

0.1 Ελεύθερες ομάδες.

0.1.1 Ορισμός-Καθολική Ιδιότητα.

Ορισμός 0.1.1. Έστω X ένα (μη κενό) σύνολο αναζητούμε μια ομάδα, έστω F , και μια απεικόνιση $\sigma : X \rightarrow F$ με την εξής ιδιότητα:

Για κάθε ομάδα G και κάθε απεικόνιση $\alpha : X \rightarrow G$ να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : F \rightarrow G$ ώστε $\beta \circ \sigma = \alpha$.

Την ομάδα F και την απεικόνιση σ , αν υπάρχουν, θα την ονομάζουμε **ελεύθερη** επί του X , μέσω της απεικόνισης σ .

Πριν αποδείξουμε ότι πράγματι υπάρχει τέτοια ομάδα, θα δούμε μερικές συνέπειες του ορισμού.

Η απεικόνιση σ είναι 1-1. Πράγματι, αν το X είναι μονοσύνολο, η σ είναι 1-1. Έστω x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του X . Επιλέγουμε μια ομάδα G με τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία g_1, g_2 και μια απεικόνιση $\alpha : X \rightarrow G$ με $\alpha(x_1) = g_1$ και $\alpha(x_2) = g_2$, τότε, επειδή υπάρχει ο ομομορφισμός $\beta : F \rightarrow G$ με $\beta \circ \sigma = \alpha$, έχουμε $(\beta \circ \sigma)(x_1) = \alpha(x_1) = g_1$ και $(\beta \circ \sigma)(x_2) = \alpha(x_2) = g_2$. Τα g_1, g_2 έχουν υποτεθεί διαφορετικά, η β είναι απεικόνιση, άρα, αναγκαστικά, $\sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$.

Επομένως θα μπορούσαμε να ταυτίσουμε το σύνολο X με την εικόνα του $\sigma(X) \subset F$.

Όπως διαισθανόμαστε το σύνολο X (και η 1-1 απεικόνιση σ) καθορίζουν την ελεύθερη ομάδα F .

Πρόταση 0.1.2. Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των ισοπληθικών συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα ($|X_1| = |X_2|$). Οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια 1-1 και επί απεικόνιση $\alpha : X_1 \rightarrow X_2$.

Από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας F_1 και τον ρόλο της τυχαίας ομάδας να τον έχει η ομάδα F_2 έχουμε $\beta_1 \sigma_1 = \sigma_2 \alpha$.

Τώρα, αντιστρέφοντας τους ρόλους, έχουμε $\beta_2 \sigma_2 = \sigma_1 \alpha^{-1}$.

Οπότε, συνθέτοντας από αριστερά, στην πρώτη ισότητα, με τον ομομορφισμό β_2 και χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση έχουμε

$$\beta_2 \beta_1 \sigma_1 = \beta_2 \sigma_2 \alpha = \sigma_1 \alpha^{-1} \alpha = \sigma_1.$$

Αλλά έχουμε και την προφανή σχέση $1_{F_1} \sigma_1 = \sigma_1$. Αλλά οι ομομορφισμοί β_1, β_2 , από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας, είναι μοναδικοί. Δηλαδή, $\beta_2 \beta_1 = 1_{F_1}$.

Δυϊκά $\beta_1 \beta_2 = 1_{F_2}$ και τέλος.

□

Παρατήρηση 0.1.3. Για να είναι το όλο "οικοδόμημα" στέρεο πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω F_1, F_2 δύο ελεύθερες ομάδες επί των συνόλων X_1 και X_2 αντίστοιχα. Αν οι F_1 και F_2 είναι ισόμορφες, τότε τα σύνολα X_1 και X_2 είναι ισοπληθικά ($|X_1| = |X_2|$).

Θα αναβάλλουμε προς το παρόν την απόδειξη, διότι μας λείπει "κάτι".

Πρόταση 0.1.4. Έστω G μια ομάδα παραγόμενη από ένα (υπο)σύνολό της Y και F μια ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X . Αν $\alpha : X \rightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση επί, τότε ο (μοναδικός) ομομορφισμός $\beta : F \rightarrow G$, ο οποίος επεκτείνει την απεικόνιση α είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Προφανής αφού η α είναι επί του συνόλου Y , το οποίο παράγει την G .

□

Η προηγούμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική στην όλη θεώρηση της Θεωρίας Ομάδων και συνοψίζεται στο εξής:

Κάθε ομάδα είναι πηλίκιο μιας ελεύθερης ομάδας.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε μια ομάδα G , τότε αυτή (μπορεί να) έχει πολλά σύνολα γεννητόρων και για κάθενα από αυτά, έστω ένα Y , υπάρχουν άπειρα σύνολα X και απεικονίσεις $\alpha : X \rightarrow Y$, οι οποίες να είναι επί. Άρα υπάρχουν άπειρες το πλήθος ελεύθερες ομάδες, των οποίων η G είναι πηλίκιο. Παρ' όλα ταύτα το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν χάνει την σημασία του.

Πρόταση 0.1.5. (Προβολική ιδιότητα των ελευθέρων ομάδων)

Έστω F μια ελεύθερη ομάδα και $\alpha : F \rightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε για έναν επιμορφισμό ομάδων $\beta : G \rightarrow H$ υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : F \rightarrow G$, ώστε $\beta\gamma = \alpha$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η F είναι ελεύθερη επί του συνόλου X , τότε για κάθε $x \in X \subset F$ έχουμε $\alpha(x) \in H = Im \beta$ (δεν ξεχνάμε η β έχει υποτεθεί επί). Επομένως υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $g_x \in G$ με $\beta(g_x) = \alpha(x)$. Η F είναι ελεύθερη, άρα η απεικόνιση $x \rightarrow g_x$ επεκτείνεται σε ένα ομομορφισμό $\gamma : F \rightarrow G$, ο οποίος πληροί την σχέση $\beta\gamma = \alpha$ (γιατί;;), δεν ξεχνάμε ότι το X παράγει την F .

□

Κατασκευή των ελευθέρων Ομάδων.

Έστω ένα σύνολο X και $X^{-1} \{x^{-1} \mid x \in X\}$, τα τυπικά αντίστροφα των στοιχείων του Xκατασκευάζουμε τις λέξεις.... η κενή λέξη ℓορίζουμε την παράθεση λέξεων... το σύνολο S όλων των λέξεων γίνεται ημιομάδα με πράξη την παράθεση λέξεων.

Ορίζουμε στο σύνολο S δύο "αντιστρεπτές" διαδικασίες, σε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \dots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \dots x_n^{e_n}$ παρεμβάλλουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ (όλα τα e 's είναι \pm), η διαγράφουμε τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$

Οι διαδικασίες αυτές ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας \sim στο S Το σύνολο πηλίκων S/\sim αποκτά την δομή ομάδας ορίζοντας ως πράξη $[w] \cdot [u] =: [wu]$ Το ενδιαφέρον εδώ είναι να δείξουμε ότι η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη (δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων).....

Την ομάδα $(S/\sim, \cdot)$ την συμβολίζουμε με F και είναι η ζητούμενη ελεύθερη ομάδα επί του X με την απεικόνιση $\sigma : X \rightarrow F$ να είναι η προφανής $x \rightarrow [x]$.

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι η εικόνα $\sigma(X)$ προφανώς παράγει την F .

Έστω τώρα μια απεικόνιση $\alpha : X \rightarrow G$ σε μια ομάδα G με $\alpha(x_i) = g_i$. Πρέπει να ορίσουμε έναν ομομορφισμό $\beta : F \rightarrow G$, οποίος να επεκτείνει την α ($\beta\sigma = \alpha$).

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι κάθε απεικόνιση $\bar{\beta} : S \rightarrow G$, η οποία απεικονίζει κάθε λέξη $w = x_1^{e_1} \dots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \dots x_n^{e_n}$ στο στοιχείο $\bar{\beta}(w) = g_1^{e_1} \dots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \dots g_n^{e_n}$ ορίζει έναν ομομορφισμό ομάδων $\beta : F \rightarrow G$ (γιατί;;). Μα αφού τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$ απεικονίζονται σε ένα $g^e g^{-e} = 1_G$, έχουμε ότι αν $w \sim u$ (δηλαδή $[w] = [u]$), τότε $\beta([w]) = \beta([u])$, όπου ως $\beta([w]) = g_1^{e_1} \dots g_i^{e_i} g_{i+1}^{e_{i+1}} \dots g_n^{e_n}$. Τώρα προφανώς $\beta\sigma = \alpha$ και τέλος;;;

Όχι δεν τελειώσαμε πρέπει να δείξουμε ότι ο β είναι μοναδικός με αυτή την ιδιότητα.

Πράγματι αν $\gamma : F \rightarrow G$ είναι ένα άλλος ομομορφισμός με $\gamma\sigma = \alpha$, τότε οι β και γ "συμφωνούν" στα στοιχεία του συνόλου $\sigma(X)$, μα αυτό το σύνολο παράγει την F , άρα τελικά $\beta = \gamma$.

Ανηγμένες λέξεις.

Μια λέξη $w = x_1^{e_1} \dots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \dots x_n^{e_n}$ στο σύνολο S θα ονομάζεται *ανηγμένη* αν δεν περιέχει τμήματα της μορφής $x^e x^{-e}$.

Προφανώς, αν έχουμε μια λέξη $w = x_1^{e_1} \dots x_i^{e_i} x_{i+1}^{e_{i+1}} \dots x_n^{e_n}$, κάνοντας διαδοχικές διαγραφές τμημάτων της μορφής $x^e x^{-e}$ σε πεπερασμένα βήματα φθάνουμε σε μια ανηγμένη λέξη ισοδύναμη με την αρχική. Το πρόβλημα είναι το εξής: Αν έχουμε δύο ισοδύναμες λέξεις κάνοντας διαδοχικές διαγραφές, σε κάθε μία λέξη ξεχωριστά, οι ισοδύναμες ανηγμένες λέξεις, στις οποίες φθάνουμε είναι ίσες;

Έστω ότι έχουμε αρχικά τις ισοδύναμες λέξεις w και u με αντίστοιχες ανηγμένες τις \bar{w} και \bar{u} . Προφανώς $[w] = [\bar{w}] = [u] = [\bar{u}]$, οπότε $[w][u]^{-1} = [wu^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Αυτό δίνει $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$. Επομένως, αν $\bar{w} = a_1^{e_1} \dots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \dots a_n^{e_n}$ και $\bar{u} = b_1^{k_1} \dots b_i^{k_i} b_{i+1}^{k_{i+1}} \dots b_m^{k_m}$, τότε από την σχέση $[\bar{w}\bar{u}^{-1}] = 1_F = [\ell]$ έπεται ότι αναγωγές έχουμε **μόνο** στο τμήμα $\dots a_n^{e_n} b_m^{-k_m} \dots$, δηλαδή $a_n^{e_n} = b_m^{k_m}$. Οπότε προχωράμε και τελικά (αναγκαστικά) $n = m$ και $a_i^{e_i} = b_i^{k_i}$.

Δηλαδή αποδείξαμε την εξής σημαντική πρόταση.

Πρόταση 0.1.6. Έστω F ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X . Σε κάθε στοιχείο της $[w]$ αντιστοιχεί μοναδική ανηγμένη λέξη \bar{w} , οπότε μπορούμε, άνευ άλλης μνείας, να ταυτίσουμε τα στοιχεία (κλάσεις ισοδυναμίας) της ελεύθερης ομάδας με τις (αντίστοιχες) ανηγμένες λέξεις του συνόλου S . Όπου φυσικά η πράξη της ομάδας είναι πλέον η $\bar{w}\bar{u} = \overline{wu}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει προηγηθεί. □

Ως (ανηγμένο) μήκος πλέον της ανηγμένης λέξης $\bar{w} = a_1^{e_1} \dots a_i^{e_i} a_{i+1}^{e_{i+1}} \dots a_n^{e_n}$ ορίζουμε το n και είναι μια καλά ορισμένη έννοια.

Παραδείγματα Ελευθέρων ομάδων.

Πρώτο Παράδειγμα.

Στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουμε τις απεικονίσεις $\alpha(z) = z+2$ και $\beta(z) = \frac{z}{2z+1}$, $z \neq -1/2$ και $\beta(-1/2) = 1/2$. Οι α και β παράγουν μια ελεύθερη ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.

Ας δούμε το θέμα "δαισθητικά", χωρίς καμία έκπτωση στην αυστηρότητα.

Πρώτα απ' όλα οι απεικονίσεις α και β είναι 1-1 και επί, άρα έχει νόημα να μιλήσουμε για ομάδα παραγόμενη από αυτές τις απεικονίσεις. (Να κάνετε τον έλεγχο!!)

Εδώ το κρίσιμο σημείο είναι ότι, αν παρατηρήσουμε, θα δούμε ότι οι δυνάμεις της α απεικονίζουν εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου εκτός αυτού, ενώ δυνάμεις της β απεικονίζουν εξωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικού του (εκτός του μηδενός). Επομένως **καμία** ανηγμένη λέξη της μορφής $\alpha^{k_1} \beta^{\lambda_1} \dots \alpha^{k_n} \beta^{\lambda_n}$ δεν μας δίνει την ταυτοτική μετάθεση.

Μπορείτε και πρέπει να κάνετε τον έλεγχο αυτού του ισχυρισμού. Το μόνο που πρέπει να λάβετε υπ' όψη και να εξαντλήσετε όλες τις περιπτώσεις είναι ότι ένα από τα (ή και τα δύο) k_1 και λ_n ενδέχεται να είναι ίσον με μηδέν.

Δεύτερο Παράδειγμα.

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Η ομάδα η παραγόμενη από τους δύο αυτούς πίνακες με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι ελεύθερη επί του συνόλου $\{A, B\}$.

Εδώ έχουμε το ίδιο πρόβλημα να αποδείξουμε ότι καμία ανηγμένη "λέξη" της μορφής $A^{k_1} B^{\lambda_1} \dots A^{k_n} B^{\lambda_n}$ δεν μας δίνει τον ταυτοτικό πίνακα.

Αν προσπαθήσουμε στοιχειωδώς θα δούμε ότι (χωρίς να είναι ακατόρθωτο) θα δυσκολευθούμε αρκετά.

Ας γυρίσουμε πίσω και ας κάνουμε την εξής παρατήρηση. Σε κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ αντιστοιχούμε την συνάρτηση $\ell_K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\ell_K(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

(Οι γνωστοί; *Moëbius* μετασχηματισμοί).

Τώρα η απεικόνιση μεταξύ των ομάδων $\langle \alpha, \beta \rangle$ του προηγούμενου παραδείγματος και της ομάδος $\langle A, B \rangle$ με $\alpha \rightarrow A$ και $\beta \rightarrow B$ ορίζει έναν ισομορφισμό ομάδων (γιατί ;;;) ...και τέλος.

Παραστάσεις Ομάδων.

Είχαμε δει την σημαντική πρόταση (??) ότι κάθε ομάδα είναι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας. Δηλαδή για κάθε ομάδα G υπάρχει μια ελεύθερη ομάδα F και ένας επιμορφισμός $\vartheta : F \rightarrow G$ με $F/\text{Ker}\vartheta \simeq G$. Αν η ελεύθερη ομάδα F είναι ελεύθερη επί του συνόλου X , τότε η εικόνα $\vartheta(X) = Y$ αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας G για κάθε $r \in \text{Ker}\vartheta$ έχουμε $\vartheta(r) = 1 \in G$. Το ζεύγος (F, ϑ) καθορίζει την ομάδα G , θα ονομάζεται μια **παράσταση** της G και θα συμβολίζεται $G = \langle Y \mid R \rangle$, όπου $Y = \vartheta(X)$ και $R = \text{Ker}\vartheta$.

Πριν προχωρήσουμε σε ό,τιδήποτε άλλο πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι υπάρχουν πολλές παραστάσεις μιας ομάδας, αρκεί δούμε την Πρόταση ??.

Ο πυρήνας $\text{Ker}\vartheta$ είναι κανονική υποομάδα της ελεύθερης ομάδας F επομένως, αν S είναι ένα υποσύνολο της F , το οποίο παράγει τον $\text{Ker}\vartheta$ ως κανονική υποομάδα. Δηλαδή $\text{Ker}\vartheta = \cap \{ N \mid N \triangleleft F \text{ με } S \subset N \}$, τότε τα στοιχεία του S είναι αρκετά να παραστήσουν την G γι' αυτό συνήθως συμβολίζουμε $G = \langle Y \mid s = 1, s \in S \rangle$.

Σχέσειςκαι ορίζουσες σχέσεις.

....Ομάδες πεπερασμένα γεννώμενες.....πεπερασμένα παριστώμενες

Το σημαντικό της όλης μελέτης των ομάδων είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω Y ένα τυχαίο (μη κενό) σύνολο και S ένα σύνολο λέξεων ως προς το "αλφάβητο" Y . Αν τώρα πάρουμε την ελεύθερη ομάδα επί του Y και R την κανονική υποομάδα της την παραγόμενη (κανονικά) από το S , τότε το πηλίκο F/R ορίζει μια ομάδα. Αυτή την ομάδα θα την αποκαλούμε ομάδα που ορίζεται από την παράσταση $\langle Y \mid S \rangle$.

Επομένως θα μπορούσαμε να πάμε αντιστροφα και να δούμε τις ελεύθερες ομάδες ως μια πολλή ειδική παράστασης ομάδας, όπου το σύνολο των οριζουσών σχέσεων είναι το κενό σύνολο.

Προς το παρόν δεν θα επεκταθούμε περισσότερο επ' αυτού.

Μερικά Παραδείγματα.

1. Η άπειρη κυκλική ομάδα έχει παράσταση $C = \langle a \rangle$

Η πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n έχει παράσταση $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ και είναι πηλίκο της ελεύθερης ομάδας διάστασης 1 (της άπειρης κυκλικής), όπου ο επιμορφισμός $\vartheta : C = \langle a \rangle \rightarrow C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ έχει ως πυρήνα την υποομάδα $\langle a^n \rangle$.

2. Ας δούμε την διεδρική ομάδα D_{2n} , η οποία είναι το ημιεθύ γινόμενο της κυκλικής ομάδας $C_n = \langle a \mid a^n \rangle$ δια της κυκλικής ομάδος $C_2 = \langle b \mid b^2 \rangle$ ο αυτομορφισμός που ορίζει το ημιεθύ γινόμενο είναι ο φ με $\varphi(a) = a^{-1}$. Οπότε έχουμε την παράσταση της $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

Αν θέλουμε να την δούμε ως πηλίκο ελεύθερης ομάδας δεν έχουμε παρά να πάρουμε την ελεύθερη ομάδα σε δύο γενήτορες $F = \langle x, y \rangle$ και τον επιμορφισμό ϑ με $\vartheta(x) = a$ και $\vartheta(y) = b$, οπότε βλέπουμε (δεν είναι και τόσο εύκολο) ότι $\text{Ker}\vartheta = \langle x^n, y^2, (xy)^2 \rangle^F$.

3. Θα μπορούσατε να δείτε ότι μια παράσταση της άπειρης διεδρικής είναι η εξής

$$D_\infty = \langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle.$$

Όπως συνειδητοποιούμε σιγά-σιγά μια ομάδα μπορεί να έχει πολλές παραστάσεις. Το κέραιο ερώτημα στην Θεωρία Ομάδων, αλλά και γενικότερα στα Μαθηματικά είναι: Πώς "μεταβαίνουμε" από την παράσταση μιας ομάδας σε μια άλλη παράσταση της;

Ως πρώτο βήμα μπορούμε να αποδείξουμε το εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 0.1.7. Θεώρημα του von Dyck

Έστω G, H δύο ομάδες και $\vartheta : F \rightarrow G, \varphi : F \rightarrow H$ δύο παραστάσεις τους. Αν κάθε σχέση της G είναι και σχέση της H , τότε η H είναι επιμορφική (πηλίκο) ομάδα της G .

Απόδειξη. Το ότι κάθε σχέση της G είναι και σχέση της H σημαίνει ότι $\text{Ker}\vartheta \subset \text{Ker}\varphi$. Επομένως, $H \sim F/\text{Ker}\varphi \sim (F/\text{Ker}\vartheta)/(\text{Ker}\varphi/\text{Ker}\vartheta)$, άρα πηλίκο της G . □

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα.

4 Έστω $G = \langle a, b, c \mid a^2, aba, b^2c^2 = cb, a^3c = c^3a^4 \rangle$ μια παράσταση ομάδας. Ας προσπαθήσουμε να "αναγνωρίσουμε" την ομάδα αυτή.

Η ομάδα αυτή αποτελεί επιμορφική εικόνα της ελεύθερης ομάδας σε τρεις γεννήτορες $F = \langle x, y, z \rangle$ με τον προφανή επιμορφισμό, που ορίζεται από την απεικόνιση $\vartheta(x) = a, \vartheta(y) = b, \vartheta(z) = c$. Τι σημαίνει έχω αυτές τις ορίζουσες σχέσεις; Το ότι $a^2 = 1 \in G$ είναι ισοδύναμο με το $x^2 \in \text{Ker}\vartheta$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες σχέσεις. Οπότε, από την δεύτερη σχέση έχουμε ότι $y \in \text{Ker}\vartheta$ (δεν ξεχνούμε ότι ο πυρήνας ομομορφισμού είναι κανονική υποομάδα). Από την τρίτη σχέση έχουμε ότι $y^{-1}z^{-1}y^2z^2 \in \text{Ker}\vartheta$, δηλαδή $z \in \text{Ker}\vartheta$. Τέλος από την τελευταία σχέση έπεται ότι $x \in \text{Ker}\vartheta$. Δηλαδή και οι τρεις γεννήτορες της ελεύθερης ομάδας F βρίσκονται στον $\text{Ker}\vartheta$. Συνεπώς το πηλίκο $F/\text{Ker}\vartheta \sim G$ είναι η τετριμμένη ομάδα.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η παράσταση μιας ομάδας "περιέχει" όλες τις πληροφορίες για την ομάδα, το μόνο που μένει είναι να τις "αποκωδικοποιήσουμε", κάτι που δεν είναι καθόλου εύκολο στην γενικότητά του.

Επίσης, όπως έχουμε επισημάνει μια ομάδα έχει πολλές παραστάσεις. Οπότε, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην Θεωρία Ομάδων, το οποίο διέπει όλα τα Μαθηματικά είναι το εξής:

Έστω $G_1 = \langle X \mid R \rangle, G_2 = \langle Y \mid S \rangle$ δύο παραστάσεις ομάδων, μπορούμε να αποφανθούμε αν οι δύο αυτές ομάδες είναι ισόμορφες;

Αυτό είναι το γνωστό πρόβλημα του **ισομορφισμού**.

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα στην Θεωρία Ομάδων, το οποίο επίσης διέπει όλα τα Μαθηματικά είναι το εξής:

Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ μια παράσταση ομάδας, επιλέγουμε ένα $g \in G$ μπορούμε να αποφανθούμε αν το στοιχείο αυτό είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας;

Πιο συγκεκριμένα. Ένα στοιχείο της ομάδας είναι μια λέξη $g = g(x_i)$ ως προς τους γεννήτορες $x_i \in X$. Μπορούμε να αποφανθούμε αν το στοιχείο αυτό μπορεί να γραφεί ως γινόμενο συζυγών στοιχείων (και αντιστρόφων) από το σύνολο των ορίζουσών σχέσεων R ;

Αυτό είναι το γνωστό πρόβλημα της **λέξης**.

Προφανώς αυτά τα δύο προβλήματα έχουν λύση στην περίπτωση των ελευθέρων ομάδων.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα/πρόβλημα.

5 Ως γνωστόν ($;;;$) η ομάδα μεταθέσεων S_n παράγεται από τους κύκλους $a = (12)$ και $b = (12 \dots n)$. Δηλαδή έχουμε μια παράσταση $S_n \langle a, b \mid ??? \rangle$. Αναζητούμε τις ορίζουσες σχέσεις στην θέση των ερωτηματικών.

Στην γενική περίπτωση δεν και τόσο εύκολο να απαντήσουμε. Προσπαθήστε στην περίπτωση των S_3 και S_4 .

6 Αν πάρουμε το ευθύ γινόμενο δύο απείρων κυκλικών ομάδων $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε μια παράσταση αυτής της ομάδας είναι ($;;$) η $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Αντίστροφα, αν πάρουμε την παράσταση $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$, τότε μπορούμε ($;;$) να αποφανθούμε ότι αυτή η παράσταση ορίζει μια ομάδα ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ενώ όλα αυτά φαντάζουν προφανή, στην αρχή χρειάζονται μεγάλη προσοχή, γι' αυτό προσπαθήστε να απαντήσετε στα ερωτηματικά αυτά.

Θεώρημα 0.1.8. Έστω $G = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \mid s_1, s_2, \dots, s_t \rangle$ μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα. Υπόθετουμε ότι η G παράγεται και από ένα άλλο σύνολο X (όχι κατ' ανάγκη

πεπερασμένο). Τότε υπάρχει μία πεπερασμένη παράσταση της $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_\ell \rangle$.

Απόδειξη. Αφού η G είναι πεπερασμένα γεννώμενη, αν το X είναι άπειρο, μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολό του $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, το οποίο να παράγει την G . Τώρα έχουμε δύο πεπερασμένα σύνολα που παράγουν την G . Εκφράζουμε κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ως μια λέξη ως προς το άλλο σύνολο. Έτσι έχουμε $x_j = v_j(y)$ και $y_i = w_i(x)$.

Επίσης έχουμε τις σχέσεις $s_k(w_i(x)) = 1$ και (ξανά) εκφράζοντας τα $x_j = v_j(w_i(x))$. Επομένως αν πάρουμε την ομάδα $\bar{G} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \mid s_k(w_i(\bar{x})) = 1, \bar{x}_j = v_j(w_i(\bar{x})) \rangle$. Έχουμε, από το προηγούμενο θεώρημα ότι υπάρχει επιμορφισμός από την \bar{G} στην G , ο οποίος επάγεται από την απεικόνιση $\bar{x}_j \rightarrow x_j$.

Τώρα από τις $y_i = w_i(x)$, αν θέσουμε $\bar{y}_i = w_i(\bar{x})$, έχουμε ότι .

στην $\bar{G} = \langle \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m \mid s_1(\bar{y}), s_2(\bar{y}), \dots, s_t(\bar{y}), \dots \rangle$.

Άρα πάλι από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει επιμορφισμός G στην \bar{G} , ο οποίος επάγεται από την απεικόνιση $y_i \rightarrow \bar{y}_i$.

Προφανώς (;) οι δύο αυτοί επιμορφισμοί ο ένας αντιστέφει τον άλλον και τέλος. □

Θεώρημα 0.1.9. Έστω N κανονική υποομάδα μιας ομάδας G , υποθέτουμε ότι οι N και G/N είναι πεπερασμένα παριστώμενες, τότε η G είναι πεπερασμένα παριστώμενη.

Απόδειξη. Έστω ότι η N έχει την παράσταση $N = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ και η $G/N = \langle y_1N, \dots, y_mN \mid s_1, s_2, \dots, s_\ell \rangle$,

Προφανώς η G παράγεται από τα $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$. Ως προς αυτούς τους γεννήτορες η G έχει τις σχέσεις r_1, r_2, \dots, r_k , που ισχύουν στην N , τις σχέσεις $s_j(y) = t_j(x) \in N$, που προκύπτουν από τις σχέσεις $s_j = 1 \in G/N$, καθώς και τις σχέσεις $y_i x_j y_i^{-1} = u_{ij}(x) \in N$, $y_i^{-1} x_j y_i = v_{ij}(x) \in N$, που απορρέουν από την κανονικότητα της υποομάδας N .

Προσοχή!! Ενδέχεται η G να έχει και άλλες σχέσεις. Πέρνουμε τώρα μια ομάδα, έστω \bar{G} , η οποία έχει ακριβώς τους ίδιους (αντίγραφα τους \bar{x}_i και \bar{y}_j) γεννήτορες και ακριβώς τις ίδιες σχέσεις, και μόνο αυτές. Τότε, από το γνωστό θεώρημα, η G είναι επιμορφική εικόνα της \bar{G} . Δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\vartheta : \bar{G} \rightarrow G$ με $\text{Ker} \vartheta = K$. Προφανώς $K \cap \bar{N} = 1$, όπου $\bar{N} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \mid \bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_k \rangle$.

Επειδή, $K \cap \bar{N} = 1$, έπεται ότι επάγεται ένας επιμορφισμός $\bar{\vartheta} : \bar{G}/\bar{N} \rightarrow G/N$, οπότε πάλι εκ του $K \cap \bar{N} = 1$, έχουμε ότι αυτός ο επιμορφισμός είναι αναγκαστικά ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι $K = 1$ και τέλος. □

Θεώρημα 0.1.10. Έστω G ομάδα πεπερασμένα γεννόμενη και N υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη, τότε η N είναι πεπερασμένα γεννόμενη.

Απόδειξη. Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της G και $T = \{t_1 = 1, t_2, \dots, t_m\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων της H στην G . Ως γνωστόν η G δρά στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H . Για να δούμε τι σημαίνει αυτή η δράση. Έστω $g \in G$, τότε $gt_jH = t_{(j)g}H$, δηλαδή το g επάγει μια μετάθεση στους δείκτες των t_j και $gt_j = t_{(j)g}h_{(j,g)}$.

Έστω τώρα ένα $a = y_1 y_2 \dots y_k \in H$, όπου $y_\ell \in X^\pm$. Τότε έχουμε $a = y_1 y_2 \dots y_k t_1 = y_1 y_2 \dots y_{k-1} t_{(1)y_k} h_{(1,y_k)}$. Πώς προέκυψε η τελευταία ισότητα; Από την δράση του y_k στο t_1 . Τώρα είναι η σειρά του y_{k-1} να δράσει στο $t_{(1)y_k}$, οπότε συνεχίζουμε... και τελικά έχουμε $a = t_{(1)y_k y_{k-1} \dots y_1} \bar{h}_1 \bar{h}_2 \dots \bar{h}_k$

(Χρησιμοποιούμε για χάριν ευκολίας τις μπάρες, για παράδειγμα το \bar{h}_k είναι το $h_{(1,y_k)}$). Τελικά τι βλέπουμε; Το τυχαίο στοιχείο $a \in H$ γράφεται ως γινόμενο κάποιων $\bar{h}_s \in H$. Ποίος είναι ο αριθμός αυτών των στοιχείων. Μα εξαρτάται από το n και το m , άρα πεπερασμένος και τέλος. Προσοχή δεν γνωρίζουμε επακριβώς τον αριθμό αυτόν. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις θα δούμε, αν μπορούμε να τον προσδιορίσουμε. □

Ελεύθερες αβελιανές ομάδες.

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Για κάθε $x_i \in X$. Μια ομάδα G θα ονομάζεται **Ελεύθερη Αβελιανή** (επί του X), αν είναι το ευθύ γινόμενο $G = Dr_{x \in X} \langle x \rangle$ απείρων κυκλικών ομάδων. Όπως βλέπουμε η G εξαρτάται μόνο από τον πληθικό αριθμό του συνόλου X .

Επίσης, αν πάρουμε την ελεύθερη ομάδα $F = \langle \bar{X} \rangle$ επί του συνόλου $\bar{X} = \{ \bar{x}_i \mid x_i \in X \}$, τότε ορίζεται ο προφανής επιμορφισμός ομάδων $\varphi : F \rightarrow Dr_{x \in X} \langle x \rangle$. Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον $Ker \varphi$. Έστω $w = x_{i_1}^{e_1} x_{i_2}^{e_2} \dots x_{i_k}^{e_k}$ ένα στοιχείο του $Ker \varphi$. Ας δούμε τι κάνει ο ομομορφισμός φ . Ο ομομορφισμός αυτός μεταθέτει τους γεννήτορες της ελεύθερης ομάδας F , δηλαδή $\varphi(w) = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_k^{\nu_k}$, όπου όλα τα x_j είναι διαφορετικά μεταξύ τους και οι εκθέτες ν_j αποτελούν το άθροισμα των εκθετών του x_j στις "εμφανίσεις" του στη γραφή του w . Αλλά το w ανήκει στον πυρήνα και οι ομάδες $\langle x_i \rangle$ είναι άπειρες κυκλικές. Συνεπώς κάθε $\nu_i = 0$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

Δηλαδή αποδείξαμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 0.1.11. Ένα $w \in F$ ανήκει στον πυρήνα του φ αν και μόνο αν το άθροισμα των εκθετών κάθε γεννήτορα που εμφανίζεται στην γραφή του w ισούται με μηδέν.

Τον πυρήνα αυτόν θα τον συμβολίζουμε στο εξής με F' και θα δούμε στα επόμενα μια άλλη προσέγγιση.

Άρα μπορούμε να δώσουμε τον ισοδύναμο ορισμό:

Η ομάδα G είναι ελεύθερη αβελιανή επί του συνόλου X αν και μόνο αν είναι ισόμορφη με το πηλίκο F/F' , όπου F είναι η αντίστοιχη ελεύθερη ομάδα επί του \bar{X} .

Ας δούμε γιατί αυτή η ομάδα ονομάζεται ελεύθερη αβελιανή (κατ' αναλογία με το (απολύτως) ελεύθερη ομάδα).

Έστω G μια τυχαία αβελιανή ομάδα με παράσταση $G = \langle X \mid R \rangle$. Στο σύνολο των οριζουσών σχέσεων R περιλαμβάνονται και οι σχέσεις της μορφής $xy = yx$ για $x, y \in X$. Αν τώρα πάρουμε την ελεύθερη αβελιανή ομάδα F/F' , όπου F η ελεύθερη επί του X , τότε προφανώς έχουμε τις παραστάσεις $\varphi : F \rightarrow Dr_{x \in X} \langle x \rangle$ και

$$\vartheta : F \rightarrow G = \langle X \mid R \rangle$$

$$\text{με } Ker \varphi = F' \subset Ker \vartheta = \langle R \rangle,$$

Δηλαδή η G είναι πηλίκο της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $Dr_{x \in X} \langle x \rangle$.

Ας δούμε τώρα την απόδειξη που είχαμε αναβάλει (βλέπε Πρόταση ??).

Έστω $F_1 = \langle X_1 \rangle$, $F_2 = \langle X_2 \rangle$ δύο ισόμορφες ελεύθερες ομάδες, θα δείξουμε ότι $|X_1| = |X_2|$.

Στην ομάδα F_1 λαμβάνουμε την υποομάδα N που παράγεται από όλα τα τετράγωνα στοιχείων της F_1 , δηλαδή $N = \langle w^2 \mid w \in F_1 \rangle$. Προφανώς (γιατί;) η N είναι κανονική υποομάδα της F_1 και το πηλίκο F_1/N είναι αβελιανή ομάδα (γιατί;), όπου όλα τα στοιχεία της έχουν τάξη ίση με δύο (γιατί;). Δηλαδή $F_1/N \approx Dr_{x \in X_1} \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$.

Από εδώ και κάτω έχουμε δύο προσεγγίσεις του θέματος.

Η ομάδα $Dr_{x \in X_1} \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος \mathbb{Z}_2 με διάσταση ίση με $|X_1|$.

Αν επαναλάβουμε ακριβώς τα ίδια για την ισόμορφη ομάδα F_2 , θα καταλήξουμε σε έναν διανυσματικό χώρο ισόμορφο (γιατί;) με τον χώρο που προκύπτει από την F_1 , διάστασης $|X_2|$. Συνεπώς το ζητούμενο.

Μια άλλη ελαφρώς διαφορετική προσέγγιση είναι η εξής:

Η ομάδα $F_1/N \approx Dr_{x \in X_1} \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$ έχει $2^{|X_1|}$ το πλήθος στοιχεία, αν το X_1 είναι πεπερασμένο και στην περίπτωση, όπου X_1 είναι άπειρο έχουμε $|Dr_{x \in X_1} \langle x \mid x^2 = 1 \rangle| = |X_1|$ (γιατί;) και τέλος.

Υπάρχει και μια τρίτη, φαινομενικά διαφορετική, προσέγγιση.

Έστω $F = \langle X \rangle$ ελεύθερη επί του X . Λαμβάνουμε το σύνολο $Hom(F, \mathbb{Z}_2)$, όλων των ομομορφισμών από την F στην κυκλική ομάδα τάξης 2. Ένας τέτοιος ομομορφισμός είναι

πλήρως καθορισμένος από τις εικόνες των στοιχείων του συνόλου X (η F είναι ελεύθερη). Το σύνολο $\text{Hom}(F, \mathbb{Z}_2)$ αποκτά τη δομή αβελιανής ομάδος με την πρόσθεση ομομορφισμών (δεν ξεχνάμε ότι ορίζεται η πρόσθεση ομομορφισμών, αφού το πεδίο ορισμού \mathbb{Z}_2 είναι αβελιανή ομάδα

Άσκήσεις.

1. Δείξτε ότι μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ είναι ελεύθερη στρέψης.
Ειδικότερα, δείξτε ότι αν $1 \neq w \in F$, τότε $|w| < |w^2| < |w^3| < \dots$.
2. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v \cdot w = w \cdot v$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.
3. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v^n \cdot w^m = w^m \cdot v^n$. Δείξτε ότι $v \cdot w = w \cdot v$ και άρα υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.
4. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η κεντροποιούσα ενός μη τετριμμένου στοιχείου της είναι άπειρη κυκλική.
Κατά συνέπεια το κέντρο μια ελεύθερης ομάδας είναι τετριμμένο, εκτός και αν είναι η άπειρη κυκλική.
5. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η μεταθετικότητα είναι μεταβατική. Δηλαδή αν $vw = wv$ και $wu = uw$, τότε $vu = uv$.
Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας όπου η μεταθετικότητα δεν είναι μεταβατική.
6. Έστω G μια ομάδα, δείξτε ότι κάθε στοιχείο της μορφής $aba^{-1}b^{-1}$ με $a, b \in G$ είναι γινόμενο τετραγώνων.
7. Έστω G ομάδα και X ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω $K = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$ και $H = \langle xyx^{-1}y^{-1}, z^2 \mid x, y, z \in X \rangle^G$. Δείξτε ότι $K = H$.
8. Έστω G μια ομάδα με n το πλήθος γεννητόρες και r το πλήθος ορίζουσες σχέσεις. Υποθέτουμε ότι $r < n$, δείξτε ότι η G είναι άπειρη ομάδα.