Όταν οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική $\mathbf{q}$ το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό αφίξεων $\lambda_n = \lambda q_n$ και οποιοδήποτε μέτρο απόδοσης μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με βάση τη σχετική μεθοδολογία (βλέπε Κεφάλαιο 9). Το σημαντικό, όμως, είναι ότι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός επιλεγμένου πελάτη στο σύστημα, δεδομένου ότι βρίσκει n πελάτες μπροστά του, δεν εξαρτάται από τη στρατηγική $\mathbf{q}$ του πληθυσμού των πελατών. Αυτό συμβαίνει διότι οι στρατηγικές των μελλοντικών αφίξεων δεν επηρεάζουν τον επιλεγμένο πελάτη λόγω της FCFS πειθαρχίας ουράς, αλλά ούτε και οι στρατηγικές των προηγούμενων πελατών επηρεάζουν τον επιλεγμένο πελάτη. Πράγματι, οι στρατηγικές των προηγούμενων πελατών δεν βασίστηκαν σε γνώση του χρόνου εξυπηρέτησής τους, οπότε το γεγονός ότι βρίσκονται n πελάτες στην ουρά δεν προσφέρει κάποια πληροφορία για τους χρόνους εξυπηρέτησης που δεν έχουν ακόμη ξεκινήσει. Όσον αφορά τον υπολειπόμενο χρόνο του χρόνου εξυπηρέτησης που βρίσκεται σε εξέλιξη, αυτός είναι σαν να ξεκινάει εκείνη τη στιγμή, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Επομένως, παρότι ο αριθμός των πελατών δεν είναι ανεξάρτητος με τον παρελθόντα χρόνο της τρέχουσας εξυπηρέτησης, είναι ανεξάρτητος με τον υπολειπόμενο. Έτσι, ο χρόνος παραμονής ενός επιλεγμένου πελάτη που βρίσκει n άτομα κατά την άφιξή του και αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα ισούται με το άθροισμα $n + 1$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $\text{Exp}(\mu)$. Επομένως, ο μέσος χρόνος παραμονής είναι $\frac{n+1}{\mu}$.

Ας θεωρήσουμε ότι ένας επιλεγμένος πελάτης ακολουθεί τη στρατηγική $\mathbf{q}' = (q_0', q_1', q_2', ...)$, όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν τη στρατηγική $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, ...)$, και βλέπει n πελάτες, καθώς φθάνει στο σύστημα. Τότε, η ωφέλειά του είναι

$$\mathscr{U}(\mathbf{q}', \mathbf{q}|n) = (1 - q_n') \cdot 0 + q_n' \left(r - p - \frac{c(n+1)}{\mu} \right).$$

Επομένως, το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων $BR(\mathbf{q}|n)$ ενός επιλεγμένου πελάτη έναντι της στρατηγικής $\mathbf{q}$ των άλλων, όταν βρίσκει n πελάτες στο σύστημα είναι

$$BR(\mathbf{q}|n) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } r - p - \frac{c(n+1)}{\mu} < 0 \\ [0,1], & \text{αν } r - p - \frac{c(n+1)}{\mu} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } r - p - \frac{c(n+1)}{\mu} > 0, \end{cases}$$

ή λύνοντας ως προς n

$$BR(\mathbf{q}|n) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } \frac{\mu(r-p)}{c} - 1 < n \\ [0,1], & \text{αν } \frac{\mu(r-p)}{c} - 1 = n \\ \{1\}, & \text{αν } \frac{\mu(r-p)}{c} - 1 > n. \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.3 *Στο πρόβλημα εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, η στρατηγική κατωφλίου n_e με*

$$n_e = n_e(p) = \left\lfloor \frac{\mu(r-p)}{c} \right\rfloor,$$

σύμφωνα με την οποία ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα εφόσον το πλήθος των πελατών στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου του ιδίου είναι το πολύ n_e είναι κυριαρχούσα στρατηγική (και επομένως και στρατηγική ισορροπίας).

Ο διαχειριστής του συστήματος, όταν δρα ως κοινωνικός σχεδιαστής, επιδιώκει να επιβάλει μια κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $\mathbf{q}_{soc}$, που να μεγιστοποιεί τη συνολική κοινωνική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα, δηλαδή την ποσότητα

$$S_{soc}^{(obs)}(\mathbf{q}) = S_{soc}^{(obs)}(q_0, q_1, \ldots) = \lambda^*(\mathbf{q})r - cE_{\mathbf{q}}[Q], \tag{10.9}$$

όπου $\lambda^*(\mathbf{q})$ ο ρυθμός διαπέρασης του συστήματος, υπό τη στρατηγική $\mathbf{q}$, και $E_{\mathbf{q}}[Q]$ ο μέσος αριθμός πελατών σε κατάσταση ισορροπίας.

Κάτω από μια στρατηγική εισόδου $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό αφίξεων $\lambda_n = \lambda q_n$ και σταθερό ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_n = \mu$. Η στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών θα είναι τότε (p_n), όπου

$$p_n = \begin{cases} B, & \text{αν } n = 0 \\ B\rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases}$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$ και

$$B = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}\right)^{-1}.$$

Η λύση του προβλήματος αυτού γίνεται τότε με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό, οπότε και αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι τύπου κατωφλίου. Εμείς θα επικεντρωθούμε στο πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης που μπορεί να επιτύχει ο κοινωνικός σχεδιαστής, επιβάλλοντας ένα τέλος (τιμή) εισόδου που είναι κοινό για όλους τους πελάτες.

Ας υποθέσουμε ότι ο διαχειριστής επιβάλλει τέλος εισόδου p. Τότε οι πελάτες υιοθετούν τη στρατηγική κατωφλίου $n_e(p) = \left\lfloor \frac{\mu(r-p)}{c} \right\rfloor$. Το σύστημα συμπεριφέρεται τότε ως μια M/M/1/$n_e(p)$ ουρά. Ας υποθέσουμε, για συντομία, ότι $\rho \neq 1$. Τότε, ισχύουν τα αποτελέσματα που έχουμε συναγάγει στην ενότητα 9.5.1, με $k =$

$n_e(p)$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους (9.34) και (9.35) για τον ρυθμό διαπέρασης και το μέσο μήκος ουράς, αντίστοιχα, και αντικαθιστώντας στην (10.9) έχουμε ότι η κοινωνική ωφέλεια, όταν επιβληθεί η στρατηγική εισόδου κατωφλίου με κατώφλι n, μέσω κατάλληλης τιμής είναι

$$S_{soc}^{(obs)}(n) = \lambda r \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - c\left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right].$$

Με απλές πράξεις, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) \;=\; \frac{\lambda r(1-\rho)^2\rho^{n-1}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} + \frac{c((n+1)\rho-\rho^{n+1}-n)\rho^n}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}.$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda r(1-\rho)^2 \geq c\rho(n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{r\mu}{c} \geq \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

Έστω $g(n)$ η ποσότητα στο δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας. Τότε

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (10.10)\\ &= \frac{1}{(1-\rho)^2}\Big(n(1-\rho)-\rho(1-\rho^n)\Big) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\rho^k\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k), \end{aligned}$$

η οποία είναι προφανώς γνησίως αύξουσα ως προς n. Επομένως, υπάρχει μοναδικό n_{soc} τέτοιο ώστε $g(n) \leq \frac{r\mu}{c}$, για $n \leq n_{soc}$, ενώ $g(n) > \frac{r\mu}{c}$, για $n > n_{soc}$. Οπότε, $S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) \geq 0$ για $n \leq n_{soc}$, ενώ $S_{soc}^{(obs)}(n) - S_{soc}^{(obs)}(n-1) < 0$ για $n > n_{soc}$. Επομένως, η $S_{soc}^{(obs)}(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_{soc}. Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.4 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου έχει κατώφλι n_{soc} που δίνεται από τον τύπο*

$$n_{soc} = \max\left\{n : g(n) \leq \frac{r\mu}{c}\right\},$$

όπου η $g(n)$ δίνεται από την (10.10). Το κατώφλι αυτό επάγεται από τον διαχειριστή του συστήματος, θέτοντας τέλος εισόδου p_{soc} ώστε $n_{soc} = \left\lfloor \frac{\mu(r-p_{soc})}{c} \right\rfloor$, δηλαδή οποιοδήποτε $p_{soc} \in \left(r - \frac{c(n_{soc}-1)}{\mu}, r - \frac{cn_{soc}}{\mu}\right]$.

Επιπλέον, ισχύει ότι $n_{soc} \leq n_e(0)$, δηλαδή, αν δεν επιβληθεί τέλος εισόδου, τότε το ατομικά βέλτιστο κατώφλι εισόδου για τους πελάτες είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κοινωνικά βέλτιστο. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} g(n) - n &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k) - \frac{1}{1-\rho}n(1-\rho) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^{k-1}) \geq 0, \end{aligned}$$

οπότε $g(n_{soc}) \geq n_{soc}$. Όμως, $g(n_{soc}) \leq \frac{r\mu}{c}$, από τον ορισμό του n_{soc}, οπότε $n_{soc} \leq \frac{r\mu}{c}$ που τελικά δίνει $n_{soc} \leq \left\lfloor \frac{r\mu}{c} \right\rfloor = n_e(0)$.

Βλέπουμε, επομένως, ότι χωρίς την επιβολή κάποιου τέλους εισόδου, οι πελάτες είναι πρόθυμοι να μπαίνουν πιο εύκολα απ' ό,τι είναι κοινωνικά βέλτιστο. Αυτό γίνεται διότι αγνοούν τις «εξωτερικότητες» (αρνητικές επιδράσεις) που επάγουν με την είσοδό τους στους μελλοντικούς πελάτες. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και στο αντίστοιχο πρόβλημα της μη-παρατηρήσιμης M/M/1 ουράς.

Περνάμε τώρα στο πρόβλημα του μονοπωλίου. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε ότι ο διαχειριστής επιβάλλει κάποιο τέλος εισόδου με σκοπό τη βελτιστοποίηση της δικής του ωφέλειας. Αν επιβληθεί τέλος p, τότε οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική κατωφλίου $n_e(p)$ και το κέρδος γίνεται $\lambda^* p$. Για να βρούμε ποιο είναι το κατώφλι n_{prof} που βελτιστοποιεί το κέρδος, εκφράζουμε το κέρδος συναρτήσει του επιβληθέντος κατωφλίου n. Για να υιοθετήσουν κατώφλι n οι πελάτες θα πρέπει να τεθεί τέλος εισόδου p τέτοιο ώστε $\left\lfloor \frac{(r-p)\mu}{c} \right\rfloor = n$. Στο πρόβλημα του μονοπωλίου θα πρέπει να τεθεί η μέγιστη τιμή που επάγει το συγκεκριμένο κατώφλι, επομένως η $p = r - \frac{cn}{\mu}$. Τότε το κέρδος του μονοπωλίου είναι:

$$
\begin{aligned}
S_{prof}^{(obs)}(n) &= \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \left(r - \frac{cn}{\mu} \right) \\
&= \lambda r \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} \left(1 - \frac{n}{\nu_e} \right),
\end{aligned}
$$

όπου $\nu_e = \frac{r\mu}{c}$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι για $n > n_e(0) = \lfloor \frac{r\mu}{c} \rfloor$ ισχύει $S_{prof}(n) < 0$, αφού ο διαχειριστής πρέπει να θέσει αρνητικό τέλος εισόδου (δηλαδή πρέπει να επιδοτήσει την είσοδο) για να επάγει κατώφλι μεγαλύτερο από το $n_e(0)$. Επομένως, είναι βέβαιο ότι για το κατώφλι n_{prof} της βελτιστοποίησης του κέρδους του μονοπωλίου ισχύει $n_{prof} \leq n_e(0)$.

Για να δούμε πού βελτιστοποιείται η συνάρτηση $S_{prof}^{(obs)}(n)$, θεωρούμε τον λόγο $S_{prof}^{(obs)}(n)/S_{prof}^{(obs)}(n-1)$. Έχουμε

$$
\frac{S_{prof}^{(obs)}(n)}{S_{prof}^{(obs)}(n-1)} = \frac{(1-\rho^n)^2(\nu_e - n)}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^{n-1})(\nu_e - n + 1)}.
$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{S_{prof}^{(obs)}(n)}{S_{prof}^{(obs)}(n-1)} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n}(\nu_e - n + 1) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \\
&\Leftrightarrow \quad \nu_e - n \geq \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{r\mu}{c} \geq n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}.
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $h(n)$ με

$$
h(n) = n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \tag{10.11}
$$

αποδεικνύεται ότι είναι αύξουσα ως προς n, οπότε υπάρχει μοναδικό n_{prof} τέτοιο ώστε $h(n) \leq \frac{r\mu}{c}$, για $n \leq n_{prof}$, ενώ $h(n) > \frac{r\mu}{c}$, για $n > n_{prof}$. Οπότε, η $S_{prof}^{(obs)}(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην n_{prof}. Έτσι, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 10.5 *Στο πρόβλημα της εισόδου/αποχώρησης των πελατών στην παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά, η βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου για το μονοπώλιο έχει κατώφλι n_{prof} που δίνεται από τον τύπο*

$$n_{prof} = \max\left\{n : h(n) \leq \frac{r\mu}{c}\right\},$$

όπου η $h(n)$ δίνεται από την (10.11). Το κατώφλι αυτό επάγεται από τον διαχειριστή του συστήματος, θέτοντας τέλος εισόδου $p_{prof} = r - \frac{cn_{prof}}{\mu}$.

Αποδεικνύεται ότι $n_{prof} \leq n_{soc} \leq n_e(0)$, η οποία σχέση αναφέρεται ως ανισότητα του Naor.

10.6 Ασκήσεις

Άσκηση 10.1 *Λύστε το πρόβλημα της επιλογής ρυθμού εξυπηρέτησης, όταν το σύνολο εφικτών τιμών του ρυθμού εξυπηρέτησης είναι κάποιο διάστημα $[\mu_L, \mu_U]$. Επίσης, λύστε το πρόβλημα όταν το σύνολο εφικτών τιμών είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$.*

Άσκηση 10.2 *Στο πρόβλημα της επιλογής ρυθμού εξυπηρέτησης, υποθέστε ότι το κόστος αναμονής ενός πελάτη που παραμένει για χρόνο S στο σύστημα δεν είναι cS (γραμμικό), αλλά cS^a με $a > 0$ γνωστή σταθερά. Να διατυπωθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης που πρέπει να επιλυθεί σε αυτήν την περίπτωση και να λυθεί. Για ποιες τιμές του a, είναι η αντικειμενική συνάρτηση (του κόστους ανά χρονική μονάδα) κυρτή ως προς μ;*

Άσκηση 10.3 *Θεωρήστε το πρόβλημα της επιλογής ρυθμού αφίξεων και ρυθμού εξυπηρέτησης για την M/M/1 ουρά, όπου οι μεταβλητές απόφασης είναι ο ρυθμός αφίξεων λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ, όταν υπάρχει κέρδος r ανά εξυπηρετούμενο πελάτη, κόστος s ανά μονάδα ρυθμού εξυπηρέτησης και χρονική μονάδα και κόστος c ανά παρόντα πελάτη και χρονική μονάδα. Διατυπώστε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους ανά χρονική μονάδα και επιλύστε το. Τι παρατηρείτε;*

Άσκηση 10.4 *Θεωρούμε επιβάτες που φθάνουν σε έναν σταθμό μεταφορικών μέσων ενός τερματικού σταθμού αεροδρομίου σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και οι οποίοι αντιμετωπίζουν το πρόβλημα επιλογής μεταφορικού μέσου. Οι επιλογές που έχουν είναι δύο: Είτε να χρησιμοποιήσουν μικρά λεωφορεία (shuttles) είτε τρένα. Τα τρένα φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_B(x)$ και έχουν απεριόριστη χωρητικότητα. Τα μικρά λεωφορεία αναχωρούν το ένα πίσω από το άλλο, μόλις συμπληρωθούν όλες οι θέσεις τους. Καθένα από αυτά έχει χωρητικότητα N. Η μετακίνηση και με τα δύο μέσα είναι δωρεάν. Σκοπός των επιβατών είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου χρόνου αναμονής τους στον σταθμό.*

1. *Να προσδιοριστούν οι στρατηγικές ισορροπίας των πελατών στη μη-παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι επιβάτες αποφασίζουν σε ποιο μέσο θα επιβιβαστούν βασιζόμενοι μόνο στη γνώση των παραμέτρων του συστήματος.*

2. *Να προσδιοριστούν οι στρατηγικές ισορροπίας των πελατών στην παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι επιβάτες αποφασίζουν σε ποιο μέσο θα επιβιβαστούν αφού παρατηρήσουν τον αριθμό επιβατών σε αναμονή στα μικρά λεωφορεία.*

3. *Να λυθεί το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης στην παρατηρήσιμη και στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση.*

Άσκηση 10.5 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης τύπου M/M/1, όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την $Exp(\mu)$ κατανομή, υπάρχει 1 υπηρέτης και απεριόριστος χώρος αναμονής. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες, κατά την άφιξή τους και χωρίς να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών που υπάρχει στο σύστημα μπορούν να αγοράσουν ένα κουπόνι προτεραιότητας σε τιμή p ή να* *μην το αγοράσουν. Επιπλέον, γνωρίζουν ότι επιβαρύνονται με κόστος με ρυθμό c όσο βρίσκονται στο σύστημα. Ο υπηρέτης εξυπηρετεί με FCFS τους πελάτες που έχουν αγοράσει το κουπόνι προτεραιότητας και αν δεν υπάρχουν τέτοιοι πελάτες, τότε εξυπηρετεί αυτούς που δεν έχουν αγοράσει το κουπόνι, και πάλι με FCFS. Στην περίπτωση που εξυπηρετείται ένας πελάτης που δεν έχει αγοράσει το κουπόνι και αφιχθεί πελάτης που αγοράζει το κουπόνι, η εξυπηρέτηση του πελάτη θα διακοπεί ώστε ο υπηρέτης να εξυπηρετήσει τον πελάτη με κουπόνι προτεραιότητας. Όλοι οι πελάτες που φθάνουν στο σύστημα εισέρχονται σε αυτό και δεν (υπ)αναχωρούν μέχρι να εξυπηρετηθούν. Η στρατηγική ενός πελάτη είναι η πιθανότητα αγοράς κουπονιού προτεραιότητας.*

1. *Να βρεθεί η βέλτιστη απάντηση ενός επιλεγμένου πελάτη έναντι μιας στρατηγικής των υπολοίπων και να εξεταστεί αν έχουμε κατάσταση FTC ή ATC.*
2. *Να βρεθούν οι στρατηγικές ισορροπίας.*
3. *Να βρεθούν οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές.*

10.7 Σχόλια

Τα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού και βέλτιστου ελέγχου συστημάτων εξυπηρέτησης έχουν μελετηθεί αρκετά εκτενώς στο πλαίσιο της Θεωρίας Ουρών.

Το κλασικό εισαγωγικό βιβλίο του Wolff 1989 περιέχει σύντομες αναφορές στα περισσότερα κλασικά προβλήματα σχεδιασμού που είδαμε στο παρόν κεφάλαιο. Το βιβλίο του S.Jr. Stidham 2009 αφιερώνεται εξολοκλήρου στην παρουσίαση προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού και παρουσιάζει τις βασικές μεθόδους και αποτελέσματα που έχουν αναπτυχθεί.

Η βιβλιογραφία που αφορά τον βέλτιστο έλεγχο συστημάτων εξυπηρέτησης είναι εξαιρετικά πλούσια. Το εισαγωγικό βιβλίο των Cassandras και Lafortune 2008 παρουσιάζει τα βασικά προβλήματα βέλτιστου ελέγχου που είδαμε στο παρόν κεφάλαιο με αρκετά στοιχειώδη τρόπο, ενσωματώνοντας μια εισαγωγή στις απαραίτητες έννοιες και τεχνικές από τον Στοχαστικό Δυναμικό Προγραμματισμό (Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων). Ένα σημείο εκκίνησης για τον αναγνώστη που θα ήθελε να δει τις αρχικές πηγές αυτής της περιοχής είναι οι εργασίες S.Jr Stidham 1985 και S.Jr. Stidham και Weber 1993. Μια παρουσίαση της θεωρίας του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού με έμφαση στην εφαρμογή του στον βέλτιστο έλεγχο συστημάτων εξυπηρέτησης δίνεται στο αρκετά θεωρητικό βιβλίο Sennott 1998. Μια μεθοδολογία που έχει αναπτυχθεί για την εφαρμογή του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού στα συστήματα εξυπηρέτησης με καλά αποτελέσματα αναπτύσσεται στην εργασία του Koole 2007.

Η στρατηγική οπτική στη Θεωρία Ουρών Αναμονής εισήχθη στην εργασία του Naor 1969 και οι σχετικές μελέτες πολλαπλασιάστηκαν κατά τη διάρκεια των τελευταίων 50 ετών. Στη μονογραφία των Hassin και Haviv 2003 μπορεί να βρει κανείς μια ωραία σύνοψη της βασικής μεθοδολογίας και των αποτελεσμάτων στην περιοχή αυτή. Τα βιβλία S.Jr. Stidham 2009 και Hassin 2016 περιέχουν επιπλέον υλικό καθώς και τη σύνοψη περισσότερων σχετικών μοντέλων.

Για τη ρύθμιση ενός συστήματος εξυπηρέτησης, μπορεί κανείς να εφαρμόσει γενικές οικονομικές ιδέες, όπως την κατάλληλη τιμολόγηση των υπηρεσιών που προσφέρει ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Επιπλέον, υπάρχουν κάποια εργαλεία που είναι διαθέσιμα μόνο για συστήματα εξυπηρέτησης, όπως η ανάθεση/πώληση προτεραιοτήτων στους πελάτες και ο έλεγχος της πληροφορίας που παρέχεται σε αυτούς. Ο έλεγχος της πληροφορίας είναι μια ιδιαίτερα ενεργή περιοχή. Για μια εισαγωγή και τη σχετική βιβλιογραφία ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Economou 2021, καθώς και στο κεφάλαιο 4 του Hassin 2016, και την εργασία της Ibrahim 2018.

Βιβλιογραφία

[1] C.G. Cassandras και S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems, 2nd Edition*. Springer, 2008.

[2] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[3] S.Jr. Stidham. *Optimal Design of Queueing Systems*. CRC Press, 2009. ISBN: 978-1584880769.

[4] S.Jr Stidham. "Optimal control of admission to a queueing system". Στο: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30.8 (1985), σσ. 705–713.

[5] S.Jr. Stidham και R. Weber. "A survey of Markov decision models for control of networks of queues". Στο: *Queueing Systems* 13 (1993), σσ. 291–314.

[6] L.I. Sennott. *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*. Wiley-Interscience, 1998. ISBN: 978-0471161202.

[7] G. Koole. "Monotonicity in Markov Reward and Decision Chains: Theory and Applications". Στο: *Foundations and Trends in Stochastic Systems* 1.1 (2007), σσ. 1–76.

[8] P. Naor. "The regulation of queue size by levying tolls". Στο: *Econometrica* 37 (1969), σσ. 15–24.

[9] R. Hassin και M. Haviv. *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer, 2003. ISBN: 978-1402072031.

[10] R. Hassin. *Rational Queueing*. CRC Press, 2016. ISBN: 978-1498745277.

[11] A. Economou. "The Impact of Information Structure on Strategic Behavior in Queueing Systems". Στο: *Anisimov V. and Limnios, N. (eds.) Queueing Theory 2*. John Wiley και Sons, Ltd, 2021. Κεφ. 4, σσ. 137–169. ISBN: 978-1119755234. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119755234.ch4.

[12] R. Ibrahim. "Sharing delay information in service systems: a literature survey". Στο: *Queueing Systems* 89 (2018), σσ. 49–79. DOI: 10.1007/s11134-018-9577-y.

Μέρος IV

ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΒΑΣΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι βασικές έννοιες της Θεωρίας Αποθεμάτων. Καταρχάς αναλύονται τα κυριότερα πλεονεκτήματα για τη διατήρηση αποθεμάτων από εταιρείες παραγωγής ή πώλησης προϊόντων, όπως επίσης και διάφορα κόστη που επάγονται από αυτήν τη δραστηριότητα. Στη συνέχεια αναλύονται δύο βασικά μαθηματικά μοντέλα διαχείρισης και ελέγχου αποθεμάτων που αποτελούν τη βάση για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας σε πιο ρεαλιστικά προβλήματα.

Στο πρώτο μοντέλο που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας μελετάται η εξισορρόπηση μεταξύ των οικονομιών κλίμακας που επιτυγχάνονται από τη διατήρηση αποθεμάτων ενός προϊόντος και του κόστους αποθήκευσης που επιφέρεται. Αναλύονται, επίσης, δύο παραλλαγές του βασικού προβλήματος, με καθυστέρηση στην παράδοση των παραγγελιών από τους προμηθευτές και στην ικανοποίηση της ζήτησης των πελατών, αντίστοιχα. Στο δεύτερο βασικό μοντέλο που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μοντέλο του εφημεριδοπώλη, αναλύονται οι επιπτώσεις της αβεβαιότητας στη ζήτηση και μελετάται η βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων που εξισορροπεί το κόστος απώλητων ποσοτήτων στην περίπτωση που η ζήτηση είναι μικρότερη από την ποσότητα που έχει αποθηκευτεί, με το κόστος ελλείψεων στην περίπτωση μη επαρκούς αποθέματος για την κάλυψη της ζήτησης.

Προαπαιτούμενη γνώση

Η μόνη προαπαιτούμενη γνώση για το κεφάλαιο αυτό είναι βασικές γνώσεις βελτιστοποίησης συναρτήσεων μιας μεταβλητής και ένα εισαγωγικό μάθημα Θεωρίας Πιθανοτήτων, όπως αυτά που περιλαμβάνονται στα προγράμματα σπουδών Τμημάτων Θετικών Επιστημών, Πολυτεχνικών Σχολών, καθώς και Σχολών Οικονομικών και Διοίκησης Επιχειρήσεων.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα [Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

11.1 Η έννοια του αποθέματος – Πλεονεκτήματα και κόστη αποθεμάτων

Το αντικείμενο της Θεωρίας Αποθεμάτων είναι η μελέτη συστημάτων στα οποία ένα ή περισσότερα αγαθά αποθηκεύονται για μελλοντική χρήση. Τα κύρια ερωτήματα που προκύπτουν σε αυτά τα συστήματα αφορούν τις ποσότητες που πρέπει να αποθηκευτούν και τις χρονικές στιγμές που πρέπει να γίνουν οι παραγγελίες για αυτές τις ποσότητες. Από την πλευρά των εφαρμογών, τα προβλήματα αυτά έχουν μεγάλη οικονομική σημασία, επειδή τα αποθέματα παίζουν κρίσιμο ρόλο στην αποτελεσματική οργάνωση της παραγωγής, μεταφοράς και διακίνησης προϊόντων, αλλά από την άλλη πλευρά εισάγουν σημαντικά κόστη στην παραγωγική διαδικασία. Τα προβλήματα της Θεωρίας Αποθεμάτων έχουν επίσης μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύσσονται για τη μελέτη τους είναι συνήθως πολύπλοκα και απαιτούν ισχυρή μαθηματική και υπολογιστική μεθοδολογία. Έχουν, επίσης, άμεση σχέση με τα μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, επειδή τα αποθέματα είναι διαδικασίες αποφάσεων που εξελίσσονται στον χρόνο κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, εξαιτίας των διακυμάνσεων στη ζήτηση, τη διαθεσιμότητα των προμηθευτών, τους χρόνους παράδοσης κλπ., ενώ ταυτόχρονα απαιτούν τη λήψη αποφάσεων με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κόστους ή τη μεγιστοποίηση ωφέλειας.

Με τον όρο απόθεμα εννοούμε μια ποσότητα ενός αγαθού που αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση. Με τον όρο προϊόν θα αναφερόμαστε στο αγαθό που αποθηκεύεται, παρόλο που στη γενική περίπτωση αυτό μπορεί να μην είναι ένα προϊόν παραγωγής αλλά και άλλου τύπου υλικό. Σε μια παραγωγική διαδικασία γενικά διατηρούνται αποθέματα πολλών διαφορετικών τύπων (πρώτων υλών, ενδιάμεσων ή ημιτελών προϊόντων, τελικών προϊόντων, ανταλλακτικών κλπ.). Αν και για κάθε κατηγορία προκύπτουν αρκετά επιμέρους ερωτήματα και προβλήματα, σε όλες υπάρχουν και πολλά κοινά βασικά στοιχεία, που αφορούν τους λόγους που απαιτείται διατήρηση αποθέματος και τα πλεονεκτήματα που αυτό προσφέρει, αλλά ταυτόχρονα και παράγοντες κόστους που εισάγονται από αυτήν τη δραστηριότητα.

Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η διατήρηση αποθεμάτων είναι ποικίλα, αλλά τα πιο βασικά μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Οικονομίες Κλίμακας Έστω Q η ποσότητα ενός προϊόντος που παράγεται σε έναν κύκλο παραγωγής ή παραγγέλλεται από έναν εξωτερικό προμηθευτή και $C(Q)$ το συνολικό κόστος παραγωγής ή κτήσης αυτής της ποσότητας. Ο όρος οικονομίες κλίμακας αναφέρεται στο φαινόμενο όπου το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος $\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας Q. Πολλές παραγωγικές διαδικασίες εμφανίζουν οικονομίες κλίμακας για διάφορους λόγους, π.χ. επειδή με την αύξηση της παραγόμενης ποσότητας το ανθρώπινο δυναμικό εξοικειώνεται και εργάζεται πιο αποτελεσματικά με αποτέλεσμα την αύξηση της παραγωγικότητας κλπ.

Ένας συνηθισμένος λόγος είναι η ύπαρξη σταθερού (πάγιου) κόστους παραγωγής ή παραγγελίας, το οποίο είναι ανεξάρτητο της ποσότητας. Ως ένα απλό παράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση κόστους $C(Q) = K + cQ$, όπου K είναι το σταθερό κόστος που πληρώνεται ανεξάρτητα από την ποσότητα που παράγεται και c είναι το μοναδιαίο κόστος παραγωγής. Σε περιπτώσεις που η ποσότητα Q παράγεται, το κόστος K προκύπτει επειδή για να ξεκινήσει η παραγωγή συνήθως απαιτούνται δραστηριότητες όπως ρύθμιση μηχανημάτων, αλλαγές υλικών κλπ., ανεξάρτητα από την ποσότητα που παράγεται. Αν το προϊόν αγοράζεται από εξωτερική πηγή, το κόστος K αναφέρεται ως σταθερό κόστος παραγγελίας και περιλαμβάνει όλα τα διαδικαστικά κόστη υποβολής της παραγγελίας, σταθερά κόστη παράδοσης (π.χ. στην περίπτωση που ο προμηθευτής χρεώνει ένα σταθερό κόστος για τη μεταφορά του προϊόντος ανεξάρτητα από την ποσότητα που παραδίδεται) κλπ. Το κόστος ανά μονάδα c συνήθως αναφέρεται στο πραγματικό κόστος της παραγωγής (υλικά, εργασία κλπ.) ή αγοράς του προϊόντος. Στο παράδειγμα αυτό το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος είναι ίσο με $\bar{C}(Q) = \frac{K}{Q} + c$, που είναι φθίνουσα συνάρτηση του Q, επομένως η συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους παρουσιάζει οικονομίες κλίμακας. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα, το σταθερό κόστος επιμερίζεται σε μεγαλύτερη ποσότητα με αποτέλεσμα το μέσο κόστος να μειώνεται.

Από την παραπάνω συζήτηση γίνεται φανερό ότι αν ένα προϊόν εμφανίζει οικονομίες κλίμακας, η παραγωγή ή αγορά μεγαλύτερων ποσοτήτων από ότι είναι άμεσα απαραίτητο και η αποθήκευσή τους για μελλοντική χρήση δίνει οικονομικό πλεονέκτημα γιατί μειώνει το κόστος παραγωγής ή κτήσης του προϊόντος. Στην περίπτωση του σταθερού κόστους, αυτό σημαίνει ότι με το να παράγονται ή να αγοράζονται μεγαλύτερες ποσότητες σε έναν κύκλο, το σταθερό κόστος πληρώνεται πιο σπάνια επειδή αποφεύγονται οι συχνές παραγγελίες. Γενικά οι οικονομίες κλίμακας είναι ένας από τους βασικότερους λόγους διατήρησης αποθεμάτων σε προϊόντα μαζικής κατανάλωσης με μεγάλους όγκους παραγωγής και πωλήσεων.

Εξομάλυνση Παραγωγής Σε πολλά προϊόντα οι πωλήσεις παρουσιάζουν σημαντικές εποχιακές διακυμάνσεις (π.χ. σε χειμερινά ή καλοκαιρινά ρούχα). Αν τα προϊόντα αυτά παράγονται σε εξειδικευμένα μηχανήματα που δεν έχουν μεγάλη ευελιξία, τότε για να αντιμετωπιστεί θα πρέπει η παραγωγή να έχει μεγάλη δυναμικότητα που όμως θα χρησιμοποιείται για περιορισμένο χρονικό διάστημα και τον υπόλοιπο χρόνο θα παραμένει ανενεργή. Εναλλακτικά, η παραγωγή μπορεί να γίνεται σταδιακά με μικρότερο ρυθμό σε όλη τη διάρκεια του χρόνου και το προϊόν να αποθηκεύεται για πώληση στις περιόδους μεγάλης ζήτησης. Επομένως η διατήρηση αποθεμάτων συντελεί στην αύξηση της αποδοτικότητας της παραγωγής.

Αντιμετώπιση Αβεβαιότητας Η αβεβαιότητα είναι ίσως ο σημαντικότερος παράγοντας που οδηγεί σε διατήρηση αποθεμάτων σε μια παραγωγική διαδικασία. Η αβεβαιότητα υπεισέρχεται με πολλούς τρόπους και επιφέρει σημαντική πολυπλοκότητα στη μελέτη και ανάλυση αυτών των προβλημάτων. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι οι τυχαίες διακυμάνσεις στη ζήτηση του προϊόντος. Σε περιπτώσεις που η ζήτηση έχει σημαντική διακύμανση, η διατήρηση ποσοτήτων προϊόντος σε απόθεμα είναι ένα μέσο προστασίας και αποφυγής ελλείψεων. Εκτός από τη ζήτηση, αβεβαιότητα και διακυμάνσεις μπορεί να υπάρχουν και στη διαθεσιμότητα του προϊόντος, δηλαδή στη δυναμικότητα της παραγωγής που μπορεί να επηρεάζεται από καιρικά φαινόμενα, βλάβες των μηχανημάτων κλπ., στη διαθεσιμότητα πρώτων υλών που εξαρτάται από τους προμηθευτές κλπ. Επιπλέον, αβεβαιότητα μπορεί να υπάρχει και στον χρόνο παράδοσης των παραγγελιών εξαιτίας προβλημάτων στη μεταφορά και τη διακίνηση των προϊόντων. Τα αποθέματα που διατηρούνται για την αντιμετώπιση ελλείψεων εξαιτίας απρόβλεπτων γεγονότων στη ζήτηση, στις προμήθειες ή στους χρόνους παράδοσης ονομάζονται αποθέματα ασφαλείας. Τέλος, μια σημαντική πηγή αβεβαιότητας είναι και οι διακυμάνσεις στα κόστη παραγωγής και πρώτων υλών. Σε περιόδους έντονων διακυμάνσεων, η διατήρηση αποθεμάτων μπορεί να παρέχει σημαντική εξασφάλιση έναντι μελλοντικών αυξήσεων του κόστους.

Παρ΄όλα τα πλεονεκτήματα που προσφέρει σε μια παραγωγική διαδικασία, η διατήρηση αποθεμάτων εισάγει επίσης και σημαντικά πρόσθετα κόστη. Τα κόστη αυτά προέρχονται από διάφορες πηγές, όπως η επένδυση για τη δημιουργία ή ενοικίαση αποθηκευτικών χώρων, τα λειτουργικά κόστη των αποθηκών, οι απώλειες προϊόντων λόγω φθοράς κατά τη διάρκεια της αποθήκευσης, η απαξίωση των προϊόντων με την πάροδο του χρόνου σε περιπτώσεις που υπάρχουν νεότερες εκδόσεις ή μοντέλα κλπ. Τέλος, ένας σημαντικός παράγοντας είναι το κόστος δεσμευμένου κεφαλαίου. Αυτό είναι το έμμεσο κόστος που προκύπτει από το γεγονός ότι το κεφάλαιο που δαπανήθηκε για την παραγωγή ή αγορά των αποθηκευμένων προϊόντων δεν έχει κάποια απόδοση όσο το προϊόν παραμένει στην αποθήκη, ενώ αν η παραγωγή καθυστερούσε μέχρι τη στιγμή που η αντίστοιχη ποσότητα θα χρειαζόταν να διατεθεί, το κεφάλαιο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στο ενδιάμεσο διάστημα σε άλλες δραστηριότητες και να αποδώσει κέρδος.

Από την παραπάνω συζήτηση φαίνεται ότι η διαχείριση αποθεμάτων είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που συνδέεται άμεσα με τη γενικότερη οργάνωση της παραγωγής και διακίνησης προϊόντων από μια εταιρεία ή έναν οργανισμό. Το αντικείμενο της Θεωρίας Αποθεμάτων είναι η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την ανάλυση των προβλημάτων που προκύπτουν όταν διατηρούνται αποθέματα με σκοπό την αποτελεσματική διαχείριση αυτών των διαδικασιών.

11.2 Κατηγορίες προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι στη διαχείριση αποθεμάτων υπεισέρχονται πολλοί και διαφορετικοί παράγοντες, με αποτέλεσμα τα προβλήματα που προκύπτουν να έχουν μεγάλη ποικιλία, ανάλογα με τον τύπο του προϊόντος, τις συνθήκες της παραγωγής και διακίνησης και τον τρόπο που αυτά μοντελοποιούνται. Παρακάτω αναφέρουμε μερικές βασικές κατηγοριοποιήσεις των προβλημάτων της Θεωρίας Αποθεμάτων σχετικά με τον τρόπο παρακολούθησης του αποθέματος, τη μοντελοποίηση ή όχι της αβεβαιότητας, τον τρόπο αντιμετώπισης των ελλείψεων και τη δομή του συστήματος παραγωγής και αποθήκευσης.

Η πρώτη κατηγοριοποίηση αναφέρεται στον τρόπο παρακολούθησης του αποθέματος και με βάση αυτό τα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων διακρίνονται σε προβλήματα συνεχούς ή περιοδικής παρακολούθησης. Στα προβλήματα συνεχούς παρακολούθησης, ο διαχειριστής του συστήματος έχει συνεχώς πληροφόρηση σχετικά με το ύψος των αποθεμάτων και μπορεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή να κάνει νέες παραγγελίες. Λόγω της εκτεταμένης μηχανογράφησης των αποθηκών, τα μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο στις εφαρμογές. Αντίθετα, στα προβλήματα περιοδικής παρακολούθησης, ο διαχειριστής μπορεί να κάνει νέες παραγγελίες μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που συνήθως είναι περιοδικές (π.χ. στο τέλος της μέρας ή της εβδομάδας). Σε πολλές περιπτώσεις στην πράξη, παρ' όλο που ο διαχειριστής μπορεί να έχει συνεχώς πληροφόρηση για τα αποθέματα, αν υπάρχει περιορισμός ως προς τον χρόνο των παραγγελιών, το πρόβλημα κατατάσσεται στην κατηγορία της περιοδικής παρακολούθησης.

Σχετικά με την αβεβαιότητα, τα μοντέλα διακρίνονται σε ντετερμινιστικά, στα οποία όλες οι παράμετροι του προβλήματος (ζήτηση, χρόνοι παράδοσης, κόστη κλπ.) θεωρούνται γνωστές, και σε στοχαστικά, στα οποία τουλάχιστον μια παράμετρος υπόκειται σε αβεβαιότητα και θεωρείται τυχαία μεταβλητή ή στοχαστική διαδικασία. Και στις δύο περιπτώσεις οι παράμετροι του συστήματος δεν είναι απαραίτητο να είναι σταθερές αλλά μπορεί να μεταβάλλονται με τον χρόνο. Για παράδειγμα, η ζήτηση ενός εποχιακού προϊόντος μπορεί να έχει διακυμάνσεις στη διάρκεια ενός έτους. Στα ντετερμινιστικά μοντέλα αυτές οι χρονικές μεταβολές θεωρούνται γνωστές, ενώ στα στοχαστικά συνήθως μοντελοποιούνται μέσω μιας κατάλληλης στοχαστικής ανέλιξης.

Η δομή του συστήματος παραγωγής και αποθήκευσης αναφέρεται στον τρόπο που τα στάδια της παραγωγής ή διακίνησης ενός προϊόντος συνδέονται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Σε ένα απλό σύστημα με ένα στάδιο η παραγωγή ολοκληρώνεται σε έναν σταθμό, πριν και μετά από τον οποίο μπορεί να υπάρχουν αποθέματα πρώτων υλών και τελικών προϊόντων. Σε ένα σειριακό σύστημα η παραγωγή γίνεται σε στάδια που ακολουθούν το ένα το άλλο με συγκεκριμένη σειρά και μεταξύ των διαδοχικών σταθμών επεξεργασίας μπορεί, επίσης, να υπάρχουν αποθηκευτικοί χώροι για τα ημιτελή προϊόντα. Τέλος, σε ένα γενικό σύστημα, τα στάδια επεξεργασίας μπορεί να είναι διαφορετικά για διαφορετικού τύπου προϊόντα και η διασύνδεση μεταξύ των σταθμών μοντελοποιείται μέσω κατάλληλου δικτύου, ενώ αποθηκευτικοί χώροι μπορεί να υπάρχουν σε διάφορα σημεία του δικτύου παραγωγής. Επίσης, οι αποθηκευτικοί χώροι μπορεί να έχουν πεπερασμένη χωρητικότητα, με αποτέλεσμα όταν το απόθεμα υπερβεί ένα συγκεκριμένο ύψος να μην μπορούν να γίνουν νέες παραλαβές ή μπορεί να θεωρούνται άπειρης χωρητικότητας και να μην υπεισέρχονται περιορισμοί αυτού του τύπου.

Οι ελλείψεις είναι ένα σημαντικό στοιχείο στα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων και ο τρόπος αντιμετώπισής τους επίσης διαφέρει από ένα σύστημα σε άλλο. Γενικά με τον όρο έλλειψη εννοούμε την περίπτωση όπου έρχεται ζήτηση για μια ποσότητα προϊόντος, αλλά δεν υπάρχει αρκετό απόθεμα για να ικανοποιηθεί. Για την περίπτωση αποθέματος σε τελικά προϊόντα, οι ελλείψεις συνήθως αντιμετωπίζονται είτε ως χαμένες πωλήσεις είτε ως εκκρεμότητες προς τους πελάτες. Στην πρώτη περίπτωση μια ζήτηση που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα απορρίπτεται και η πώληση χάνεται. Στη δεύτερη περίπτωση η ποσότητα που ζητείται από τον πελάτη μπαίνει σε εκκρεμότητα με την προοπτική να παραδοθεί όταν έρθουν νέες ποσότητες προϊόντος στην αποθήκη. Η ποσότητα προϊόντος που αντιστοιχεί σε εκκρεμή ζήτηση ονομάζεται εκκρεμότητα (backlog) και συνήθως μοντελοποιείται ως αρνητικό απόθεμα. Όταν το απόθεμα αναφέρεται σε πρώτη ύλη ή ημιτελές προϊόν σε κάποιο στάδιο του συστήματος παραγωγής, οι συνέπειες των ελλείψεων είναι γενικά πιο περίπλοκες, επειδή η έλλειψη προϊόντος σε ένα στάδιο της παραγωγής μπορεί να σταματήσει την παραγωγή σε άλλα στάδια που χρειάζονται το συγκεκριμένο προϊόν για να προχωρήσουν. Πρέπει τέλος να τονιστεί ότι ενώ οι ελλείψεις συνήθως προκαλούνται από τις τυχαίες διακυμάνσεις στη ζήτηση ή τη διαθεσιμότητα του προϊόντος και θεωρούνται ανεπιθύμητα φαινόμενα, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι ελλείψεις και η ικανοποίηση μέρους ή όλης της ζήτησης από backlog είναι μέρος του συνολικού προγραμματισμού της παραγωγής και διακίνησης του προϊόντος (π.χ. στα ηλεκτρονικά καταστήματα πωλήσεων κατά κανόνα η ζήτηση ικανοποιείται ένα χρονικό διάστημα μετά από την παραγγελία του πελάτη).

11.3 Το πρόβλημα της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε ένα πρώτο βασικό μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων, το πρόβλημα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας (Economic Order Quantity - EOQ model). Αν και το πρόβλημα είναι ντετερμινιστικό, είναι χρήσιμο να αναλυθεί, αφενός επειδή βάζει τις βάσεις για τη μελέτη πολλών πιο προχωρημένων μοντέλων και αφετέρου επειδή, παρ' όλη την απλότητά του, έχει βρει αρκετές εφαρμογές στην πράξη.

Το μοντέλο EOQ εστιάζει στην αλληλεπίδραση δύο βασικών ανταγωνιστικών παραγόντων στη διαχείριση αποθεμάτων: αφενός των οικονομιών κλίμακας που οδηγούν σε μεγάλες αγορές και αφετέρου του κόστους αποθήκευσης που οδηγεί σε χαμηλότερα επίπεδα αποθέματος. Το μοντέλο έχει εφαρμογές σε προϊόντα μαζικής κατανάλωσης και μεγάλου όγκου πωλήσεων, στα οποία η ζήτηση δεν παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις μέσα στον χρόνο και μπορεί πρακτικά να θεωρηθεί γνωστή και σταθερή.

Το βασικό μοντέλο EOQ μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Θεωρούμε ένα μοντέλο ελέγχου αποθέματος συνεχούς επιθεώρησης για ένα συγκεκριμένο προϊόν, του οποίου η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή, ίση με a ανά μονάδα χρόνου. Υποθέτουμε ότι το προϊόν αγοράζεται και πωλείται σε συνεχείς ποσότητες. Οι παραγγελίες για αναπλήρωση του αποθέματος μπορούν να γίνουν οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιαδήποτε ποσότητα, ενώ ο χρόνος παράδοσης είναι μηδενικός, δηλαδή η νέα ποσότητα προϊόντος έρχεται ακαριαία στην αποθήκη τη στιγμή που γίνεται η παραγγελία. Επειδή η ζήτηση είναι γνωστή, οι ελλείψεις μπορούν να αποφευχθούν και υπάρχουν μόνο όταν είναι προγραμματισμένες. Στο βασικό μοντέλο EOQ δεν επιτρέπονται.

Σχετικά με τα κόστη που υπεισέρχονται, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα πάγιο κόστος K κάθε φορά που στέλνεται μια νέα παραγγελία, καθώς και κόστος c ανά κομμάτι που παραγγέλλεται. Επίσης, υπάρχει κόστος αποθήκευσης h ανά κομμάτι και χρονική μονάδα. Το πρόβλημα του διαχειριστή είναι να προσδιορίσει μια πολιτική παραγγελιών (δηλαδή τις χρονικές στιγμές που πρέπει να γίνονται οι παραγγελίες και τις αντίστοιχες ποσότητες), έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Προχωράμε τώρα στην ανάλυση αυτού του μοντέλου. Αρχικά μπορούμε να κάνουμε δύο βασικές παρατηρήσεις που απλοποιούν σημαντικά την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής: Πρώτον, είναι εύκολο να δούμε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι ποτέ βέλτιστο να γίνονται παραγγελίες πριν εξαντληθεί το απόθεμα. Πράγματι, αφού οι νέες παραγγελίες έρχονται αμέσως, δεν υπάρχει λόγος να έρχονται νέες ποσότητες πριν να εξαντληθεί το προηγούμενο απόθεμα, επειδή αν γίνει αυτό, θα αυξηθεί το κόστος αποθήκευσης χωρίς να υπάρχει λόγος. Μαθηματικά αυτή η ιδιότητα εκφράζεται ως εξής: Αν $I(t)$ και $Q(t)$ είναι το επίπεδο αποθέματος και η ποσότητα που παραγγελίας, αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή t, τότε πρέπει να ισχύει $I(t)Q(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως ιδιότητα μηδενικού αποθέματος (zero inventory property) και ικανοποιείται από τη βέλτιστη πολιτική σε γενικότερα προβλήματα όπου δεν επιτρέπονται ελλείψεις και ο χρόνος παράδοσης είναι μηδενικός. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι κάθε φορά που γίνεται παραγγελία το σύστημα βρίσκεται ακριβώς στην ίδια κατάσταση, δηλαδή το απόθεμα είναι μηδενικό, ο ορίζοντας προγραμματισμού είναι άπειρος και η ζήτηση και τα κόστη είναι σταθερά. Επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει μια βέλτιστη πολιτική με σταθερή ποσότητα παραγγελίας ανεξάρτητη από τον χρόνο, δηλαδή μια στάσιμη πολιτική.

Μια στάσιμη πολιτική παραγγελιών που ικανοποιεί την ιδιότητα μηδενικού αποθέματος χαρακτηρίζεται από μια μοναδική παράμετρο Q που είναι η ποσότητα παραγγελίας κάθε φορά που μηδενίζεται το απόθεμα. Με βάση τα παραπάνω, χωρίς βλάβη της γενικότητας η βέλτιστη πολιτική μπορεί να αναζητηθεί μέσα στο σύνολο των πολιτικών αυτού του τύπου. Κάτω από μια πολιτική παραγγελιών με ποσότητα Q, η στάθμη του αποθέματος μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ των τιμών 0 και Q. Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αναπληρώσεων του αποθέματος αναφέρεται ως κύκλος αποθέματος και έχει διάρκεια ίση με $T = Q/a$. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, η στάθμη του αποθέματος ξεκινά από το σημείο Q και μειώνεται γραμμικά μέχρι να φτάσει στο μηδέν. Με άλλα λόγια, το ύψος του αποθέματος t χρονικές μονάδες μετά την παραλαβή της τελευταίας παραγγελίας είναι $Q - at$, $t \in [0, Q/a)$.

Τα κόστη που συσσωρεύονται σε έναν κύκλο είναι το πάγιο κόστος παραγγελίας K, το κόστος παραγγελίας για ποσότητα Q προϊόντων που ισούται με cQ, καθώς και κόστη αποθήκευσης. Το συνολικό κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$h\int_0^{Q/a}(Q-at)dt = \frac{hQ^2}{2a}.$$

Επομένως, το συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με $K + cQ + \frac{hQ^2}{2a}$, και το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με τον λόγο του κόστους ενός κύκλου προς το μήκος του κύκλου, δηλαδή:

$$C(Q) = \frac{K + cQ + hQ^2/(2a)}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}. \tag{11.1}$$

Η συνάρτηση $C(Q)$ είναι κυρτή ως προς Q και ελαχιστοποιείται όταν $C'(Q) = 0$. Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}. \tag{11.2}$$

Η ποσότητα Q^* λέγεται Οικονομική Ποσότητα Παραγγελίας (EOQ). Επομένως, η πολιτική παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι να γίνονται παραγγελίες μεγέθους Q^* τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται το απόθεμα.

Κάτω από την πολιτική EOQ το μήκος του κύκλου, δηλαδή το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών, είναι ίσο με

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}},$$

ενώ η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους είναι ίση με

$$C^* = C(Q^*) = \sqrt{2aKh}.$$

11.4 Επεκτάσεις του προβλήματος της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι το πρόβλημα της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας βασίζεται σε πολλές απλουστευτικές παραδοχές, που αφενός διευκολύνουν την ανάλυση, αφετέρου όμως εισάγουν περιορισμούς όσον αφορά την εφαρμοσιμότητά του. Θα δούμε παρακάτω μερικές χρήσιμες γενικεύσεις του βασικού μοντέλου.

11.4.1 Μη μηδενικός χρόνος παράδοσης

Η πρώτη επέκταση αφορά την ύπαρξη μη μηδενικού χρόνου παράδοσης. Υποθέτουμε ότι μεταξύ της στιγμής μιας παραγγελίας και της άφιξης της νέας ποσότητας στην αποθήκη μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα L που αναφέρεται ως χρόνος παράδοσης ή χρόνος καθυστέρησης (lead-time). Εδώ υποθέτουμε ότι η τιμή του L είναι γνωστή και σταθερή. Τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος, δηλαδή η ζήτηση και τα κόστη παραμένουν τα ίδια όπως και στο βασικό μοντέλο. Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστούν οι ποσότητες και οι χρονικές στιγμές παραγγελίας για την ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Η συνάρτηση κόστους δεν αλλάζει σε σχέση με το αρχικό μοντέλο. Η βασική διαφορά είναι ότι εδώ υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των χρονικών στιγμών παραγγελίας και των χρονικών στιγμών άφιξης των παραγγελιών στην αποθήκη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ιδιότητα μηδενικού αποθέματος συνεχίζει να ισχύει ως προς τις στιγμές άφιξης παραγγελίας, δηλαδή πρέπει οι νέες ποσότητες να φτάνουν στην αποθήκη ακριβώς τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται το απόθεμα. Αυτό στη γενική περίπτωση στοχαστικής ζήτησης ή χρόνου παράδοσης δεν είναι εφικτό, όμως στο συγκεκριμένο μοντέλο τόσο η ζήτηση όσο και ο χρόνος παράδοσης είναι απολύτως προβλέψιμα, επομένως οι παραγγελίες μπορούν να γίνονται σε χρονικές στιγμές τέτοιες ώστε οι νέες ποσότητες να φτάνουν στην αποθήκη όταν μηδενιστεί το απόθεμα.

Επειδή η ζήτηση είναι ίση με a ανά μονάδα χρόνου, τότε σε χρονικό διάστημα μήκους L η ποσότητα που θα πωληθεί είναι ίση με aL. Επομένως αν μια παραγγελία γίνει όταν το επίπεδο αποθέματος είναι ίσο με $R = aL$, τότε τη στιγμή άφιξης της παραγγελίας στην αποθήκη το απόθεμα θα έχει μόλις μηδενιστεί. Το επίπεδο R ονομάζεται σημείο αναπαραγγελίας (reorder point).

Όσον αφορά την ποσότητα παραγγελίας και το κόστος, είναι εύκολο να δούμε ότι αν οι παραγγελίες γίνονται σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα του reorder point $R = aL$, τότε η συνάρτηση κόστους είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του βασικού μοντέλου Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας και επομένως η βέλτιστη ποσότητα είναι η Q^* που δίνεται από την (11.2).

Επομένως η βέλτιστη πολιτική συνοψίζεται ως εξής: Όταν η στάθμη του αποθέματος πέσει στο επίπεδο $R = aL$ γίνεται παραγγελία μεγέθους $Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$. Πολιτικές που προσδιορίζονται από ένα ζεύγος ποσότητας παραγγελίας Q και επιπέδου αναπαραγγελίας R ονομάζονται πολιτικές τύπου (Q, R) και έχουν εφαρμογή και σε γενικότερα προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων με αβεβαιότητα. Στο παρόν πρόβλημα οι βέλτιστες παράμετροι Q και R προσδιορίζονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά σε γενικότερα προβλήματα αυτό δεν ισχύει, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Σημειώνουμε επίσης ότι η πολιτική (Q, R) που περιγράψαμε εφαρμόζεται όταν $R \leq Q^*$, δηλαδή όταν η ποσότητα που φτάνει στην αποθήκη είναι μεγαλύτερη από το επίπεδο αναπαραγγελίας, δηλαδή ισοδύναμα αν το μήκος του κύκλου είναι $T \leq L$. Αν ο χρόνος καθυστέρησης είναι μεγαλύτερος από έναν κύκλο, τότε οι παραγγελίες θα πρέπει να γίνονται αρκετά νωρίτερα, έτσι ώστε να φτάνουν στο τέλος, όχι του παρόντος αλλά κάποιου επόμενου κύκλου. Με αυτήν τη διόρθωση το επίπεδο αναπαραγγελίας R γενικεύεται κατάλληλα (βλ. Άσκηση 11.5).

11.4.2 Προγραμματισμένες ελλείψεις

Θεωρούμε πάλι το βασικό μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με $L = 0$. Μια από τις υποθέσεις αυτού του μοντέλου είναι ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Επειδή η ζήτηση είναι ντετερμινιστική και οι παραλαβές γίνονται άμεσα, είναι εφικτό οι ελλείψεις να αποφεύγονται εντελώς. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις εφαρμογών στις οποίες είναι επιθυμητό ένα μέρος της ζήτησης να ικανοποιείται όχι άμεσα αλλά μέσω backlog, δηλαδή βάζοντας τους αντίστοιχους πελάτες σε εκκρεμότητα και κάνοντας την παράδοση όταν γίνει παραλαβή της νέας ποσότητας στην αρχή του επόμενου κύκλου. Το κίνητρο για τέτοιου τύπου πολιτικές είναι προφανώς η μείωση του κόστους αποθήκευσης, όμως από την άλλη πλευρά υπεισέρχεται ένα νέο κόστος που οφείλεται στο backlog και μπορεί να προέρχεται από το έμμεσο κόστος δυσαρέσκειας των πελατών που δεν λαμβάνουν το προϊόν αμέσως, από τα διαδικαστικά κόστη διαχείρισης των εκκρεμοτήτων κλπ. Υποθέτουμε ότι επιπλέον του κόστους παραγγελίας K και του κόστους αποθήκευσης h, υπάρχει και ένα κόστος ελλείψεων p ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου που αυτή η ποσότητα βρίσκεται σε εκκρεμότητα μέχρι να παραδοθεί στον πελάτη. Το κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου κόστους παραγγελιών, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου. Επειδή το επίπεδο των ελλείψεων είναι μέρος της πολιτικής διαχείρισης του αποθέματος, το μοντέλο αυτό αναφέρεται ως Οικονομική Ποσότητα Παραγγελίας με Προγραμματισμένες Ελλείψεις (EOQ with Planned Shortages).

Στο μοντέλο με προγραμματισμένες ελλείψεις η πολιτική παραγγελιών προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους: την ποσότητα παραγγελίας Q και το ποσοστό της ζήτησης x που ικανοποιείται άμεσα από το απόθεμα χωρίς να μπαίνει σε εκκρεμότητα. Επομένως στη διάρκεια ενός διαστήματος στο οποίο η συνολική ζήτηση είναι ίση με Q, η ποσότητα που ικανοποιείται από το ράφι είναι $S = Qx$ και η ποσότητα που ικανοποιείται μέσω εκκρεμοτήτων είναι $B = Q(1 - x)$. Η πολιτική αυτή υλοποιείται ως εξής: Όταν μηδενιστεί το απόθεμα δεν γίνεται νέα παραγγελία, αλλά η ζήτηση που έρχεται μπαίνει σε εκκρεμότητα μέχρι τη στιγμή που το backlog να φτάσει το επίπεδο B. Τότε γίνεται παραγγελία ύψους Q η οποία έρχεται αμέσως. Από αυτήν την ποσότητα ένα μέρος B δεν αποθηκεύεται αλλά αποστέλλεται αμέσως στους πελάτες που είναι σε εκκρεμότητα. Το υπόλοιπο μέρος S μπαίνει στην αποθήκη και χρησιμοποιείται για να ικανοποιεί τη ζήτηση μέχρι να εξαντληθεί, οπότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου.

Ορίζουμε και πάλι ως κύκλο το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών. Η διάρκεια ενός κύκλου είναι ίση με $T = Q/a$. Τώρα ο κύκλος διαιρείται σε δύο διαστήματα: Στο πρώτο διάστημα, μήκους S/a η ζήτηση ικανοποιείται από το απόθεμα. Στο δεύτερο διάστημα, μήκους B/a, η ζήτηση μπαίνει σε εκκρεμότητα και ικανοποιείται στο τέλος του κύκλου. Επομένως το απόθεμα μειώνεται γραμμικά στο πρώτο διάστημα από το επίπεδο S στο μηδέν με ρυθμό a, ενώ το backlog αυξάνεται γραμμικά στο δεύτερο διάστημα από το μηδέν στο επίπεδο B επίσης με ρυθμό a. Με βάση τα παραπάνω, το κόστος αποθήκευσης στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$h\int_0^{S/a}(S-at)dt = h\left(S\frac{S}{a} - a\frac{(S/a)^2}{2}\right) = \frac{hS^2}{2a} = \frac{hQ^2x^2}{2a}.$$

Ομοίως, το κόστος έλλειψης σε έναν κύκλο είναι

$$p\int_0^{B/a} atdt = pa\frac{B^2}{2a^2} = \frac{pB^2}{2a} = \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}.$$

Επομένως το συνολικό κόστος στη διάρκεια ενός κύκλου είναι ίσο με

$$K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a},$$

και το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου

$$C(Q,x) = \frac{K + cQ + \frac{hQ^2x^2}{2a} + \frac{pQ^2(1-x)^2}{2a}}{Q/a} = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g(x)Q}{2},$$

όπου

$$g(x) = hx^2 + p(1-x)^2.$$

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ ισχύει $g(1) = h$ και επομένως η $C(Q,1)$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση κόστους στο βασικό μοντέλο χωρίς ελλείψεις.

Για να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές των Q, x παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του Q, η $C(Q,x)$ ελαχιστοποιείται ως προς x αν και μόνο αν ελαχιστοποιείται η $g(x)$. Επειδή η $g(x)$ είναι κυρτή ως προς x, ελαχιστοποείται όταν $g'(x) = 0$, από την οποία προκύπτει αμέσως ότι η βέλτιστη τιμή του x είναι

$$x^* = \frac{p}{h+p} \tag{11.3}$$

και η ελάχιστη τιμή της $g(x)$

$$g^* = g(x^*) = \frac{hp}{h+p}.$$

Αντικαθιστώντας την $g(x)$ με τη βέλτιστη τιμή g^* στη συνάρτηση κόστους, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$\tilde{C}(Q) = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{g^*Q}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει αντίστοιχη μορφή με τη συνάρτηση κόστους στην (11.1) με μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης g^*. Επομένως η βέλτιστη λύση είναι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{g^*}} = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} \tag{11.4}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι κάτω από τη βέλτιστη πολιτική η διάρκεια του κύκλου είναι

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}},$$

η μέγιστη τιμή του αποθέματος

$$S^* = Q^* x^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}},$$

η μέγιστη τιμή του backlog

$$B^* = Q^*(1 - x^*) = \sqrt{\frac{2aK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

και η ελάχιστη τιμή του κόστους ανά μονάδα χρόνου

$$C^* = C(Q^*, x^*) = \tilde{C}(Q^*) = \sqrt{2Kag^*} = \sqrt{\frac{2aKhp}{p+h}}.$$

Συνοψίζοντας, η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνονται παραγγελίες ύψους Q^* όταν η στάθμη του backlog φτάσει την τιμή B^*. Παρατηρούμε ότι

$$S^* < \sqrt{\frac{2aK}{h}} < Q^*$$

επομένως η ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση που δεν επιτρέπονται ελλείψεις, ενώ η ποσότητα που αποθηκεύεται είναι μικρότερη. Επίσης,

$$C^* < \sqrt{2aKh}$$

επομένως με τις προγραμματισμένες ελλείψεις επιτυγχάνεται μείωση του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου, παρ' όλο που έχει προστεθεί και η νέα συνιστώσα του κόστους ελλείψεων. Αυτό συμβαίνει επειδή όταν επιτρέπονται οι ελλείψεις επιτυγχάνεται ένας καλύτερος συνδυασμός αποθέματος και backlog από ότι αν όλη η παραγγελία έμπαινε στο απόθεμα.

11.5 Έλεγχος αποθεμάτων με αβεβαιότητα στη ζήτηση – Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα δεύτερο βασικό μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων, με διαφορετικό προσανατολισμό από το ντετερμινιστικό μοντέλο EOQ. Εδώ η έμφαση δίνεται στην αβεβαιότητα ως προς τη ζήτηση και συγκεκριμένα στην αλληλεπίδραση μεταξύ του κόστους που επιφέρουν τυχόν αζήτητες ποσότητες προϊόντος που έχει αποθηκευτεί και από την άλλη πλευρά του κόστους ενδεχόμενων ελλείψεων εξαιτίας ανεπαρκούς αποθέματος. Θα εξετάσουμε αυτό το πρόβλημα στο πλαίσιο ενός απλού μοντέλου μιας περιόδου λειτουργίας, που θα βοηθήσει να αναδειχθούν ευκολότερα οι βασικές έννοιες της βέλτιστης πολιτικής διαχείρισης σε αυτήν την περίπτωση. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε επεκτάσεις αυτού του μοντέλου σε πιο ρεαλιστικά προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων πολλών περιόδων, χρησιμοποιώντας μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών και Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη αναφέρεται στην επιλογή βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας ενός προϊόντος για μια περίοδο, το οποίο απαξιώνεται στο τέλος της περιόδου, όταν η ζήτηση του προϊόντος κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι αβέβαιη. Τέτοια προϊόντα με μικρή διάρκεια ζωής είναι οι εφημερίδες και τα περιοδικά, τα λουλούδια, φρέσκα προϊόντα διατροφής κλπ.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα είδος προϊόντος το οποίο θα πρέπει να προμηθευτούμε για μια χρονική περίοδο, το οποίο απαξιώνεται γρήγορα και επομένως δεν μπορεί να πωληθεί σε επόμενη περίοδο. Πιθανά, όμως, τα προϊόντα που μένουν απούλητα να μπορούν να επιστραφούν ή να εκποιηθούν σε κάποια τιμή ευκαιρίας.

Συμβολίζουμε με x το αρχικό απόθεμα του προϊόντος. Η απόφαση αφορά τον αριθμό των προϊόντων που πρέπει να παραγγελθούν (ή να παραχθούν) ώστε να είναι έτοιμα για κατανάλωση. Επομένως, αν a είναι η απόφαση που αναφέρεται στην ποσότητα των προϊόντων που θα παραγγελθεί, έχουμε ότι το ύψος του αποθέματος μετά την παραγγελία θα είναι $y = x + a$. Μπορούμε να σκεφτόμαστε την a ή την y ως τη μεταβλητή της απόφασης. Η ζήτηση στη διάρκεια της περιόδου είναι άγνωστη και μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή D, με γνωστή κατανομή $F_D(x)$. Για απλότητα στην παρουσίαση θα υποθέσουμε ότι η κατανομή της D είναι (απόλυτα) συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(x)$.

Όσον αφορά τα κόστη, θεωρούμε ότι υπάρχει πάγιο κόστος K για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας, καθώς και κόστος c ανά μονάδα προϊόντος. Επίσης, υπάρχει κόστος h ανά μονάδα προϊόντος που θα μείνει στο τέλος της περιόδου (το οποίο περιλαμβάνει πιθανά κόστη αποθήκευσης μείον την τιμή ευκαιρίας με την οποία επιστρέφεται ή εκποιείται κάθε κομμάτι). Επίσης, υπάρχει κόστος έλλειψης p ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης που αντικατατοπτρίζει τα χαμένα κέρδη και την απώλεια καλής φήμης της εταιρείας. Υποθέτουμε ότι $p > c$. Αυτό είναι εύλογο, διότι διαφορετικά (αν $p \leq c$), τότε συμφέρει να μην παραγγέλνεται τίποτα, αφού η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίησή του μέσω παραγγελίας.

Αν ληφθεί η απόφαση να παραγγελθούν a προϊόντα, δηλαδή το επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας να είναι $y = x + a$, τότε το αναμενόμενο κόστος είναι

$$
\begin{aligned}
c(x,a) &= \begin{cases} K + ca + hE[(x+a-D)^+] + pE[(x+a-D)^-] & \text{αν } a > 0, \\ hE[(x-D)^+] + pE[(x-D)^-] & \text{αν } a = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} K + cy + hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] - cx & \text{αν } y > x, \\ hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] & \text{αν } y = x \end{cases} \\
&= \begin{cases} K + cy + l(y) - cx & \text{αν } y > x, \\ l(x) & \text{αν } y = x, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
l(y) &= hE[(y-D)^+] + pE[(y-D)^-] \\
&= h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi.
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

Για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D)^+]$, $E[(y-D)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (γενικότερα, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y). Επομένως η $l(y)$ είναι επίσης κυρτή (γενικότερα ο γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη-αρνητικούς συντελεστές είναι κυρτή συνάρτηση). Έστω τώρα S η τιμή της y που ελαχιστοποιεί την $cy + l(y)$ στο $[0,\infty)$ (η οποία υπάρχει σίγουρα αφού $\lim_{y\to\infty}(cy + l(y)) = \infty$). Έστω, επίσης, s να είναι η μικρότερη τιμή της y ώστε $cs + l(s) = K + cS + l(S)$. Για να βρούμε πού επιτυγχάνεται το ελάχιστο της $c(x,a)$ που δίνεται από την (11.5) διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν $x > S$, $s \leq x \leq S$ ή $x < s$. Από την κυρτότητα της $cy + l(y)$, έχουμε ότι

- Για $x > S$, είναι $K+cy+l(y)-cx > K+cx+l(x)-cx > l(x)$, για κάθε $y > x$. Πράγματι η $K+cy+l(y)-cx$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y για $y > x$, αφού η $K + cy + l(y) - cx$ είναι κυρτή με ελάχιστο στο S και $x > S$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.

- Για $s \leq x \leq S$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x,a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[s,x]$ αφού $x < S$, οπότε $cs + l(s) > cx + l(x)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx > l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται και πάλι στον δεύτερο κλάδο, δηλαδή για $a = 0$.

- Για $x < s$, η ελάχιστη τιμή του πρώτου κλάδου της $c(x,a)$, δηλαδή της $K + cy + l(y) - cx$, για $y > x$, πιάνεται στο S και είναι $K + cS + l(S) - cx = cs + l(s) - cx$. Όμως η $cy + l(y)$ είναι φθίνουσα στο $[x,s]$ αφού $x, s < S$, οπότε $cx + l(x) > cs + l(s)$ ή ισοδύναμα $cs + l(s) - cx < l(x)$. Επομένως, έχουμε ότι το ελάχιστο της $c(x,a)$ πιάνεται στον πρώτο κλάδο, και μάλιστα για $y = S$ ή ισοδύναμα $a = S - x$.

Για να βρούμε την τιμή του S, πρέπει να δούμε πού ελαχιστοποιείται η κυρτή συνάρτηση $cy+l(y)$. Ισοδύναμα πρέπει να δούμε πού μηδενίζεται η παράγωγός της. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dy}(cy + l(y)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dy}\left(cy + h\int_0^y (y-\xi) f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y) f_D(\xi) d\xi\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dy}\left(cy + hyF_D(y) - h\int_0^y \xi f_D(\xi) d\xi + p\int_y^\infty \xi f_D(\xi) d\xi - py(1 - F_D(y))\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & c + hF_D(y) + hyf_D(y) - hyf_D(y) - pyf_D(y) - p + pF_D(y) + pyf_D(y) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & F_D(y) = \frac{p-c}{p+h}. \qquad (11.7)
\end{aligned}
$$

Επομένως, καταλήξαμε στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 11.1 *Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το μοντέλο του εφημεριδοπώλη είναι τύπου (s, S), δηλαδή θα πρέπει να παραγγέλνει ώστε να φθάσει σε επίπεδο αποθέματος S, αν το αρχικό απόθεμά του είναι κάτω από s, δηλαδή,*

$$
a^*(x) = \begin{cases} S - x, & \text{αν } x < s, \\ 0, & \text{αν } x \geq s. \end{cases} \qquad (11.8)
$$

Είναι

$$
S = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right) \qquad (11.9)
$$

και το s είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης

$$
cs + l(s) = K + cS + l(S), \qquad (11.10)
$$

με $l(y)$ που δίνεται από την (11.6).

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει πάγιο κόστος παραγγελίας, δηλαδή $K = 0$, είναι $s = S$.

11.6 Ασκήσεις

Άσκηση 11.1 *Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας στο οποίο υποθέτουμε ότι η ποσότητα παραγγελίας είναι ίση με $Q = \theta Q^*$. Να αποδειχθεί ότι το μέσο κόστος κάτω από αυτήν την πολιτική είναι ίσο με*

$$
C(Q) = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)C^*.
$$

Άσκηση 11.2 *Ένα κατάστημα εμπορεύεται ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση είναι σταθερή και ίση με a ανά μονάδα χρόνου. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με K και το κόστος αγοράς του προϊόντος από τον προμηθευτή είναι ίσο με c ανά μονάδα. Το κόστος αποθήκευσης είναι ίσο με h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Ένας δεύτερος προμηθευτής που πωλεί το ίδιο προϊόν χρεώνει τιμή μονάδας $c' < c$, όμως δεν δέχεται πάνω από N παραγγελίες ανά μονάδα χρόνου. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να συμφέρει η μετάβαση στον δεύτερο προμηθευτή (τα κόστη K και h είναι τα ίδια και για τους δύο προμηθευτές).*

Άσκηση 11.3 *Σε ένα σύστημα παραγωγής ένα συγκεκριμένο προϊόν διακινείται από δύο αποθήκες απομακρυσμένες μεταξύ τους. Η ζήτηση του προϊόντος είναι γνωστή και σταθερή και ίση με a_1 και a_2 ανά μονάδα χρόνου στις αποθήκες 1 και 2 αντίστοιχα. Το προϊόν έχει σταθερό κόστος παραγγελίας K και κόστος αποθήκευσης h ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου, κοινά και στις δύο αποθήκες. Οι παραγγελίες για νέες ποσότητες γίνονται* *χωριστά σε κάθε αποθήκη και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Στο σύστημα αυτό εξετάζεται το ενδεχόμενο οι αποθήκες να συγχωνευθούν σε μία στη θέση 1, όλες οι παραγγελίες να γίνονται από την αποθήκη 1 και η ζήτηση της αποθήκης 2 να μεταφέρεται απευθείας στους πελάτες από την 1 με κόστος d ανά μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί η περιοχή τιμών του κόστους d έτσι ώστε να συμφέρει η συγχώνευση.*

Άσκηση 11.4 *Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με ζήτηση a ανά μονάδα χρόνου και χρόνο καθυστέρησης στην παράδοση νέας παραγγελίας ίσο με L. Έστω μια πολιτική διαχείρισης αποθέματος με ποσότητα παραγγελίας Q και μήκος κύκλου $T = Q/a$. Να αποδειχθεί ότι αν $L > T$ ή ισοδύναμα $aL > Q$, τότε το επίπεδο αναπαραγγελίας R κάτω από αυτήν την πολιτική είναι ίσο με*

$$R = a\left(L - T\left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor\right) = aL - Q\left\lfloor \frac{aL}{Q} \right\rfloor.$$

Άσκηση 11.5 *Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με προγραμματισμένες ελλείψεις και υποθέτουμε ότι υπάρχει χρόνος καθυστέρησης της παραγγελίας ίσος με L, όπου $L < T^*$. Να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη πολιτική δεν αλλάζει και να προσδιοριστεί το επίπεδο αναπαραγγελίας.*

Άσκηση 11.6 *Θεωρούμε το μοντέλο Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας με προγραμματισμένες ελλείψεις και υποθέτουμε ότι η ζήτηση που φτάνει όταν δεν υπάρχει προϊόν στην αποθήκη δεν μπαίνει σε εκκρεμότητα αλλά χάνεται. Το κόστος ανά μονάδα χαμένης ζήτησης είναι ίσο με b. Έστω ότι μια πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων αυτού του τύπου υλοποιείται ως εξής: Μια ποσότητα παραγγελίας που φτάνει στην αποθήκη χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση της ζήτησης μέχρι το απόθεμα να εξαντληθεί. Μετά την εξάντληση του αποθέματος μεσολαβεί ένα διάστημα t_0 στη διάρκεια του οποίου η ζήτηση που έρχεται δεν ικανοποιείται. Στο τέλος αυτού του διαστήματος γίνεται μια νέα παραγγελία ύψους Q που φτάνει στην αποθήκη αμέσως και όλη η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Έστω ότι μια πολιτική αυτής της μορφής προσδιορίζεται από την ποσότητα παραγγελίας Q και το ποσοστό x της ζήτησης που ικανοποείται.*

1. *Να υπολογιστεί η τιμή του t_0 και το μήκος κύκλου κάτω από την πολιτική (Q, x).*

2. *Να δειχθεί ότι το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου κάτω από την πολιτική (Q, x) είναι ίσο με*

$$C(Q, x) = \left[aKQ + ac + \frac{hQ}{2}\right]x + ba(1 - x).$$

3. *Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική. Ποια είναι η οικονομική ερμηνεία της;*

Άσκηση 11.7 *Ο ιδιοκτήτης ενός καταστήματος θέλει να προσδιορίσει την ποσότητα προϊόντος που πρέπει να βάζει στο ράφι κάθε πρωί από έναν τύπο προϊόντος που έχει διάρκεια μιας μέρας (και επομένως δεν διατηρείται σε απόθεμα για την επόμενη μέρα). Το προϊόν το αγοράζει από τον προμηθευτή σε τιμή w ανά μονάδα και το πωλεί στο κατάστημα σε τιμή r ανά μονάδα. Απώλητες ποσότητες στο τέλος της μέρας επιστρέφονται στον προμηθευτή σε τιμή s ανά μονάδα. Η ζήτηση μιας μέρας ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0 και A μονάδων.*

1. *Υποθέτουμε ότι οι ελλείψεις είναι χαμένες πωλήσεις. Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών.*

2. *Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) αν ο ιδιοκτήτης δεν επιτρέπει ελλείψεις, αλλά κάθε μονάδα προϊόντος που δεν μπορεί να ικανοποιήσει από το ράφι την αγοράζει από εναλλακτικό προμηθευτή σε τιμή w_1 ευρώ ανά μονάδα, όπου $w_1 > w$.*

Άσκηση 11.8 *Μια βιομηχανία επεξεργασίας μολύβδου παράγει διοξείδιο του θείου ως υποπροϊόν της παραγωγής. Το αέριο εκπέμπεται στην ατμόσφαιρα ως ρύπος. Εξαιτίας διακυμάνσεων στην παραγωγή, η εκπομπή διοξειδίου κάθε μήνα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ (σε τόνους). Το διοξείδιο του θείου μπορεί να εξουδετερωθεί πριν εκπεμφθεί στην ατμόσφαιρα αν η παραγωγή* *γίνει με ειδικά φίλτρα που εγκαθίστανται στο εργοστάσιο στην αρχή κάθε μήνα. Το κόστος των φίλτρων είναι C ανά τόνο διοξειδίου που εξουδετερώνουν. Τα φίλτρα είναι άχρηστα στο τέλος του μήνα ανεξάρτητα από το πόσο χρησιμοποιήθηκαν. Υπάρχει μια Ευρωπαϊκή Οδηγία που συνιστά βιομηχανίες αυτού του τύπου να εγκαθιστούν φίλτρα με δυναμικότητα Q τόνων κάθε μήνα. Τέλος, ο Εθνικός Οργανισμός Περιβάλλοντος επιβάλλει συγκεκριμένο φόρο εκπομπών f ανά τόνο διοξειδίου που εκπέμπεται.*

1. *Πόσος πρέπει να είναι ο φόρος για να συμμορφωθεί η εταιρεία με την Ευρωπαϊκή Οδηγία;*

2. *Ποια είναι η μέση ποσότητα εκπεμπόμενου ρύπου ανά μήνα για το ερώτημα (α);*

Σχόλια

Η Θεωρία Αποθεμάτων είναι μια σημαντική περιοχή της Επιχειρησιακής Έρευνας που έχει μελετηθεί εκτεταμένα και η βιβλιογραφία που την αφορά είναι τεράστια. Ενδεικτικά αναφέρονται τα βιβλία των Axsäter 2015 και Zipkin 2000 στα οποία παρουσιάζονται συστηματικά οι βασικές περιοχές της θεωρίας και τα αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα, ενώ στο βιβλίο του Prabhu 1998 μελετώνται στοχαστικά μοντέλα διαδικασιών στην τομή Θεωρίας Αποθεμάτων και Θεωρίας Ουρών. Επίσης, βασικά μοντέλα Θεωρίας Αποθεμάτων περιλαμβάνονται στα περισσότερα συγγράμματα Επιχειρησιακής Έρευνας και Οργάνωσης Παραγωγής, όπως στα Hillier και Lieberman 2015 και Nahmias και Lennon Olsen 2015.

Το μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας παρουσιάστηκε στην εργασία F. W. Harris 1913 και θεωρείται η απαρχή της Θεωρίας Αποθεμάτων. Στη εργασία Erlenkotter 1990 γίνεται μια ιστορική αναδρομή στην εργασία του Harris και στις επόμενες εργασίες που οδήγησαν στην ανάπτυξη της περιοχής. Το μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας επεκτάθηκε στην περίπτωση ντετερμινιστικής χρονικά μεταβαλλόμενης ζήτησης στην εργασία Wagner και Whitin 1958 που μελέτησε το μοντέλο Δυναμικής Ποσότητας Παραγγελίας με εφαρμογή Δυναμικού Προγραμματισμού. Επίσης, αποτέλεσε τη βάση για έναν πολύ μεγάλο αριθμό μοντέλων τόσο με ντετερμινιστική όσο και στοχαστική ζήτηση, στα οποία υπεισέρχεται η αλληλεπίδραση μεταξύ οικονομιών κλίμακας και κόστους αποθήκευσης. Μια πρόσφατη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σε προβλήματα που βασίζονται στο μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας περιλαμβάνεται στην εργασία Glock και Grosse 2021.

Το μοντέλο του εφημεριδοπώλη παρουσιάστηκε και αναλύθηκε συστηματικά στην εργασία Arrow, T. Harris και Marschak 1951. Η παρουσίαση εδώ ακολουθεί το βιβλίο του Ross 1970. Στο μοντέλο αυτό έχει βασιστεί ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων της Θεωρίας Αποθεμάτων που επεκτείνουν τα βασικά του χαρακτηριστικά σε διάφορες κατευθύνσεις. Στο βιβλίο Nahmias 2011 περιλαμβάνονται προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων πολλών περιόδων για προϊόντα με πεπερασμένη διάρκεια ζωής. Εκτός από το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους έχουν επίσης μελετηθεί προβλήματα με κριτήρια αποστροφής κινδύνου, όπως στην εργασία Webster και C. X. Wang 2009, προβλήματα με κριτήρια εύρωστης βελτιστοποίησης ανεξάρτητα της κατανομής της ζήτησης όπως στην εργασία Gallego και Moon 1993 και προβλήματα προσαρμοστικής βελτιστοποίησης της πολιτικής κάτω από άγνωστη κατανομή ζήτησης όπως στην εργασία Burnetas και Smith 2000. Ανασκοπήσεις της βιβλιογραφίας σε προβλήματα που βασίζονται στο μοντέλο του εφημεριδοπώλη περιλαμβάνονται στις εργασίες Petruzzi και Dada 1999 και Qin, R. Wang, Vakharia, Chen και Seref 2011.

Βιβλιογραφία

[1] S. Axsäter. *Inventory Control*. 3rd. New York, NY: Springer, 2015.

[2] P. H. Zipkin. *Foundations of Inventory Management*. Boston, MA: Mc Graw Hill, 2000.

[3] N. U. Prabhu. *Stochastic storage processes: queues, insurance risk, dams, and data communication*. 2nd. New York, NY: Springer, 1998.

[4] F.S. Hillier και G.J. Lieberman. *Introduction to Operations Research, 10th edition*. New York, NY: McGraw-Hill, 2015.

[5] S. Nahmias και T. Lennon Olsen. *Production and Operations Analysis, 7th Edition*. Long Groves, Illinois: Waveland Press, Inc., 2015. ISBN: 978-1478623069.

[6] F. W. Harris. "How Many Parts to Make at Once". Στο: *Factory, The Magazine of Management* 10.2 (1913), σσ. 135–136.

[7] D. Erlenkotter. "Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model". Στο: *Operations Research* 38.6 (1990), σσ. 934–1139.

[8] H. M. Wagner και T. Whitin. "Dynamic version of the economic lot size model". Στο: *Management Science* 5 (1958), σσ. 89–96.

[9] C. H. Glock και E. H. Grosse. "The impact of controllable production rates on the performance of inventory systems: A systematic review of the literature". Στο: *European Journal of Operational Research* 288.3 (2021), σσ. 703–720.

[10] K. J. Arrow, T. Harris και J. Marschak. "Optimal inventory policy". Στο: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1951), σσ. 250–272.

[11] S. Ross. *Applied probability models with optimization appplications*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1970.

[12] S. Nahmias. *Perishable Inventory Systems*. New York, NY: Springer, 2011.

[13] S. Webster και C. X. Wang. "The loss-averse newsvendor problem". Στο: *Omega* 37.1 (2009), σσ. 93–105.

[14] G. Gallego και I. Moon. "The distribution free newsboy problem: review and extensions". Στο: *Journal of the Operational Research Society* 44.8 (1993), σσ. 183–194.

[15] A. N. Burnetas και C. E. Smith. "Adaptive ordering and pricing for perishable products". Στο: *Operations Research* 48.3 (2000), σσ. 436–443.

[16] N.C. Petruzzi και M. Dada. "Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions". Στο: *Operations Research* 47.2 (1999), σσ. 183–194.

[17] Y. Qin, R. Wang, A. J. Vakharia, Y. Chen και M. M. Seref. "The newsvendor problem: Review and directions for future research". Στο: *European Journal of Operational Research* 213.2 (2011), σσ. 361–374.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ ΥΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Σύνοψη

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται προβλήματα διαχείρισης αποθεμάτων που γενικεύουν τις υποθέσεις των βασικών μοντέλων της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας και του εφημεριδοπώλη. Στο μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας γίνεται η υπόθεση ότι η ζήτηση είναι γνωστή και δεν παρουσιάζει διακυμάνσεις. Η υπόθεση αυτή είναι ρεαλιστική σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. όταν υπάρχουν συγκεκριμένες παραγγελίες από τους πελάτες για το επόμενο χρονικό διάστημα), όμως στην πραγματικότητα στα περισσότερα προβλήματα οργάνωσης παραγωγής και διαχείρισης αποθεμάτων υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά πολλές παραμέτρους με κυριότερη τη ζήτηση. Από την άλλη πλευρά, στο μοντέλο του εφημεριδοπώλη, η ζήτηση είναι τυχαία, όμως το προϊόν δεν διατηρείται σε απόθεμα και επομένως η απόφαση για την ποσότητα μιας παραγγελίας αφορά αποκλειστικά την περίοδο μέχρι την επόμενη παραγγελία.

Τα μοντέλα που μελετώνται σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρονται σε γενικότερα και πιο ρεαλιστικά προβλήματα, στα οποία υπάρχει αβεβαιότητα στη ζήτηση, ενώ παράλληλα μπορεί να διατηρείται απόθεμα του προϊόντος μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών. Επομένως, οι πολιτικές παραγγελιών λαμβάνουν υπόψη τους τόσο τον προστατευτικό ρόλο του αποθέματος έναντι ελλείψεων εξαιτίας τυχαίων διακυμάνσεων της ζήτησης, όσο και τα οικονομικά πλεονεκτήματα που προσφέρει κυρίως λόγω των οικονομιών κλίμακας. Συγκεκριμένα εξετάζονται τρία μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων με στοχαστική ζήτηση. Το πρώτο μοντέλο αναφέρεται στην περίπτωση όπου η ζήτηση ακολουθεί διαδικασία Poisson, η παρακολούθηση του αποθέματος είναι συνεχής, ενώ ο χρόνος καθυστέρησης παράδοσης είναι μη μηδενικός, όμως γνωστός και σταθερός. Στο μοντέλο αυτό προσδιορίζεται η βέλτιστη πολιτική τύπου (Q, R). Στα επόμενα δύο μοντέλα η παρακολούθηση του αποθέματος είναι περιοδική και οι παραγγελίες μπορούν να γίνονται μόνο στην αρχή κάθε περιόδου, ενώ ο χρόνος καθυστέρησης παράδοσης είναι μηδενικός. Οι ποσότητες της ζήτησης σε διαδοχικές περιόδους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Τα δύο μοντέλα μπορούν να θεωρηθούν ως επεκτάσεις του προβλήματος του εφημεριδοπώλη στην περίπτωση πολλαπλών περιόδων με δυνατότητα διατήρησης αποθέματος από μια περίοδο σε επόμενες, ενώ διαφοροποιούνται ως προς την ύπαρξη ή όχι σταθερού κόστους παραγγελίας.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

Όπως προκύπτει από την ανάλυση, η παράμετρος αυτή έχει σημαντική επίδραση τόσο στην πολυπλοκότητα του προβλήματος όσο και στη μορφή της βέλτιστης πολιτικής.

Τα προβλήματα αυτού του κεφαλαίου αναλύονται κάτω από την υπόθεση ότι η ζήτηση είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, όπως συμβαίνει σε προϊόντα που διακινούνται σε ακέραια πολλαπλάσια μιας συγκεκριμένης μονάδας (π.χ. τεμάχια, μπουκάλια, κιβώτια κλπ.). Αυτό επιτρέπει τη μοντελοποίηση μέσω στοχαστικών διαδικασιών με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων.

Προαπαιτούμενη γνώση

Για την κατανόηση αυτού του κεφαλαίου ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει εξοικειωθεί με το μοντέλο της διαδικασίας Poisson από το κεφάλαιο 1, τα μοντέλα Μαρκοβιανών διαδικασιών των κεφαλαίων 3 και 4, όπως επίσης και τα μοντέλα Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων πεπερασμένου ορίζοντα του κεφαλαίου 5. Επιπλέον, είναι απαραίτητη η γνώση των βασικών εννοιών και μοντέλων αποθεμάτων που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 11.

12.1 Το Μοντέλο (Q, R) συνεχούς επιθεώρησης αποθέματος με διαδικασία ζήτησης Poisson

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων με συνεχή παρακολούθηση και στοχαστική ζήτηση, στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική τύπου (Q, R). Υπάρχει σταθερό κόστος παραγγελίας K, κόστος προϊόντος c ανά μονάδα και κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων h και p, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Ο χρόνος παράδοσης είναι σταθερός και ίσος με L. Η ζήτηση ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με σταθερή μέση τιμή a ανά μονάδα χρόνου.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η πιο άμεση επέκταση του μοντέλου Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας στην περίπτωση της στοχαστικής ζήτησης, όμως η ανάλυση εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μορφή της στοχαστικής διαδικασίας της ζήτησης. Θα μελετήσουμε την περίπτωση που η ζήτηση ακολουθεί μια διαδικασία αφίξεων Poisson. Συγκεκριμένα, έστω ότι η ζήτηση φτάνει σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson $\{D(t), t \geq 0\}$, με ρυθμό a μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου. Κάθε άφιξη αντιστοιχεί σε μια μονάδα προϊόντος. Έστω $D(t, u] = D(u) - D(t)$ η ζήτηση στο διάστημα $(t, u]$. Η $D(t, u]$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $a(u - t)$. Η πολιτική παραγγελιών είναι της κατηγορίας (Q, R), όπου η ποσότητα παραγγελίας Q και το επίπεδο αναπαραγγελίας R είναι ακέραιες παράμετροι. Το πρόβλημα είναι να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές των Q, R που ελαχιστοποιούν το αναμενόμενο μέσο κόστος παραγγελίας, αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα, $C(Q, R)$.

Πριν προχωρήσουμε σε υπολογισμούς, θα συζητήσουμε μια επέκταση του ορισμού του αποθέματος που διευκολύνει την ανάλυση. Συγκεκριμένα, όταν η ζήτηση είναι στοχαστική και ο χρόνος παράδοσης L μη μηδενικός, μια πολιτική που βασίζεται σε επίπεδο αναπαραγγελίας έχει πρόβλημα στην υλοποίηση αν χρησιμοποιεί τη στάθμη του αποθέματος για να κάνει τις παραγγελίες. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν λαμβάνονται υπόψη παραγγελίες που έχουν γίνει προηγουμένως και δεν έχουν παραδοθεί ακόμη στην αποθήκη, όπως επίσης και τυχόν εκκρεμότητες προς τους πελάτες, δηλαδή το επίπεδο του backlog. Η πληροφορία για αυτά τα μεγέθη πρέπει να συνυπολογιστεί όταν λαμβάνεται η απόφαση για την τοποθέτηση ή όχι μιας παραγγελίας. Για να ορίσουμε με σαφήνεια τις πολιτικές παραγγελιών και να μελετήσουμε αναλυτικά τα σχετικά μοντέλα διαχείρισης αποθέματος, ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

- $I(t)$: ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη (stock-on-hand) τη χρονική στιγμή t.
- $B(t)$: ποσότητα προϊόντος σε εκκρεμότητα προς τους πελάτες (backlog) τη χρονική στιγμή t.
- $IO(t)$: ποσότητα προϊόντος που βρίσκεται καθ' οδόν προς την αποθήκη από προηγούμενες παραγγελίες (incoming orders) τη χρονική στιγμή t.

- $IL(t) = I(t) - B(t)$: επίπεδο αποθέματος (inventory level) τη χρονική στιγμή t.
- $IP(t) = I(t) - B(t) + IO(t) = IL(t) + IO(t)$: θέση αποθέματος (inventory position) τη χρονική στιγμή t.

Οι ποσότητες $I(t), B(t), IO(t)$ είναι μη αρνητικές, ενώ οι $IL(t)$ και $IP(t)$ μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Επίσης, επειδή κατά κανόνα δεν υπάρχουν ταυτόχρονα προϊόν στην αποθήκη και εκκρεμότητες προς τους πελάτες, ισχύει $I(t)B(t) = 0$ για $t \geq 0$, και επομένως $I(t) = \max(IL(t), 0)$ και $B(t) = -\min(IL(t), 0)$. Η θέση αποθέματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη ποσότητα, καθώς δίνει πληροφορία όχι μόνο για την ποσότητα προϊόντος στην αποθήκη αλλά και για τις μελλοντικές υποχρεώσεις προς τους πελάτες, όπως επίσης και για τις μελλοντικές ποσότητες που αναμένονται. Στην ειδική περίπτωση όπου $L = 0$, οπότε οι παραγγελίες φτάνουν άμεσα, ισχύει $IO(t) = 0$ και $IP(t) = IL(t)$, για $t \geq 0$.

Οι πολιτικές παραγγελιών που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο βασίζονται στη θέση αποθέματος για να ορίσουν πότε πρέπει να γίνονται παραγγελίες. Συγκεκριμένα, μια πολιτική (Q, R) ορίζεται ως εξής: όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο R, γίνεται μια νέα παραγγελία ύψους Q.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους $C(Q, R)$ έχουμε ότι το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου αποτελείται από 4 μέρη: το σταθερό κόστος παραγγελίας, το κόστος αγοράς/παραγωγής του προϊόντος, το κόστος αποθήκευσης και το κόστος ελλείψεων. Το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου που οφείλεται στο σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με $\frac{Ka}{Q}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αφού η ποσότητα κάθε παραγγελίας είναι ίση με Q, ο μέσος αριθμός παραγγελιών ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με $\frac{a}{Q}$. Το μέσο κόστος αγοράς ή παραγωγής του προϊόντος είναι ίσο με ca, επειδή η μέση ποσότητα που παράγεται ή αγοράζεται ανά μονάδα χρόνου είναι ίση με τη μέση ζήτηση a. Αυτό συμβαίνει επειδή σε μεγάλο χρονικό διάστημα όλη η ζήτηση των πελατών ικανοποιείται (είτε απευθείας από το απόθεμα είτε μέσω backlog), ενώ οι μόνες ποσότητες που αγοράζονται ή παράγονται είναι αυτές που προορίζονται να ικανοποιήσουν τη ζήτηση. Το μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με

$$h \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T I(t)dt}{T}.$$

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία του αποθέματος $\{I(t), t \geq 0\}$. Θα δείξουμε παρακάτω ότι η διαδικασία έχει στάσιμη κατανομή και έστω I μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή. Τότε το μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με $hE(I)$. Όμοια προκύπτει ότι το μέσο κόστος ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με $pE(B)$, όπου B μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας $\{B(t), t \geq 0\}$.

Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση κόστους $C(Q, R)$ γράφεται ως εξής:

$$C(Q, R) = \frac{Ka}{Q} + ca + hE[I] + pE[B]. \tag{12.1}$$

Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους, παρατηρούμε καταρχάς ότι οι περιοχές τιμών των μεταβλητών είναι $Q \geq 1$ και $R \geq -Q$ και ακέραιες. Η πρώτη ανισότητα είναι προφανής, επειδή η ποσότητα παραγγελίας πρέπει να είναι θετική. Όσον αφορά το επίπεδο αναπαραγγελίας R, αυτό μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, δηλαδή νέες παραγγελίες να γίνονται μόνο όταν συγκεντρωθούν αρκετές εκκρεμότητες προς τους πελάτες (αντίστοιχες πολιτικές εφαρμόζονται και στο μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις του προηγούμενου κεφαλαίου). Όμως μια πολιτική με τιμή $R < -Q$ δεν μπορεί να είναι βέλτιστη, επειδή η θέση αποθέματος θα παίρνει μέγιστη τιμή $R + Q < 0$, δηλαδή θα παραμένει πάντα αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα θα είναι πάντα μηδενικό, ενώ θα υπάρχει ένα μόνιμο μη μηδενικό επίπεδο ελλείψεων. Αν θεωρήσουμε μια άλλη πολιτική με την ίδια τιμή του Q και επίπεδο αναπαραγγελίας $R' = -Q$, τότε το επίπεδο αποθέματος παραμένει μηδενικό και τα κόστη παραγγελίας και αποθήκευσης δεν επηρεάζονται, ενώ το μέσο επίπεδο ελλείψεων μειώνεται με αποτέλεσμα τη μείωση του κόστους.

Επομένως, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους γράφεται ως

$$C^* = \inf_{Q \geq 1, R \geq -Q} C(Q, R) \tag{12.2}$$

Στα επόμενα βήματα θα υπολογίσουμε μια έκφραση για τη συνάρτηση κόστους και με βάση αυτήν θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο για την ελαχιστοποίηση. Για τον υπολογισμό των $E(I)$ και $E(B)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα: Πρώτα θα δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{IP(t), t \geq 0\}$ της θέσης αποθέματος είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου, της οποίας η στάσιμη κατανομή έχει απλή μορφή. Μέσω αυτής θα υπολογιστούν οι στάσιμες κατανομές των διαδικασιών $\{\mathrm{I}(t)\}$ και $\{B(t)\}$.

Εξετάζουμε τη διαδιακασία $\{IP(t), t \geq 0\}$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το σύνολο όλων των ακεραίων, επειδή τουλάχιστον αρχικά η θέση αποθέματος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ανάλογα με τις τιμές του αποθέματος, του backlog και των εισερχόμενων ποσοτήτων τη στιγμή $t = 0$. Για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση όμως, μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα θα γίνει η πρώτη παραγγελία και από τη στιγμή αυτή και μετά η διαδικασία μεταβάλλεται ως εξής: Η θέση αποθέματος μειώνεται κατά μία μονάδα σε κάθε χρονική στιγμή άφιξης της ζήτησης, εκτός από τις στιγμές άφιξης t στις οποίες ισχύει $IP(t^-) = R + 1$. Σε αυτές τις περιπτώσεις τη στιγμή t γίνεται μία παραγγελία μεγέθους Q. Παρ' όλο που αυτή η ποσότητα θα έρθει στην αποθήκη τη χρονική στιγμή $t + L$, κατά τη χρονική στιγμή t προστίθεται στις εισερχόμενες ποσότητες $IO(t)$ και στη θέση αποθέματος $IP(t)$, επομένως η θέση αποθέματος παίρνει αμέσως την τιμή $R+Q$. Σε όλες τις περιπτώσεις οι αλλαγές κατάστασης της $\{IP(t)\}$) συμβαίνουν αποκλειστικά στις στιγμές άφιξης της ζήτησης, επομένως όλοι οι θετικοί ρυθμοί μετάβασης είναι ίσοι με a.

Με βάση τα παραπάνω, η θέση αποθέματος μεταβάλλεται σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Συνεχούς Χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathbb{Z}$, η οποία έχει μια θετικά επαναληπτική (εργοδική) κλάση $\{R+1, R+2, \dots, R+Q\}$ ενώ όλες οι άλλες καταστάσεις είναι παροδικές. Οι ρυθμοί μετάβασης μέσα στην εργοδική κλάση είναι ίσοι με

$$q_{ij} = \begin{cases} a, & i = R+2, \dots, R+Q, j = i-1 \\ a, & i = R+1, j = R+Q \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επομένως, μετά την πρώτη είσοδό της στην εργοδική κλάση, η θέση αποθέματος μεταβάλλεται κυκλικά μεταξύ των τιμών $R+Q, R+Q-1, \dots, R+1$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή της διαδικασίας της θέσης αποθέματος. Οι παροδικές καταστάσεις έχουν στάσιμη πιθανότητα ίση με μηδέν. Για τις καταστάσεις $R+1, R+2, \dots, R+Q$ οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} p_{R+1}a &= p_{R+2}a \\ p_{R+2}a &= p_{R+3}a \\ &\dots \\ p_{R+Q}a &= p_{R+1}a \end{aligned}$$

με εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{i=R+1}^{R+Q} p_i = 1$. Βλέπουμε εύκολα ότι η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας θέσης αποθέματος είναι $p_i = \frac{1}{Q}, i = R+1, \dots, R+Q$, δηλαδή η διακριτή ομοιόμορφη. Αυτό σημαίνει ότι τα ποσοστά χρόνου που η θέση αποθέματος βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $R+1, \dots, R+Q$ σε στάσιμη κατάσταση είναι ίσα.

Για τον υπολογισμό του μέσου κόστους σε μεγάλο ορίζοντα χρειαζόμαστε επίσης τη στάσιμη κατανομή των διαδικασιών αποθέματος $\{I(t)\}$ και backlog $\{B(t\}$. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από τη στάσιμη κατανομή της $\{IP(t)\}$, χρησιμοποιώντας μια σχέση που υπάρχει μεταξύ αυτών των ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο χρονικές στιγμές t και $t + L$, που διαφέρουν μεταξύ τους κατά έναν χρόνο παράδοσης L. Το επίπεδο αποθέματος $IL(t + L)$ τη χρονική στιγμή $t + L$ προκύπτει από το αντίστοιχο επίπεδο αποθέματος

$IL(t)$ τη στιγμή t, προσαυξημένο με τις εισερχόμενες ποσότητες που έφτασαν στην αποθήκη στο ενδιάμεσο διάστημα $(t, t+L]$, και μειωμένο κατά τη νέα ζήτηση που προέκυψε στο ίδιο διάστημα. Όμως οι ποσότητες που παραλήφθηκαν είναι ακριβώς αυτές που βρίσκονταν σε διαδικασία παραλαβής κατά τη χρονική στιγμή t. Πράγματι, αφού ο χρόνος παράδοσης είναι L, όσες ποσότητες ήταν εισερχόμενες τη στιγμή t σίγουρα έφτασαν μέσα στο επόμενο διάστημα μήκους L. Από την άλλη πλευρά, όσες ποσότητες ενδεχομένως παραγγέλθηκαν στο διάστημα $(t, t+L]$ σίγουρα δεν έχουν φτάσει στην αποθήκη τη στιγμή $t+L$. Επομένως ισχύει η σχέση

$$IL(t+L) = IL(t) + IO(t) - D(t, t+L] = IP(t) - D(t, t+L].$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε t, επομένως και για την οριακή κατανομή όταν $t \to \infty$. Επομένως, αν θεωρήσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές IP, IL που ακολουθούν τη στάσιμη κατανομή των $\{IP(t)\}$ και $\{IL(t)\}$, αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$IL = IP - D, \tag{12.3}$$

όπου η IP ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $R+1, \dots, R+Q$ και η D ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή aL, ανεξάρτητη της IP.

Από την (12.3) και την κατανομή των IP, D μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές $E(I), E(B)$ στην (12.1). Για την E(B), από τη σχέση $B(t) = \max(-IL(t), 0)$ παίρνουμε $E[B] = E[\max(D - IP, 0)]$. Δεσμεύοντας ως προς την τιμή της IP προκύπτει:

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} E[\max(D-s, 0)].$$

Η ποσότητα $G(s) = E[\max(D-s, 0)]$ ονομάζεται συνάρτηση απώλειας πρώτης τάξης της D και συμβολίζει τη μέση υπέρβαση της τιμής της D πάνω από το επίπεδο s (η ονομασία συνάρτηση απώλειας προέρχεται από τον αναλογισμό, όπου επίσης ονομάζεται και συνάρτηση υπερβάλλοντος (ποσού) ζημίας και εκφράζει τη μέση απώλεια ενός ασφαλισμένου του οποίου η ασφάλεια καλύπτει πλήρως ζημιές μέχρι το ποσό s και ενδεχόμενο υπερβάλλον ποσό το πληρώνει ο ίδιος). Στο πρόβλημα που μελετάμε, η $G(s)$ εκφράζει το μέσο επίπεδο του backlog σε στάσιμη κατάσταση, όταν η θέση αποθέματος παραμένει σταθερή $IP = s$. Παρατηρούμε ότι μια πολιτική (Q, R) με $R = s-1$ και $Q = 1$, αντιστοιχεί σε τιμή $IP(t) = s$ για $t \geq 0$. Μια τέτοια πολιτική κάνει παραγγελίες μιας μονάδας κάθε φορά που έρχεται μια ζήτηση. Πολιτικές αυτού του τύπου ονομάζονται πολιτικές αποθέματος βάσης (base-stock policies).

Τώρα θα υπολογίσουμε την $G(s)$ για ακέραιες τιμές του s που επιτρέπουμε να είναι και αρνητικές. Μια πολιτική αποθέματος βάσης με $s < 0$ αντιστοιχεί σε πολιτική (Q, R) με $Q = 1, R = s-1 < -1$ και, όπως είδαμε προηγουμένως, δεν μπορεί να είναι βέλτιστη. Όμως αυτές οι τιμές της $G(s)$ χρειάζονται για τον υπολογισμό της βέλτιστης πολιτικής στη γενική περίπτωση πολιτικών (Q, R). Αν $s < 0$, επειδή η $D \geq 0$, ισχύει $\max(D - s, 0) = D - s$, επομένως $G(s) = E[D] - s = aL - s$, επειδή η D ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο aL.

Θεωρούμε κατόπιν την περίπτωση $s \geq 0$. Η $\max(D-s, 0)$ είναι μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, επομένως η μέση τιμή της μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$E[\max(D-s, 0)] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[\max(D-s, 0) > k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[D-s > k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[D > s+k] = \sum_{j=s}^{\infty} \Pr[D > j].$$

Όμως, επειδή και η D είναι μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, ισχύει επίσης ότι $E[D] = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr[D > j]$, επομένως

$$G(s) = E[D] - \sum_{j=0}^{s-1} \Pr(D > j) = aL - \sum_{j=0}^{s-1} (1 - F(j)) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j),$$

όπου $F(j) = \Pr[D \leq j] = \sum_{k=0}^{j} e^{-aL} \frac{(aL)^j}{j!}$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $D \sim \text{Poisson}(aL)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τη σύμβαση για το κενό άθροισμα $\sum_{j=0}^{m} a_j = 0$ για $m < 0$, παίρνουμε ότι για όλες τις ακέραιες τιμές του s η μέση τιμή του backlog για την πολιτική αποθέματος βάσης s είναι

$$\bar{B}(s) = G(s) = aL - s + \sum_{j=0}^{s-1} F(j), \tag{12.4}$$

και για μια γενική πολιτική (Q, R)

$$E[B] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{B}(s). \tag{12.5}$$

Αντίστοιχα μπορεί να υπολογιστεί και η μέση τιμή του αποθέματος $E[I]$. Έχουμε ότι

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s),$$

όπου $\bar{I}(s) = E[\max(s - D, 0)]$ η μέση τιμή του αποθέματος κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s. Από τη σχέση $IL(t) = I(t) - B(t)$, παίρνουμε

$$\bar{I}(s) = E[IL] + \bar{B}(s).$$

Επιπλέον, από την (12.3) προκύπτει $E[IL] = E[IP] - E[D]$. Όμως για την πολιτική αποθέματος βάσης s ισχύει $IP = s$, επομένως

$$\bar{I}(s) = s - aL + \bar{B}(s) = \sum_{j=0}^{s-1} F(j) \tag{12.6}$$

και

$$E[I] = \frac{1}{Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} \bar{I}(s). \tag{12.7}$$

Έχοντας υπολογίσει τις μέσες τιμές $E[B]$ και $E[S]$, επιστρέφουμε στη συνάρτηση κόστους (12.1), που τώρα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$C(Q, R) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)\right),$$

όπου

$$C(s) = h\bar{I}(s) + p\bar{B}(s) = p(aL - s) + (h + p) \sum_{j=0}^{s-1} F(j). \tag{12.8}$$

Η ποσότητα $C(s)$ είναι το μέσο κόστος αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα, κάτω από την πολιτική αποθέματος βάσης s.

Όσον αφορά τη βέλτιστη πολιτική (Q, R), οι $\bar{I}(s)$, $\bar{B}(s)$ και επομένως και η συνάρτηση κόστους $C(Q, R)$ δεν έχουν αναλυτικές εκφράσεις. Αντίθετα θα δείξουμε κάποιες δομικές ιδιότητες της βέλτιστης πολιτικής που επιτρέπουν την κατασκευή ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου για τον προσδιορισμό της.

Με βάση τα παραπάνω, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C(Q, R)$ μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο σταδίων ως εξής:

$$C^* = \inf_{Q\geq 1, R\geq -Q} C(Q, R) = \inf_{Q\geq 1} C^*(Q) \tag{12.9}$$

όπου

$$C^*(Q) = \inf_{R\geq -Q} C(Q, R) = ca + \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{Q} \inf_{R\geq -Q} \sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s).$$

Θεωρούμε το πρόβλημα του δεύτερου σταδίου $C^*(Q)$. Από την (12.8) προκύπτει ότι η $C(s)$ είναι κυρτή συνάρτηση του s. Πράγματι, επειδή $F(s) = 0$ για $s < 0$, προκύπτει ότι για όλες τις ακέραιες τιμές του s

$$C(s+1) - C(s) = -p + (h+p)F(s),$$

που είναι αύξουσα ως προς s. Επιπλέον, η $C(s)$ ελαχιστοποιείται για $s = s^*$, όπου

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\}. \qquad (12.10)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $s^* \geq 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για οποιοδήποτε Q το άθροισμα $\sum_{s=R+1}^{R+Q} C(s)$ έχει ελάχιστη τιμή ως προς $R \geq -Q$ και οι όροι του ελάχιστου αθροίσματος είναι οι Q κατά σειρά μικρότερες τιμές της $C(s)$, τις οποίες συμβολίζουμε με $C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots, C_{(Q)}$ και οι οποίες προκύπτουν όταν το s μεταβάλλεται μέσα σε ένα διάστημα ακεραίων $\{R^*(Q)+1, \ldots, R^*(Q)+Q\}$ (όχι απαραίτητα με αυτήν τη σειρά). Επομένως

$$C^*(Q) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)}\right) = ca + \frac{1}{Q}\left(Ka + \sum_{s=R^*(Q)+1}^{R^*(Q)+Q} C(s)\right). \qquad (12.11)$$

Το $R^*(Q)$ είναι το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας όταν η ποσότητα παραγγελίας είναι ίση με Q. Μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το παρακάτω αναδρομικό σχήμα για $Q = 1, 2, \ldots$

1. Για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* - 1$.

2. Έστω $R^*(Q)$ η βέλτιστη τιμή του R για Q. Τότε οι $C(R^*(Q)+1), \ldots, C(R^*(Q)+Q)$ είναι οι Q ελάχιστες τιμές της $C(s)$, $s \in \mathbb{Z}$. Για $Q+1$, λόγω της κυρτότητας της $C(s)$, η επόμενη αμέσως μεγαλύτερη τιμή της $C(s)$ θα είναι μια από τις $C(R^*(Q))$ και $C(R^*(Q)+Q+1)$. Στην πρώτη περίπτωση το επίπεδο αναπαραγγελίας θα μειωθεί κατά μία μονάδα, ενώ στη δεύτερη θα παραμείνει το ίδιο όπως πριν. Συγκεκριμένα,

$$R^*(Q+1) = \begin{cases} R^*(Q) - 1, & \text{αν } C(R^*(Q)) \leq C(R^*(Q)+Q+1) \\ R^*(Q), & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο αναπαραγγελίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q. Επειδή όμως για κάθε αύξηση του Q κατά μία μονάδα το $R^*(Q)$ μειώνεται κατά μία μονάδα ή παραμένει το ίδιο, ενώ για $Q = 1$, $R^*(1) = s^* > -1$, βλέπουμε ότι $R^*(Q) \geq -Q$ για κάθε τιμή του Q.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρώτο στάδιο βελτιστοποίησης στην (12.9), δηλαδή στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $C^*(Q)$. Παίρνουμε τις διαφορές $C^*(Q+1) - C^*(Q)$ και αντικαθιστώντας από την (12.11) έχουμε

$$C^*(Q+1) - C^*(Q) = \frac{w(Q) - Ka}{Q(Q+1)},$$

όπου

$$w(Q) = QC_{(Q+1)} - \sum_{j=1}^{Q} C_{(j)} = \sum_{j=1}^{Q}(C_{(Q+1)} - C_{(j)}). \qquad (12.12)$$

Παρατηρούμε ότι

$$w(Q+1) - w(Q) = (Q+1)(C_{(Q+2)} - C_{(Q+1)})$$

και επειδή η $C_{(j)}$ είναι αύξουσα ως προς j, προκύπτει ότι και η $w(Q)$ είναι αύξουσα ως προς Q. Επομένως, αν $C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0$ για κάποιο Q, τότε $C^*(Q'+1) - C^*(Q') > 0$ για κάθε $Q' \geq Q$. Συνεπώς η βέλτιστη τιμή του Q είναι η μικρότερη τιμή για την οποία η διαφορά γίνεται θετική:

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > Ka\}. \qquad (12.13)$$

Παράδειγμα 12.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων για ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση ακολουθεί διαδικασία Poisson με ρυθμό $a = 3$ μονάδες προϊόντος ανά μονάδα χρόνου, χρόνο καθυστέρησης παραγγελίας $L = 2$, σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 2$ και κόστη αποθήκευσης και ελλείψεων $h = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα, ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη πολιτική τύπου (Q, R).*

Υπολογίζουμε πρώτα τη βέλτιστη πολιτική αποθέματος βάσης s^* από την (12.10), και έχουμε

$$s^* = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{p}{h+p}\right\} = \min\left\{s : F(s) \geq \frac{2}{3}\right\},$$

όπου $F(s)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Poisson με παράμετρο $aL = 6$. Υπολογίζοντας τις τιμές της $F(s)$ παίρνουμε $F(6) = 0.606$ και $F(7) = 0.744$. Επομένως $s^* = 7$. Από την (12.8) υπολογίζουμε τη συνάρτηση κόστους για πολιτικές αποθέματος βάσης $C(s)$, για τιμές του $s = 2, 3, \dots, 10$ όπως φαίνεται στον Πίνακα 12.1.

Πίνακας 12.1: Πίνακας τιμών της συνάρτησης κόστους $C(s)$

s	$C(s)$
2	8.06
3	6.25
4	4.70
5	3.55
6	2.89
7	2.71
8	2.94
9	3.48
10	4.23

Από τον Πίνακα 12.1 προκύπτει ότι οι 9 ελάχιστες τιμές της $C(s)$ είναι $C_{(1)} = C(7) = 2.71, C_{(2)} = C(6) = 2.89, C_{(3)} = C(8) = 2.94, \dots, C_{(9)} = C(1) = 8.06$. Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας από την (12.13), αφού πρώτα υπολογιστούν οι τιμές είτε της $C^*Q)$ από την (12.11) είτε της $w(Q)$ από την (12.12), για διαδοχικές τιμές του Q μέχρι την πρώτη τιμή που ικανοποιεί τη συνθήκη τερματισμού. Οι τιμές των δύο συναρτήσεων έχουν υπολογιστεί στον Πίνακα 12.2.

Πίνακας 12.2: Πίνακας τιμών των $C^*(Q), w(Q)$

Q	$C^*(Q)$	$w(Q)$
1	8.71	0.18
2	5.80	0.28
3	4.85	1.91
4	4.51	2.19
5	4.32	5.58
6	4.30	8.38
7	4.36	11.22

Από τον πίνακα 12.2 και παίρνοντας υπόψη την τιμή $Ka = 6$, βλέπουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q^* = \inf\{Q \geq 1 : C^*(Q+1) - C^*(Q) > 0\} = \inf\{Q \geq 1 : w(Q) > 6\} = 6.$$

Για το βέλτιστο επίπεδο αναπαραγγελίας $R^*(Q^*) = R^*(6)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που περιγράψαμε παραπάνω. Ισοδύναμα, από τον Πίνακα 12.1 βλέπουμε ότι οι 6 ελάχιστες τιμές της $C(s)$, δηλαδή οι $C_{(1)}, \dots, C_{(6)}$ αντιστοιχούν στις $C(5), \dots, C(10)$. Επομένως $R^*(6) + 1 = 5$ και $R^*(6) = 4$.

Συνοψίζοντας, η βέλτιστη (Q, R) πολιτική παραγγελιών για το παραπάνω προϊόν είναι $Q^* = 6, R^* = 4$, δηλαδή όταν η θέση αποθέματος φτάνει τη στάθμη 4 να γίνεται παραγγελία 6 μονάδων προϊόντος.

12.2 Επεκτάσεις μοντέλου εφημεριδοπώλη – Πρόβλημα πολλών περιόδων χωρίς πάγια κόστη

Θεωρούμε μια αποθήκη απεριόριστης χωρητικότητας, η οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για τις επόμενες t περιόδους για την κάλυψη της ζήτησης ενός προϊόντος. Στην αρχή κάθε περιόδου, ο διαχειριστής της αποθήκης αποφασίζει την ποσότητα της παραγγελίας που θα θέσει. Η παραγγελία παραδίδεται άμεσα με κόστος c ανά κομμάτι, ενώ δεν υπάρχει πάγιο κόστος. Η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου n περιγράφεται από μια μη-αρνητική, φραγμένη τυχαία μεταβλητή D_n που παίρνει ακέραιες τιμές και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q_n(d) = \Pr[D_n = d], d = 0, 1, \ldots$. Οι ποσότητες ζήτησης κάθε περιόδου είναι ανεξάρτητες. Σε κάθε περίοδο η ζήτηση γίνεται γνωστή αμέσως μετά την παραλαβή της παραγγελίας και ικανοποιείται στον βαθμό που είναι δυνατό από το υπάρχον απόθεμα. Τα προϊόντα που περισσεύουν αποθηκεύονται για ικανοποίηση της μελλοντικής ζήτησης. Το κόστος αποθήκευσης ανά κομμάτι για μια περίοδο είναι h. Υπάρχουν κόστη έλλειψης που αντιστοιχούν στην ανικανοποίητη ζήτηση κάθε περιόδου. Το κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος είναι p. Η ανικανοποίητη ζήτηση μιας περιόδου καταγράφεται ώστε να ικανοποιηθεί από μελλοντικές παραγγελίες (backlogging). Το ζητούμενο είναι να βρεθεί βέλτιστη πολιτική παραγγελίας, που να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος για τις t περιόδους. Υποθέτουμε ότι $p > c$. Αυτό είναι εύλογο, διότι διαφορετικά (αν $p \leq c$) συμφέρει να μη γίνεται ποτέ παραγγελία, αφού η έλλειψη του προϊόντος κοστίζει λιγότερο από την ικανοποίηση της ζήτησης μέσω παραγγελίας.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο πλαίσιο του δυναμικού προγραμματισμού ως εξής:

- Στάδιο: Ο αριθμός n των περιόδων παραγγελίας που απομένουν.
- Κατάσταση: Ο αριθμός x των προϊόντων στην αποθήκη (στάθμη αποθέματος) στην αρχή μιας περιόδου. Η μεταβλητή $x \in \mathbb{Z}$ και αρνητικές τιμές σημαίνουν ότι η αντίστοιχη ποσότητα είναι σε εκκρεμότητα (backlog).
- Απόφαση: Η ποσότητα a της παραγγελίας, $a \in \{0, 1, \ldots\}$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, το ελάχιστο αναμενόμενο συνολικό κόστος από την περίοδο n και μετά, αν η στάθμη αποθέματος είναι x και απομένουν n περίοδοι.

Αν την περίοδο n υπάρχει απόθεμα x, γίνει παραγγελία a προϊόντων και η ζήτηση είναι D_n, τότε η κατάσταση στην αρχή της επόμενης περιόδου θα είναι $x + a - D_n$. Επιπλέον, θα υπάρχει άμεσο κόστος παραγγελίας ca, κόστος αποθήκευσης για την τρέχουσα περίοδο $h(x + a - D_n)^+$ και κόστος έλλειψης για την τρέχουσα περίοδο $p(x + a - D_n)^-$. Επομένως, το μέσο κόστος αν ληφθεί η απόφαση a θα είναι

$$c(x, a; n) = ca + hE[(x + a - D_n)^+] + pE[(x + a - D_n)^-].$$

Η εξίσωση βελτιστοποίησης θα έχει εδώ τη μορφή

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad x \in Z, && (12.14) \\ v_n(x) &= \min_{a\geq 0}[c(x, a; n) + E[v_{n-1}(x + a - D_n)] \\ &= \min_{y\geq x}[cy + hE[(y - D_n)^+] + pE[(y - D_n)^-] + E[v_{n-1}(y - D_n)]] - cx \\ &= \min_{y\geq x}[cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y - D_n)]] - cx, \quad x \in Z, && (12.15) \end{aligned}$$

όπου

$$l_n(y) = hE[(y - D_n)^+] + pE[(y - D_n)^-]. \qquad (12.16)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι μεταβλητές a, x, y παίρνουν ακέραιες τιμές. Είναι φανερό ότι το παρόν μοντέλο είναι το ανάλογο του μοντέλου του εφημεριδοπώλη (βλέπε ενότητα 11.5) για πολλές περιόδους παραγγελίας, αλλά χωρίς πάγια κόστη για τις παραγγελίες. Όπως και στο μοντέλο του εφημεριδοπώλη, είναι βολικό να δουλέψουμε βλέποντας ως μεταβλητή απόφασης την y, δηλαδή τη στάθμη αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας που θα θέσουμε, αντί της ποσότητας παραγγελίας a.

Για κάθε n, έχουμε ότι η συνάρτηση $cy + l_n(y)$ είναι κυρτή, διότι για κάθε σταθερό d, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $(y-d)^+$ και $(y-d)^-$ είναι κυρτές ως προς y, επομένως και οι $E[(y-D_n)^+]$ και $E[(y-D_n)^-]$ είναι κυρτές ως προς y (χρησιμοποιώντας ότι αν $f(y,z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z και Z τυχαία μεταβλητή, τότε και η $E[f(y,Z)]$ είναι κυρτή ως προς y).

Επίσης, για κάθε n, έχουμε ότι για αρκετά μεγάλα y θα ισχύει $y - D_n > 0$, με βεβαιότητα, αφού η D_n είναι φραγμένη. Επομένως, για τέτοια y θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(y-D_n)^+] &= E[y-D_n] = y - E[D_n] \\ E[(y-D_n)^-] &= 0 \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{y\to\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to\infty}(cy + hy - hE[D_n]) = \infty. \tag{12.17}$$

Ομοίως, για κάθε n, έχουμε ότι για αρκετά μικρά y θα ισχύει $y - D_n < 0$, με βεβαιότητα, αφού η D_n είναι φραγμένη. Επομένως, για τέτοια y θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(y-D_n)^+] &= 0 \\ E[(y-D_n)^-] &= E[D_n - y] = E[D_n] - y \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{y\to-\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to-\infty}(cy - py + pE[D_n]) = \infty, \tag{12.18}$$

αφού $p > c$. Επομένως, έχουμε αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Λήμμα 12.1 *Για κάθε n, η $cy + l_n(y)$ με $l_n(y)$ να δίνεται από την* (12.16) *είναι κυρτή και* $\lim_{y\to\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to-\infty}(cy + l_n(y)) = \infty$ *και επομένως έχει ολικό ελάχιστο.*

Από το Λήμμα 12.1, για $n = 1$, έχουμε ότι η $cy + l_1(y)$ έχει ολικό ελάχιστο είτε σε έναν μοναδικό ακέραιο S_1, είτε σε ένα διάστημα ακεραίων $S_1, S_1 + 1, \dots, S_1 + k$, για κάποιο $k \geq 1$, οπότε είναι φθίνουσα για $x < S_1$) και αύξουσα για $x > S_1 + k$. Από τις σχέσεις (12.14)-(12.15) παίρνουμε

$$v_1(x_1) = \begin{cases} cS_1 + l_1(S_1) - cx_1 & \text{αν } x_1 < S_1, \\ l_1(x_1) & \text{αν } x_1 \geq S_1 \end{cases} \tag{12.19}$$

και το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος που πρέπει να υπάρχει μετά την παραλαβή της παραγγελίας για $n = 1$ είναι

$$y_1^*(x_1) = \begin{cases} S_1 & \text{αν } x_1 < S_1, \\ x_1 & \text{αν } x_1 \geq S_1. \end{cases} \tag{12.20}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $v_1(x_1) = w_1(x_1) - cx_1$, όπου η συνάρτηση

$$w_1(x_1) = \begin{cases} cS_1 + l_1(S_1) & \text{αν } x_1 < S_1 \\ cx_1 + l_1(x_1) & \text{αν } x_1 \geq S_1 \end{cases}$$

είναι κυρτή, αφού η $cy + l_1(y)$ είναι κυρτή και το S_1 είναι το ελάχιστό της. Επομένως, η $v_1(x_1)$ είναι κυρτή ως άθροισμα δυο κυρτών συναρτήσεων, της $w_1(x_1)$ και της γραμμικής $-cx_1$. Επίσης, όμοια με την απόδειξη των (12.17) και (12.18) έχουμε

$$\lim_{x_1\to\infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1\to\infty} l_1(x_1) = \lim_{x_1\to\infty}(hx_1 - hE[D_n]) = \infty. \tag{12.21}$$

$$\lim_{x_1\to-\infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1\to-\infty}(cS_1 + l_1(S_1) - cx_1) = \infty. \tag{12.22}$$

Έτσι αποδείξαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 12.1 *Η συνάρτηση $v_1(x_1)$ είναι κυρτή και επιπλέον $\lim_{x_1\to-\infty} v_1(x_1) = \lim_{x_1\to\infty} v_1(x_1) = \infty$. Αν S_1 είναι η μικρότερη τιμή που ελαχιστοποιεί την $cy + l_1(y)$ στο $\mathbb{Z}$, όπου η $l_1(y)$ δίνεται από την (12.16) για $n = 1$, τότε ο βέλτιστος κανόνας απόφασης όταν απομένει μια περίοδος παραγγελίας υπαγορεύει να παραγγελθεί ποσότητα*

$$a_1^*(x_1) = \begin{cases} S_1 - x_1 & \textit{αν } x_1 < S_1, \\ 0 & \textit{αν } x_1 \geq S_1. \end{cases} \tag{12.23}$$

Το θεώρημα 12.1 μπορεί να γενικευτεί ώστε να πάρουμε τους βέλτιστους κανόνες απόφασης για κάθε n.

Θεώρημα 12.2 *Για κάθε $n = 1, 2, \dots, t$, η συνάρτηση $v_n(x_n)$ είναι κυρτή και επιπλέον $\lim_{x_n\to-\infty} v_n(x_n) = \lim_{x_n\to\infty} v_n(x_n) = \infty$. Αν S_n είναι η μικρότερη τιμή που ελαχιστοποιεί την $cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y - D_n)]$ στο $\mathbb{Z}$, όπου η $l_n(y)$ δίνεται από την (12.16), τότε ο βέλτιστος κανόνας απόφασης όταν απομένουν n περίοδοι παραγγελίας υπαγορεύει να παραγγελθεί ποσότητα*

$$a_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n - x_n & \textit{αν } x_n < S_n, \\ 0 & \textit{αν } x_n \geq S_n. \end{cases} \tag{12.24}$$

Το θεώρημα 12.2 αποδεικνύεται με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ ισχύει, όπως αποδείξαμε στο θεώρημα 12.1. Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Ορίζουμε

$$u_n(y) = cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y - D_n)]. \tag{12.25}$$

Όπως έχουμε δει στο λήμμα 12.1, για κάθε n, η $cy + l_n(y)$ είναι κυρτή και $\lim_{y\to\infty}(cy + l_n(y)) = \lim_{y\to-\infty}(cy + l_n(y)) = \infty$. Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για την $E[v_{n-1}(y-D_n)]$ ως συνάρτηση του y. Πράγματι, για κάθε z η συνάρτηση $v_{n-1}(y-z)$ είναι κυρτή ως προς y λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Αλλά τότε και η $E[v_{n-1}(y-D_n)]$ είναι κυρτή ως προς y (διότι, αν Z τυχαία μεταβλητή και $f(y, z)$ κυρτή ως προς y για κάθε σταθερό z, τότε και $E[f(y, Z)]$ είναι κυρτή ως προς y). Επίσης, από την ανισότητα Jensen έχουμε ότι

$$E[v_{n-1}(y - D_n)] \geq v_{n-1}(y - E[D_n]),$$

που σε συνδυασμό με την επαγωγική υπόθεση

$$\lim_{y\to-\infty} v_{n-1}(y) = \lim_{y\to\infty} v_{n-1}(y) = \infty,$$

δίνει ότι

$$\lim_{y\to-\infty} E[v_{n-1}(y - D_n)] = \lim_{y\to\infty} E[v_{n-1}(y - D_n)] = \infty.$$

Άρα, η $u_n(y)$ που δίνεται από την (12.25) είναι κυρτή και

$$\lim_{y\to\infty} u_n(y) = \lim_{y\to-\infty} u_n(y) = \infty.$$

Από εδώ και πέρα η απόδειξη προχωρά, όπως και η απόδειξη για το θεώρημα 12.1, δηλαδή συμπεραίνουμε ότι η $u_n(y)$ έχει ολικό ελάχιστο είτε σε κάποιον μοναδικό ακέραιο S_n είτε σε ένα διάστημα ακεραίων $S_n, S_n + 1, \dots, S_n + k$ για κάποιο $k \geq 1$, επομένως είναι φθίνουσα για $x_n < S_n$ και αύξουσα για $x_n > S_n + k$. Από τις σχέσεις (12.14)-(12.15) παίρνουμε

$$v_n(x_n) = \begin{cases} u_n(S_n) - cx_n & \text{αν } x_n < S_n, \\ u_n(x_n) - cx_n & \text{αν } x_n \geq S_n \end{cases}$$

και το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος που πρέπει να υπάρχει μετά την παραλαβή της παραγγελίας, n περιόδους πριν το τέλος είναι

$$y_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n & \text{αν } x_n < S_n, \\ x_n & \text{αν } x_n \geq S_n. \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $v_n(x_n) = w_n(x_n) - cx_n$, όπου η συνάρτηση

$$w_n(x_n) = \begin{cases} u_n(S_n) & \text{αν } x_n < S_n \\ u_n(x_n) & \text{αν } x_n \geq S_n \end{cases}$$

είναι κυρτή, αφού η $u_n(y)$ είναι κυρτή και το S_n είναι το ελάχιστό της. Επομένως, η $v_n(x_n)$ είναι κυρτή ως άθροισμα δυο κυρτών συναρτήσεων, της $w_n(x_n)$ και της γραμμικής $-cx_n$. Επίσης, όμοια με την απόδειξη των (12.17) και (12.18) έχουμε

$$\lim_{x_n \to \infty} v_n(x_n) = \lim_{x_n \to -\infty} v_n(x_n) = \infty.$$

Η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών που προέκυψε σε αυτήν την ενότητα ανήκει στην κατηγορία των πολιτικών αποθέματος βάσης (base-stock policy), σύμφωνα με τις οποίες σε κάθε περίοδο υπάρχει ένα βέλτιστο αρχικό απόθεμα και αν στην αρχή της περιόδου το πραγματικό ύψος του αποθέματος είναι χαμηλότερο, γίνεται παραγγελία κατάλληλης ποσότητας έτσι ώστε το απόθεμα να φτάσει στο επιθυμητό απόθεμα βάσης. Η μεταβλητή S_n παριστάνει το βέλτιστο απόθεμα βάσης της περιόδου n. Γενικά είναι δυνατό να προκύψει το απόθεμα βάσης $S_n < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνει παραγγελία αν $x < S_n$, δηλαδή αν το επίπεδο του backlog είναι μεγαλύτερο από $|S_n|$.

Οι πολιτικές αποθέματος βάσης είναι γενικά κατάλληλες σε προβλήματα περιοδικής παρακολούθησης, όπου παραγγελίες για αναπλήρωση του αποθέματος επιτρέπεται να γίνονται μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές (εδώ στην αρχή κάθε περιόδου), σε αντίθεση με τις πολιτικές τύπου (Q, R) όπου παραγγελίες γίνονται οποιαδήποτε στιγμή το απόθεμα φτάσει το επίπεδο παραγγελίας R. Όμως, έχουν το μειονέκτημα ότι κάποιες φορές η ποσότητα που παραγγέλλεται μπορεί να είναι πολύ μικρή αν το ύψος αποθέματος είναι λίγο κάτω από το απόθεμα βάσης. Αν υπάρχουν πάγια κόστη παραγγελίας και μάλιστα υψηλά, τότε πολιτικές αυτού του τύπου γενικά δεν είναι αποτελεσματικές. Σε προβλήματα περιοδικής παρακολούθησης με πάγια κόστη γενικά είναι βέλτιστες πολιτικές τύπου (s, S) που αποτελούν γενίκευση της κλάσης πολιτικών αποθέματος βάσης.

Σε μια πολιτική παραγγελιών της κλάσης (s, S) η ποσότητα παραγγελίας προσδιορίζεται έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει σε ένα καθορισμένο επίπεδο. Συγκεκριμένα, όταν η θέση αποθέματος πέσει στο επίπεδο s ή κάτω από αυτό γίνεται παραγγελία τόσης ποσότητας έτσι ώστε η θέση αποθέματος να επανέλθει στη θέση S. Ένα μοντέλο αυτής της κατηγορίας μελετάται στην επόμενη ενότητα.

12.3 Το μοντέλο (s,S) περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων της προηγούμενης ενότητας, με την επιπλέον υπόθεση ότι σε κάθε παραγγελία υπάρχει ένα σταθερό κόστος $K > 0$, επιπλέον του κόστους αγοράς c ανά μονάδα προϊόντος. Το κόστος K στην πράξη μπορεί να οφείλεται σε διαχειριστικά κόστη κατά την τοποθέτηση της παραγγελίας, σε κόστη παράδοσης της παραγγελίας που είναι ανεξάρτητα της ποσότητας κλπ. Η ύπαρξη του σταθερού κόστους γενικά αποτρέπει από το να γίνονται μικρές παραγγελίες στην αρχή κάθε περιόδου. Με άλλα λόγια, περιμένουμε ότι θα είναι βέλτιστο να γίνει παραγγελία στην αρχή μιας περιόδου μόνο αν το ύψος αποθέματος είναι αρκετά χαμηλό σχετικά με το επιθυμητό απόθεμα βάσης αυτής της περιόδου.

Το μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού για την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού κόστους n περιόδων είναι εντελώς αντίστοιχο με αυτό της Ενότητας 12.2, με την προσθήκη του πάγιου κόστους παραγγελίας. Συγκεκριμένα, η εξίσωση βελτιστοποίησης γίνεται

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad x \in \mathrm{Z}, && (12.26)\\ v_n(x) &= \min_{a\geq 0}[K1_{\{a>0\}} + c(x,a;n) + E[v_{n-1}(x+a-D_n)] \\ &= \min_{y\geq x}[K1_{\{y>x\}} + cy + hE[(y-D_n)^+] + pE[(y-D_n)^-] + E[v_{n-1}(y-D_n)] - cx \\ &= \min_{y\geq x}[K1_{\{y>x\}} + cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y-D_n)]] - cx \\ &= \min_{y\geq x}[K1_{\{y>x\}} + G_n(y)] - cx, \quad x \in \mathrm{Z}, && (12.27) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} l_n(y) &= hE[(y-D_n)^+] + pE[(y-D_n)^-] \\ G_n(y) &= cy + l_n(y) + E[v_{n-1}(y-D_n)]. \end{aligned}$$

Η ύπαρξη του ελάχιστου στην (12.27) εξασφαλίζεται από το παρακάτω αποτέλεσμα:

Λήμμα 12.2 1. *Η συνάρτηση $v_n(x)$, ικανοποιεί $v_n(x) \geq 0, n \geq 1, x \in \mathrm{Z}$.*

2. *Για $n \geq 1$ ισχύει $\lim_{x\to-\infty} G_n(x) = \lim_{x\to\infty} G_n(x) = \infty$ και επομένως η $G_n(x)$ έχει ολικό ελάχιστο.*

Η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού προκύπτει εύκολα με επαγωγή στο n, επειδή $v_0(x) = 0$ και $K1_{\{a>0\}} + c(x,a;n) > 0$ για κάθε $n \geq 1, x \in \mathbb{Z}, a \geq 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον πρώτο και το Λήμμα 12.1.

Από το Λήμμα 12.2 έχουμε ότι η $G_n(x)$ έχει ολικό ελάχιστο είτε σε έναν μοναδικό ακέραιο είτε σε ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων. Έστω S_n η μικρότερη τιμή που ελαχιστοποιεί την $G_n(x)$. Τότε η εξίσωση βελτιστοποίησης (12.27) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$v_n(x) = \min\{G_n(x), K + \min_{y>x} G_n(x)\} - cx. \tag{12.28}$$

Θα αποδείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική είναι της μορφής (s,S), δηλαδή για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν σταθερές s_n, S_n τέτοιες ώστε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας στο βήμα n είναι ίση με

$$a_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n - x_n & \text{αν } x_n < s_n, \\ 0 & \text{αν } x_n \geq s_n. \end{cases} \tag{12.29}$$

ή ισοδύναμα

$$y_n^*(x_n) = \begin{cases} S_n & \text{αν } x_n < s_n, \\ x_n & \text{αν } x_n \geq s_n. \end{cases} \tag{12.30}$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 1$ το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με αυτό της ενότητας 11.5, επομένως η βέλτιστη πολιτική προκύπτει ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 11.1.

Αν μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η $G_n(y)$ είναι κυρτή συνάρτηση του y, τότε οι (12.29) και (12.30) θα προέκυπταν γενικεύοντας επαγωγικά την απόδειξη του Θεωρήματος 11.1. Η ιδιότητα αυτή γενικά δεν ισχύει όπως μπορεί να δει κανείς σε αριθμητικά παραδείγματα. Θα δείξουμε όμως ότι η $G_n(y)$ ικανοποιεί μια ιδιότητα ασθενέστερη της κυρτότητας, που παρ' όλα αυτά αρκεί για να εξασφαλίσει τη δομή της βέλτιστης πολιτικής.

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$G_n(x+1) - G_n(x) \leq \frac{G_n(x+j) - G_n(x) + K}{j}, \tag{12.31}$$

για $n \geq 1, j \geq 1, x \in Z$. Η ανισότητα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως K–κυρτότητα και μια αντίστοιχη μορφή της μπορεί να αποδειχθεί και στην περίπτωση που ο χώρος καταστάσεων είναι συνεχής, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$. Όταν $K = 0$, θέτοντας $j = 2$ στην (12.31) προκύπτει ότι

$$G_n(x+1) - G_n(x) \leq G_n(x+2) - G_n(x+1),$$

επομένως η $G_n(x)$ είναι κυρτή για $x \in Z$ και το πρόβλημα ανάγεται σε αυτό της προηγούμενης ενότητας.

Η δομή της βέλτιστης πολιτικής προκύπτει από το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 12.3 1. *Η συνάρτηση $G_n(x)$ ικανοποιεί την (12.31) για $n \geq 1, j \geq 1, x \in Z$.*

2. *Για $n \geq 1$ η βέλτιστη πολιτική προσδιορίζεται από τις (12.29) και (12.30), όπου S_n η μικρότερη τιμή που ελαχιστοποιεί την $G_n(x), x \in \mathbb{Z}$ και*

$$s_n = \min\{x \in \mathbb{Z} : x \leq S_n, G_n(x) \leq G_n(S_n) + K\}.$$

Η απόδειξη προκύπτει με ταυτόχρονη επαγωγή για τους δύο ισχυρισμούς του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, για $n = 1$ οι δύο ισχυρισμοί προκύπτουν όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 11.1. Υποθέτουμε τώρα ότι και οι δύο ισχύουν για κάποιο n. Τότε για $n + 1$ έχουμε

$$G_{n+1}(x) = cx + l_{n+1}(x) + E[v_n(x - D_n)].$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η $v_n(x)$ ικανοποιεί επίσης την K-κυρτότητα, δηλαδή

$$v_n(x+1) - v_n(x) \leq \frac{v_n(x+j) - v_n(x) + K}{j}, \tag{12.32}$$

για $n \geq 1, j \geq 1, x \in Z$. Από την (12.30) προκύπτει ότι

$$v_n(x) = \begin{cases} G_n(S_n) + K - cx & \text{αν } x_n < s_n, \\ G_n(x) - cx & \text{αν } x_n \geq s_n. \end{cases}$$

Για $j = 1$ η (12.32) είναι προφανής, επειδή $K > 0$. Τώρα σταθεροποιούμε ένα $j > 1$ και θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $x \geq s_n$: Τότε $v_n(x) = G_n(x) - cx$, $v_n(x+1) = G_n(x+1) - c(x+1)$ και $v_n(x+j) = G_n(x+j) - c(x+j)$, επομένως

$$v_n(x+1) - v_n(x) = G_n(x+1) - G_n(x) - c.$$

Από την επαγωγική υπόθεση ισχύει η (12.31), επομένως

$$v_n(x+1) - v_n(x) \leq \frac{G_n(x+j) - G_n(x) - jc + K}{j}.$$

Όμως από τις παραπάνω ισότητες έχουμε $G_n(x) = v_n(x) + cx$ και $G_n(x+j) = v_n(x+j) + c(x+j)$, επομένως

$$v_n(x+1) - v_n(x) \leq \frac{v_n(x+j) - v_n(x) + K}{j}.$$

Περίπτωση 2. $x < s_n \leq x + j$: Τότε $v_n(x) = G_n(S_n) + K - cx$ και $v_n(x+j) = G_n(x+j) - c(x+j)$. Επιπλέον, $x + 1 \leq s_n < S_n$, επομένως $v_n(x+1) \leq G_n(S_n) + K - c(x+1)$ και

$$v_n(x+1) - v_n(x) \leq -c.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\frac{v_n(x+j)-v_n(x)+K}{j} &= \frac{G_n(x+j)-c(x+j)-(G_n(S_n)+K-cx)+K}{j}\\ &= \frac{G_n(x+j)-G_n(S_n)}{j}-c\\ &\geq -c,\end{aligned}$$

επειδή η $G_n(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο S_n. Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει η (12.32).

Περίπτωση 3. $x+j<s_n$: Τότε $v_n(x)=G_n(S_n)+K-cx, v_n(x+1)=G_n(S_n)+K-c(x+1), v_n(x+j)=G_n(S_n)+K-c(x+j)$. Επομένως

$$v_n(x+1)-v_n(x)=-c$$

και

$$\begin{aligned}\frac{v_n(x+j)-v_n(x)+K}{j} &= \frac{G_n(S_n)+K-c(x+j)-(G_n(S_n)+K-cx)+K}{j}\\ &= \frac{\mathrm{K}}{j}-c\\ &\geq -c.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει η (12.32).

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στα δύο μέρη της (12.32) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}E[v_n(x+1-D_n)]-E[v_n(x-D_n)] &= \sum_d q_n(d)(v_n(x+1-d)-v_n(x-d))\\ &\leq \sum_d q_n(d)\frac{v_n(x+j-d)-v_n(x-d)+K}{j}\\ &= \frac{E[v_n(x+j-D_n)]-E[v_n(x-D_n)]+K}{j}\end{aligned}\tag{12.33}$$

Επίσης, επειδή η $l_{n+1}(x)$ είναι κυρτή,

$$l_n(x+1)-l_n(x)\leq\frac{l_n(x+j)-l_n(x)}{j}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$G_n(x+1)-G_n(x)\leq\frac{G_n(x+j)-G_n(x)+K}{j},$$

επομένως έχει αποδειχθεί ο ισχυρισμός 1 του θεωρήματος για $n+1$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού 2, έστω $\tilde{S}_{n+1}(x)$ η μικρότερη από τις ακέραιες τιμές που ελαχιστοποιούν την $G_{n+1}(y), y\in\mathbb{Z}, y>x$. Η ύπαρξη της $\tilde{S}_{n+1}(x)$ εξασφαλίζεται από το Λήμμα 12.2. Από τη (12.34) για $n+1$ έχουμε

$$v_{n+1}(x)=\min\{G_{n+1}(x), K+G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x))\}-cx.\tag{12.34}$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν για κάποιο $x\in\mathbb{Z}$ είναι βέλτιστο να γίνει παραγγελία, τότε το ίδιο θα είναι βέλτιστο για κάθε $x'<x$. 'Εστω ότι $y^*_{n+1}(x)=\tilde{S}_{n+1}(x)$, επομένως

$$K+G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x))-G_{n+1}(x)<0.$$

Τότε έχουμε

$$K+G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x))-G_{n+1}(x-1)-(G_{n+1}(x)-G_{n+1}(x-1))<0$$

επομένως

$$K + G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x)) - G_{n+1}(x-1) < G_{n+1}(x) - G_{n+1}(x-1).$$

Όμως από τη (12.31) για $j = \tilde{S}_{n+1}(x) - x + 1$ έχουμε

$$G_{n+1}(x) - G_{n+1}(x-1) \leq \frac{K + G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x)) - G_{n+1}(x-1)}{\tilde{S}_{n+1}(x) - x + 1}$$

επομένως

$$K + G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x)) - G_{n+1}(x-1) < \frac{K + G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x)) - G_{n+1}(x-1)}{\tilde{S}_{n+1}(x) - x + 1}.$$

Επειδή $\tilde{S}_{n+1}(x)) - x + 1 > 1$, από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει $K + G_{n+1}(\tilde{S}_{n+1}(x)) - G_{n+1}(x-1) < 0$, επομένως είναι βέλτιστο να γίνει παραγγελία στην κατάσταση $x - 1$.

Με βάση τα παραπάνω, η δομή της βέλτιστης πολιτικής όταν απομένουν $n + 1$ βήματα μέχρι το τέλος του ορίζοντα προκύπτει εύκολα ως εξής: Έστω S_{n+1} η μικρότερη από τις ακέραιες τιμές που ελαχιστοποιούν την $G_{n+1}(x), x \in \mathbb{Z}$ και

$$s_{n+1} = \min\{x \leq S_{n+1} : G_{n+1}(x) \leq G_{n+1}(S_{n+1}) + K\}.$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} G_{n+1}(x) = \infty$, η παραπάνω ανισότητα παραβιάζεται για αρκετά μικρά x, επομένως $s_{n+1} > -\infty$. Για $x = s_{n+1} - 1$ η βέλτιστη πολιτική είναι να γίνει παραγγελία, επομένως, με βάση την ιδιότητα που αποδείξαμε παραπάνω, ισχύει $y^*_{n+1}(x) = S_{n+1}$ για κάθε $x < s_n$. Για $s_{n+1} \leq x \leq S_{n+1}$ ισχύει $G_{n+1}(x) \leq G_{n+1}(S_{n+1}) + K$, επομένως $y^*_{n+1}(x) = x$. Τέλος έστω $x > S_{n+1}$. Στην κατάσταση x δεν μπορεί να είναι βέλτιστο να γίνει παραγγελία, επειδή τότε με βάση την παραπάνω ιδιότητα, αυτό θα ήταν επίσης βέλτιστο και για $x = S_{n+1}$, πράγμα άτοπο. Επομένως αποδείξαμε ότι $y^*_{n+1}(x) = x$ για κάθε $x \geq s_{n+1}$ και η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Όπως και στην περίπτωση του μηδενικού σταθερού κόστους, και εδώ είναι δυνατό για κάποιο βήμα n να ισχύει $s_n < 0$ ή $S_n < 0$ ή και τα δύο, με τις κατάλληλες προσαρμογές στην ερμηνεία της βέλτιστης πολιτικής παραγγελιών.

12.4 Ασκήσεις

Άσκηση 12.1 *Σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών η ζήτηση για ένα συγκεκριμένο μοντέλο κινητού τηλεφώνου ακολουθεί διαδικασία Poisson με ρυθμό 2 τεμάχια ανά ημέρα. Ο χρόνος παράδοσης μιας νέας παραγγελίας είναι 4 ημέρες. Κάθε παραγγελία έχει σταθερό κόστος ίσο με 30 ευρώ. Οι ελλείψεις αντιμετωπίζονται με εκκρεμότητες προς τους πελάτες (backlogging). Το κόστος αποθήκευσης ενός τηλεφώνου είναι ίσο με 5 ευρώ ανά ημέρα ενώ το κόστος backlog είναι ίσο με 8 ευρώ ανά τηλέφωνο και ανά ημέρα. Να υπολογιστεί η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος παραγγελιών, αποθήκευσης και backlog ανά ημέρα σε μεγάλο ορίζοντα.*

Άσκηση 12.2 *Θεωρούμε το πρόβλημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος χωρίς σταθερό κόστος παραγγελίας ($K = 0$), όπου οι ποσότητες ζήτησης σε κάθε περίοδο είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας q και στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική αποθέματος βάσης S (επιτρέπεται $S < 0$). Έστω I_t η ποσότητα αποθέματος στην αρχή της περιόδου t, αφού έχουν προστεθεί τυχόν παραγγελίες που έχουν γίνει σε αυτήν την περίοδο και πριν εμφανιστεί η ζήτηση της περιόδου.*

1. *Να υπολογιστεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα.*

2. *Να βρεθεί η βέλτιστη τιμή του S που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα.*

Άσκηση 12.3 *Θεωρούμε το πρόβλημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος χωρίς σταθερό κόστος παραγγελίας της ενότητας 12.2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα παραγγελίας A σε κάθε περίοδο.*

Να δειχθεί ότι η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών διατηρεί τη δομή της πολιτικής αποθέματος βάσης με την παραλλαγή ότι αν σε κάποια περίοδο η υπολειπόμενη ποσότητα από το απόθεμα βάσης είναι μεγαλύτερη από A, τότε γίνεται παραγγελία μεγέθους A, δηλαδή

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \min(S_n - x_n, A) & \text{αν } x_n < S_n, \\ 0 & \text{αν } x_n \geq S_n. \end{cases}$$

Άσκηση 12.4 *Θεωρούμε τα προβλήματα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος παραγγελίας, όπου οι ποσότητες ζήτησης σε κάθε περίοδο είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού αποπληθωρισμένου κόστους σε άπειρο ορίζοντα. Να δειχθεί ότι η δομή της βέλτιστης πολιτικής είναι της μορφής $(S-1, S)$ (δηλαδή αποθέματος βάσης S) όταν το σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 0$ ή της μορφής (s, S) όταν $K > 0$, όπου s, S είναι σταθερές ανεξάρτητες της περιόδου.*

Άσκηση 12.5 *Να δειχθεί ότι αν στο πρόβλημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος της ενότητας 12.3 θέσουμε $K = 0$, η βέλτιστη πολιτική είναι της μορφής $(S_n - 1, S_n), n \geq 1$, επομένως προκύπτει η βέλτιστη πολιτική της ενότητας 12.2.*

Άσκηση 12.6 *Θεωρούμε το πρόβλημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος της ενότητας 12.3, όπου οι ποσότητες ζήτησης σε κάθε περίοδο είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(d) = \Pr[D = d], d = 0, 1, \dots, M$, και στο οποίο εφαρμόζεται πολιτική παραγγελιών της μορφής (s, S) με $s < S$. Έστω I_t η ποσότητα αποθέματος στην αρχή της περιόδου t, αφού έχουν προστεθεί τυχόν παραγγελίες που έχουν γίνει σε αυτήν την περίοδο και πριν εμφανιστεί η ζήτηση της περιόδου.*

1. *Να δειχθεί ότι η στοχαστική διαδικασία $I_t, t = 0, 1, \dots$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και να βρεθούν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος.*

2. *Να δειχθεί ότι η παραπάνω Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μια θετικά επαναληπτική απεριοδική κλάση $\{s, s+1, \dots, S\}$ ενώ όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι μεταβατικές.*

3. *Αν στην αρχή μιας περιόδου έχει γίνει παραγγελία, επομένως $I_t = S$, να διατυπωθούν κατάλληλες εξισώσεις για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού περιόδων μέχρι την επόμενη παραγγελία.*

4. *Έστω $\pi = (\pi_i, i \in \mathbb{Z})$ η οριακή κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Να υπολογιστεί το μέσο συνολικό κόστος παραγγελιών αποθήκευσης και ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα, ως συνάρτηση της π.*

Άσκηση 12.7 *Θεωρούμε το πρόβλημα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος της προηγούμενης άσκησης, όπου οι ποσότητες ζήτησης σε κάθε περίοδο ακολουθούν κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας q.*

1. *Να βρεθεί η οριακή κατανομή.*

2. *Να υπολογιστεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.*

Σχόλια

Η παρουσίαση του μοντέλου (Q, R) συνεχούς παρακολούθησης με ζήτηση Poisson βασίζεται στο βιβλίο P. H. Zipkin 2000. Στο ίδιο βιβλίο, όπως επίσης και στο Nahmias και Lennon Olsen 2015 παρουσιάζονται προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος κάτω από γενική κατανομή ζήτησης αλλά με απλουστευτικές παραδοχές ως προς τα κόστη ελλείψεων. Η παρουσίαση του προβλήματος περιοδικής παρακολούθησης με σταθερό κόστος βασίζεται στο βιβλίο Ross 1970. Η απόδειξη της δομής (S, s) της βέλτιστης πολιτικής δόθηκε στην εργασία Scarf 1959. Στην εργασία Scarf 2002 ο H. Scarf παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα ιστορική αναδρομή σχετικά με την απόδειξη του αποτελέσματος και μεταγενέστερες σημαντικές επεκτάσεις, όπως η κλασική εργασία Clark και Scarf 1960, στην οποία επιλύεται το αντίστοιχο πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων σε σειριακά δίκτυα παραγωγής. Στην εργασία Federgruen και P. Zipkin 1984 αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος υπολογισμού των παραμέτρων της πολιτικής (S, s).

Βιβλιογραφία

[1] P. H. Zipkin. *Foundations of Inventory Management*. Boston, MA: Mc Graw Hill, 2000.

[2] S. Nahmias και T. Lennon Olsen. *Production and Operations Analysis, 7th Edition*. Long Groves, Illinois: Waveland Press, Inc., 2015. ISBN: 978-1478623069.

[3] S. Ross. *Applied probability models with optimization appplications*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1970.

[4] H. Scarf. "The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem". Στο: *Mathematical Methods in Social Sciences*. Επιμέλεια υπό K. Arrow, S. Karlin και P. Suppes. Stanford, CA: Stanford University Press, 1959. Κεφ. 13, σσ. 196–202.

[5] H. Scarf. "Inventory Theory". Στο: *Operations Research* 50.1 (2002), σσ. 186–191.

[6] A. J. Clark και H. Scarf. "Optimal policies for a multi-echelon inventory problem". Στο: *Management Science* 6.4 (1960), σσ. 475–490.

[7] A. Federgruen και P. Zipkin. "An efficient algorithm for computing optimal (s, S) policies". Στο: *Operations Research* 32.6 (1984), σσ. 1268–1285.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Σ. Κάντα. *Αλγοριθμικές Τεχνικές στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες: Μέθοδοι Πιθανογεννητριών και Εφαρμογές*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, 2006.

[2] Ν. Τσουπαρόπουλος. *Ανάλυση Μέσης Τιμής σε Συστήματα Εξυπηρέτησης*. Αθήνα: Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα, Τμήμα Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, 2015.

[3] Δ. Φακίνος. *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2003. ISBN: 978-960-266-206-9.

[4] Δ. Φακίνος. *Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2007. ISBN: 978-9602661956.

[5] J. Abate, G.L. Choudhury και W. Whitt. "An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models". Στο: *Grassmann, W.K. (ed.) Computational Probability*. Kluwer, 2000. Κεφ. 8, σσ. 257–323. ISBN: 978-0792386179. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4828-4_8.

[6] J. Abate και W. Whitt. "Numerical inversion of probability generating functions". Στο: *Operations Research Letters* 12 (1992), σσ. 275–281.

[7] J. Abate και W. Whitt. "Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions". Στο: *ORSA Journal on Computing* 7 (1995), σσ. 36–43.

[8] I. Adan και J. Resing. *Queueing Theory*. Eindhoven: Notes available online, 2001.

[9] I. Adan και J. van der Wal. *Difference and Differential Equations in Stochastic Operations Research*. Eindhoven: Notes available online, 1998.

[10] I. Adan και J. van der Wal. "Mean value techniques". Στο: *Boucherie, R. and van Dijk, N.M. (eds.) Queueing Networks: A Fundamental Approach*. Springer, 2011. Κεφ. 13, σσ. 561–586. ISBN: 978-1-4419-6471-7. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6472-4_13.

[11] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable, 3rd Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1979.

Μπουρνέτας, Α.Ν. και Οικονόμου, Α.Θ. (2024). «Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα *[Προπτυχιακό Εγχειρίδιο]*». Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

[12] K. J. Arrow, T. Harris και J. Marschak. "Optimal inventory policy". Στο: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1951), σσ. 250–272.

[13] J.R. Artalejo και J.A.C. Resing. "Mean value analysis of single server retrial queues". Στο: *Asian-Pacific Journal of Operational Research* 27 (2010), σσ. 335–345.

[14] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Wiley, 1987. ISBN: 978-0471911739.

[15] S. Axsäter. *Inventory Control*. 3rd. New York, NY: Springer, 2015.

[16] F. Baccelli και P. Bremaud. *Elements of Queueing Theory. Palm Martingale Calculus and Stochastic Recurrences, 2nd Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1979.

[17] C. Bell και S. Stidham. "Individual versus social optimization in the allocation of customers to alternative servers". Στο: *Management Science* 29 (1983), σσ. 831–839.

[18] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[19] D. Bertsekas. *Dynamic Programming. Deterministic and Stochastic Models*. Engewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

[20] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 1, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2017. ISBN: 978-1886529434.

[21] D. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Volume 2: Approximate Dynamic Programming, 4th edition*. Belmont, MA: Athena Scientific, 2012. ISBN: 978-1886529441.

[22] D.P. Bertsekas και J.N. Tsitsiklis. *Introduction to Probability, 2nd Edition*. Athena Scientific, 2008. ISBN: 978-1886529236.

[23] G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer και K.S. Trivedi. *Queueing Networks and Markov Chains*. Wiley, 1998. ISBN: 978-0471193666.

[24] A. N. Burnetas και C. E. Smith. "Adaptive ordering and pricing for perishable products". Στο: *Operations Research* 48.3 (2000), σσ. 436–443.

[25] A. Burnetas και A. Economou. "Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times". Στο: *Queueing Systems* 56 (2007), σσ. 213–228.

[26] A. Burnetas, A. Economou και G. Vasiliadis. "Strategic customer behavior in a queueing system with delayed observations". Στο: *Queueing Systems* 86 (2017), σσ. 389–418.

[27] C.G. Cassandras και S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems, 2nd Edition*. Springer, 2008.

[28] X. Chao, M. Miyazawa και M. Pinedo. *Queueing Networks: Customers, Signals and Product Form Solutions*. Wiley, 1999. ISBN: 978-0471985706.

[29] H. Chen και M. Frank. "Monopoly pricing when customers queue". Στο: *IIE Transactions* 36 (2004), σσ. 569–581.

[30] H. Chen και D.D. Yao. *Fundamentals of Queueing Networks*. Springer, 2001. ISBN: 978-1475753011.

[31] A. J. Clark και H. Scarf. "Optimal policies for a multi-echelon inventory problem". Στο: *Management Science* 6.4 (1960), σσ. 475–490.

[32] J.W. Cohen. *The Single Server Queue*. Amsterdam: North-Holland, 1969. ISBN: 978-0720423587.

[33] C. Derman. *Finite State Markovian Decision Processes*. New York, NY: Academic Press, 1970.

[34] D.R. Cox. "The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables". Στο: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51 (1955), σσ. 433–441.

[35] Y. Dimitrakopoulos, A. Economou και S. Leonardos. "Strategic customer behavior in a queueing system with alternating information structure". Στο: *European Journal of Operational Research* 291 (2021), σσ. 1024–1040.

[36] A. Economou. "The Impact of Information Structure on Strategic Behavior in Queueing Systems". Στο: *Anisimov V. and Limnios, N. (eds.) Queueing Theory 2*. John Wiley και Sons, Ltd, 2021. Κεφ. 4, σσ. 137–169. ISBN: 978-1119755234. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119755234.ch4.

[37] A. Economou. "How much information should be given to the strategic customers of a queueing system?" Στο: *Queueing Systems* 100.3-4 (2022), σσ. 421–423. DOI: 10.1007/s11134-022-09741-2.

[38] A. Economou και S. Kanta. "Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space". Στο: *Queueing Systems* 59 (2008), σσ. 237–269.

[39] A. Economou και A. Manou. "Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment". Στο: *Annals of Operations Research* 208 (2013), σσ. 489–514.

[40] N. M. Edelson και K. Hildebrand. "Congestion tolls for Poisson queueing processes". Στο: *Econometrica* 43 (1975), σσ. 81–92.

[41] M. El-Taha και S.Jr. Stidham. *Sample-path Analysis of Queueing Systems*. Kluwer, 1998. ISBN: 978-0792382102.

[42] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations, 3rd Edition*. Springer, 2006. ISBN: 978-0387230597.

[43] T. Engset. "Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bestimmung der Wähleranzahl in automatischen Fernsprechämtern". Στο: *Elektrotechn. Zeitschrift* 31 (1918), σσ. 304–306.

[44] A.K. Erlang. "Sandsynlighedsregning og Telefonsamtaler (Probability calculation and telephone conversations)". Στο: *Nyt Tidsskrift for Matematik* 20.B (1909), σσ. 33–39.

[45] A.K. Erlang. "Løsning af nogle Problemer fra Sandsynlighedsregningen af Betydning for de automatiske Telefoncentraler (Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges)". Στο: *Elektroteknikeren* 13 (1917), σσ. 5–13.

[46] A.K. Erlang. "Telefon-Ventetider. Et Stykke Sandsynlighedsregning (Telephone Waiting Times. A Bit of Probability Calculation)". Στο: *Matematisk Tidsskrift B* 31 (1920), σσ. 25–42.

[47] D. Erlenkotter. "Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model". Στο: *Operations Research* 38.6 (1990), σσ. 934–1139.

[48] A. Federgruen και P. Zipkin. "An efficient algorithm for computing optimal (s, S) policies". Στο: *Operations Research* 32.6 (1984), σσ. 1268–1285.

[49] H.R. Gail, S.L. Hantler και B.A. Taylor. "Spectral analysis of M/G/1 and G/M/1 type Markov chains". Στο: *Advances in Applied Probability* 28 (1996), σσ. 114–165.

[50] H.R. Gail, S.L. Hantler και B.A. Taylor. "Use of characteristics roots for solving infinite state Markov chains". Στο: *Grassmann, W. (ed) Computational Probability*. Springer, 2000. Κεφ. 7, σσ. 205–255. ISBN: 978-0-7923-8617-9. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4828-4_7.

[51] G. Gallego και I. Moon. "The distribution free newsboy problem: review and extensions". Στο: *Journal of the Operational Research Society* 44.8 (1993), σσ. 183–194.

[52] E. Gelenbe και G. Pujolle. *Introduction to Queueing Networks, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 1998. ISBN: 978-0471962945.

[53] C. H. Glock και E. H. Grosse. "The impact of controllable production rates on the performance of inventory systems: A systematic review of the literature". Στο: *European Journal of Operational Research* 288.3 (2021), σσ. 703–720.

[54] S.C. Graves. "The applications of queueing theory to continuous perishable inventory systems". Στο: *Management Science* 28 (1982), σσ. 400–406.

[55] L. Green. "Queueing analysis in healthcare". Στο: *Hall, R.W. (ed.) Patient flow: Reducing Delay in Healthcare Delivery*. Springer, 2006. Κεφ. 10, σσ. 281–307. ISBN: 978-1461495116.

[56] G. Grimmett και D. Stirzaker. *Probability and Random Processes, 4th Edition*. Oxford, 2020. ISBN: 978-0198847595.

[57] P. Guo και P. Zipkin. "The effects of the availability of waiting-time information on a balking queue". Στο: *European Journal of Operational Research* 198 (2009), σσ. 199–209.

[58] M. Harchol-Balter. *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge, 2013. ISBN: 978-1107027503.

[59] F. W. Harris. "How Many Parts to Make at Once". Στο: *Factory, The Magazine of Management* 10.2 (1913), σσ. 135–136.

[60] R. Hassin και M. Haviv. *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer, 2003. ISBN: 978-1402072031.

[61] R. Hassin. "Consumer information in markets with random products quality: The case of queues and balking". Στο: *Econometrica* 54 (1986), σσ. 1185–1195.

[62] R. Hassin. *Rational Queueing*. CRC Press, 2016. ISBN: 978-1498745277.

[63] R. Hassin και A. Koshman. "Profit maximization in the M/M/1 queue". Στο: *Operations Research Letters* 45 (2017), σσ. 436–441.

[64] R. Hassin και R. Roet-Green. "On queue-length information when customers travel to a queue". Στο: *Manufacturing & Service Operations Management* 23 (2020), σσ. 989–1004.

[65] M. Haviv. *Queues: A Course in Queueing Theory*. Springer, 2013. ISBN: 978-1461467649.

[66] M. Haviv. "Regulating an M/G/1 queue when customers know their demand". Στο: *Performance Evaluation* 77 (2014), σσ. 57–71.

[67] M. Haviv και B. Oz. "Self-regulation of an unobservable queue". Στο: *Management Science* 64 (2018), σσ. 2380–2389.

[68] O. Hernandez-Lerma και J.-B. Lasserre. *Discrete-time Markov control processes: basic optimality criteria*. New York, NY: Springer, 1996.

[69] F.S. Hillier και G.J. Lieberman. *Introduction to Operations Research, 10th edition*. New York, NY: McGraw-Hill, 2015.

[70] W.J. Hopp και M.L. Spearman. *Factory Physics, 3rd Edition*. Waveland Press Inc., 2011. ISBN: 978-1577667391.

[71] R. Howard. *Dynamic Programming and Markov Processes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1960.

[72] M. Hu, Y. Li και J. Wang. "Efficient ignorance: Information heterogeneity in a queue". Στο: *Management Science* 64 (2018), σσ. 2650–2671.

[73] R. Ibrahim. "Sharing delay information in service systems: a literature survey". Στο: *Queueing Systems* 89 (2018), σσ. 49–79. DOI: 10.1007/s11134-018-9577-y.

[74] J.R. Jackson. "Networks of waiting lines". Στο: *Operations Research* 5 (1957), σσ. 518–521.

[75] J.R. Jackson. "Jobshop-like queueing systems". Στο: *Management Science* 10 (1963), σσ. 131–142.

[76] M.A. Johnson. "An emperical study of queueing approximations based on phase-type approximations". Στο: *Stochastic Models* 9 (1993), σσ. 531–561.

[77] E.P.C. Kao. *An Introduction to Stochastic Processes*. New York: Duxbury Press, 1997. ISBN: 978-0534255183.

[78] W. Karush. "A queuing model for an inventory problem". Στο: *Operations Research* 5 (1957), σσ. 693–703.

[79] F.P. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks*. Chichester: Wiley, 1979. ISBN: 978-0471276012.

[80] D.G. Kendall. "Some problems in the theory of queues". Στο: *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 13 (1951), 151–173, discussion 173–185.

[81] D.G. Kendall. "Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain". Στο: *The Annals of Mathematical Statistics* 24 (1953), σσ. 338–354.

[82] J.F.C. Kingman. "The first Erlang century - and the next". Στο: *Queueing Systems* 63 (2009), σσ. 3–12.

[83] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 1: Theory*. Wiley, 1975. ISBN: 978-0471491101.

[84] L. Kleinrock. *Queueing Systems. Volume 2: Computer Applications*. Wiley, 1976. ISBN: 978-0471491118.

[85] G. Koole. "Monotonicity in Markov Reward and Decision Chains: Theory and Applications". Στο: *Foundations and Trends in Stochastic Systems* 1.1 (2007), σσ. 1–76.

[86] G. Koole. *Call Center Optimization*. MG Books, 2013. ISBN: 978-9082017908.

[87] V.G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 2nd Edition*. CRC Press, 2010. ISBN: 978-1439808757.

[88] G. Latouche και V. Ramaswami. *Introduction to Matrix Analytic Models in Stochastic Modeling*. ASA-SIAM Series on Statistics και Applied Probability, 1999. ISBN: 978-0898714258.

[89] J.D.C. Little. "A proof of the queueing formula $L = \lambda W$". Στο: *Operations Research* 9 (1961), σσ. 383–387.

[90] P.M. Morse. *Queues, Inventories and Maintenance; the Analysis of Operational Systems with Variable Demand and Supply*. Wiley, 1958.

[91] S. Nahmias. *Perishable Inventory Systems*. New York, NY: Springer, 2011.

[92] S. Nahmias και T. Lennon Olsen. *Production and Operations Analysis, 7th Edition*. Long Groves, Illinois: Waveland Press, Inc., 2015. ISBN: 978-1478623069.

[93] P. Naor. "The regulation of queue size by levying tolls". Στο: *Econometrica* 37 (1969), σσ. 15–24.

[94] M.F. Neuts. *Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. The Johns Hopkins University Press, 1981. ISBN: 978-0801825606.

[95] M.F. Neuts. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. CRC Press, 1989. ISBN: 978-0824782832.

[96] N.C. Petruzzi και M. Dada. "Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions". Στο: *Operations Research* 47.2 (1999), σσ. 183–194.

[97] F. Pollaczek. "Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie". Στο: *Math. Z.* 32 (1930), σσ. 64–100.

[98] N. U. Prabhu. *Stochastic storage processes: queues, insurance risk, dams, and data communication*. 2nd. New York, NY: Springer, 1998.

[99] M. Puterman. *Markov Decision Processes*. New York, NY: Wiley, 1994.

[100] Y. Qin, R. Wang, A. J. Vakharia, Y. Chen και M. M. Seref. "The newsvendor problem: Review and directions for future research". Στο: *European Journal of Operational Research* 213.2 (2011), σσ. 361–374.

[101] S. Ross. *Applied probability models with optimization appplications*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1970.

[102] S. Ross. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. New York, NY: Academic Press, 1983.

[103] S. Ross. *Stochastic Processes, 2nd Edition*. Wiley, 1995. ISBN: 978-0471120629.

[104] S. Ross. *Introduction to Probability Models, 12th Edition*. Academic Publishers, 2019. ISBN: 978-0128143469.

[105] H. Scarf. "The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem". Στο: *Mathematical Methods in Social Sciences*. Επιμέλεια υπό K. Arrow, S. Karlin και P. Suppes. Stanford, CA: Stanford University Press, 1959. Κεφ. 13, σσ. 196–202.

[106] H. Scarf. "Inventory Theory". Στο: *Operations Research* 50.1 (2002), σσ. 186–191.

[107] L.I. Sennott. *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*. Wiley-Interscience, 1998. ISBN: 978-0471161202.

[108] R. Serfozo. *Introduction to Stochastic Networks*. Springer, 1999. ISBN: 978-0387987736.

[109] K. Sigman. *Stationary Marked Point Processes: An Intuitive Approach*. Chapman και Hall/CRC, 1995. ISBN: 978-0412984310.

[110] J.F. Shortle, J.M. Thompson, D. Gross και C.M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory, 5th Edition*. Wiley, 2018. ISBN: 978-1118943526.

[111] S.Jr Stidham. "$L = \lambda W$: A discounted analogue and a new proof". Στο: *Operations Research* 20 (1972), σσ. 1115–1120.

[112] S.Jr Stidham. "A last word on $L = \lambda W$". Στο: *Operations Research* 22 (1974), σσ. 417–421.

[113] S.Jr Stidham. "Optimal control of admission to a queueing system". Στο: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30.8 (1985), σσ. 705–713.

[114] S.Jr Stidham. "Analysis, design and control of queueing systems". Στο: *Operations Research* 50 (2002), σσ. 197–216.

[115] S.Jr. Stidham. *Optimal Design of Queueing Systems*. CRC Press, 2009. ISBN: 978-1584880769.

[116] S.Jr. Stidham και R. Weber. "A survey of Markov decision models for control of networks of queues". Στο: *Queueing Systems* 13 (1993), σσ. 291–314.

[117] H.A Taha. *Operations Research: An Introduction, 10th edition*. Pearson, 2018.

[118] H.C. Tijms. *A First Course in Stochastic Models, 2nd Edition*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN: 978-0471498803.

[119] N.M. van Dijk. *Queueing Networks and Product Forms: A Systems Approach*. Chichester: Wiley, 1993. ISBN: 978-0471928488.

[120] H. M. Wagner και T. Whitin. "Dynamic version of the economic lot size model". Στο: *Management Science* 5 (1958), σσ. 89–96.

[121] S. Webster και C. X. Wang. "The loss-averse newsvendor problem". Στο: *Omega* 37.1 (2009), σσ. 93–105.

[122] W. Whitt. "Approximating a point process by a renewal process I: two basic methods". Στο: *Operations Research* 30 (1986), σσ. 125–147.

[123] P. Whittle. *Systems in Stochastic Equilibrium*. Chichester: Wiley, 1986. ISBN: 978-0471908876.

[124] H.S. Wilf. *Generatingfunctionology, 3rd Edition*. AK Peters/CRC, 2005. ISBN: 978-1568812793.

[125] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan και G.J.J.A.N. van Houtum. "Mean value analysis for polling systems". Στο: *Queueing Systems: Theory and Applications* 54.1 (2006), σσ. 35–44.

[126] R.W. Wolff. "Poisson arrivals see time averages". Στο: *Operations Research* 30 (1982), σσ. 223–231.

[127] R.W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. ISBN: 978-0138466923.

[128] P. H. Zipkin. *Foundations of Inventory Management*. Boston, MA: Mc Graw Hill, 2000.

Το παρόν σύγγραμμα αποτελεί μια εισαγωγή στη Στοχαστική Επιχειρησιακή Έρευνα, μια περιοχή που ασχολείται με ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων για την αποτίμηση απόδοσης και τη βελτιστοποίηση συστημάτων και διαδικασιών που υπόκεινται σε αβεβαιότητα. Οι στόχοι του βιβλίου είναι α) να δώσει στον αναγνώστη τη δυνατότητα να μάθει πώς θα εφαρμόζει τα βασικά μεθοδολογικά εργαλεία της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας κατά τρόπο ακριβή και β) να του παρέχει τη δυνατότητα να μελετήσει έναν μεγάλο αριθμό εφαρμογών, χωρίς η έκταση του βιβλίου να γίνει απαγορευτική. Για τον σκοπό αυτό, το θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάζεται κατά τρόπο ακριβή, όσον αφορά τόσο τις προϋποθέσεις όσο και τα αποτελέσματα, με απλούστερες αποδείξεις ή αιτιολογήσεις των αποτελεσμάτων χωρίς πολλές τεχνικές λεπτομέρειες.

Από μαθηματική σκοπιά το βιβλίο εστιάζεται σε δύο βασικά μεθοδολογικά εργαλεία: στις Στοχαστικές Διαδικασίες με Δομή Κόστους και στον Στοχαστικό Δυναμικό Προγραμματισμό. Στην πρώτη κατηγορία μελετώνται τα βασικά μοντέλα ανανεωτικών διαδικασιών και Μαρκοβιανών διαδικασιών με κόστη. Στη συνέχεια, το πλαίσιο της Μαρκοβιανής διαδικασίας με κόστη επεκτείνεται εισάγοντας τη δυνατότητα αποφάσεων, οδηγώντας στο πλαίσιο του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού και των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων, οι οποίες μελετώνται κάτω από διάφορα κριτήρια βελτιστοποίησης. Στο πλαίσιο των εφαρμογών γίνεται μια εισαγωγή σε δύο βασικές περιοχές: στη Θεωρία Ουρών Αναμονής και στη Θεωρία Διαχείρισης Αποθεμάτων. Στις περιοχές αυτές μελετώνται προβλήματα που αξιοποιούν τις μεθόδους οι οποίες αναπτύχθηκαν στο πρώτο μέρος. Γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής και μια αναφορά σε όλους τους τύπους αυτών των προβλημάτων, με έμφαση στη μοντελοποίηση και στην αποτίμηση της απόδοσής τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού και δυναμικού ελέγχου συστημάτων εξυπηρέτησης. Τέλος, έπειτα από μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών εννοιών, παρουσιάζονται μερικά βασικά προβλήματα της Θεωρίας Διαχείρισης Αποθεμάτων, με έμφαση σε στοχαστικά μοντέλα που εμπεριέχουν αβεβαιότητα στη ζήτηση.

Το παρόν σύγγραμμα δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου ΚΑΛΛΙΠΟΣ+	
Χρηματοδότης	Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, Προγράμματα ΠΔΕ, ΕΠΑ 2020-2025
Φορέας υλοποίησης	ΕΛΚΕ ΕΜΠ
Φορέας λειτουργίας	ΣΕΑΒ/Παράρτημα ΕΜΠ/Μονάδα Εκδόσεων
Διάρκεια 2ης Φάσης	2020-2023
Σκοπός	Η δημιουργία ακαδημαϊκών ψηφιακών συγγραμμάτων ανοικτής πρόσβασης (περισσότερων από 700) • Προπτυχιακών και μεταπτυχιακών εγχειριδίων • Μονογραφιών • Μεταφράσεων ανοικτών textbooks • Βιβλιογραφικών Οδηγών
Επιστημονικά Υπεύθυνος	Νικόλαος Μήτρου, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

ISBN: 978-618-228-207-6	**DOI:** http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-497

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας