1. Κάθε ελεύθερο γινόμενο $*_{a\in J}G_a$ με μη τετριμμένους παράγοντες και $|J|\geq 2$ περιέχει στοιχεία απείρου τάξης. Ιδιαιτέρως, $*_{a\in J}G_a$ άπειρη ομάδα.

2. Αν $G=*_{a\in J}G_a$, όπου κάθε $G_a\neq 1$ και $|J|\geq 2$, τότε $Z(G)=1$.

3. Έστω $G=G_1*G_2$ και N_1 η κανονική υποομάδα της G που παράγεται από τον παράγοντα G_1. Να δειχθεί ότι $N_1\cap G_2=\{1\}$.

4. Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης σ' ένα ελεύθερο γινόμενο $*_{a\in J}G_a$ περιέχεται σε συζυγές κάποιου ελευθέρου παράγοντα G_a.

5. Κάθε πεπερασμένη υποομάδα ενός ελευθέρου γινομένου περιέχεται σε συζυγές ενός ελευθέρου παράγοντα.

6. Αν $G=*_{a\in J}G_a$ και κάθε G_a αναλύεται ως ελεύθερο γινόμενο $G_a=*_{\beta}H_{a\beta}$, τότε η G είναι το ελεύθερο γινόμενο όλων των $H_{a\beta}$ (ονομάζεται επιλέπτυνση του αρχικού).

7. Αν $G=*_{a\in J}G_a$ και για κάθε a έχουμε υποομάδα $H_a\leq G_a$, τότε η υποομάδα που παράγεται από τις H_a είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλ. $\langle H_a, a\in J\rangle = *_{a\in J}H_a$.

8. Αν $G=*_{a\in J}G_a$ και G' η παράγωγος υποομάδα της G, τότε $G/G'\cong \oplus_{\in J}G_a/G'_a$. [Υπόδειξη: η αβελιανοποίηση G/G' ικανοποιεί την καθολική συνθήκη του παραπάνω ευθέως αθροίσματος.]

9. Έστω $G=*_{i\in I}G_i$, όπου κάθε παράγοντας G_i είναι μη τετριμμένος. Αν η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε:
   α) Το σύνολο δεικτών I είναι πεπερασμένο.
   β) Κάθε παράγοντας G_i είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. [Υπόδειξη: αν υποθέσουμε ότι κάποιος παράγοντας G_i δεν είναι πεπερ. παραγ. ομάδα, τότε (αφού είναι αριθμήσιμο σύνολο) είναι η ένωση μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας υποομάδων και το ίδιο συμπεραίνουμε για την G.]

10. Έστω $G_i, i\in I$ μια οικογένεια ομάδων με παραστάσεις $G_i=\langle X_i|R_i\rangle$. Δείξτε ότι $*_{i\in I}G_i = \langle \sqcup_{i\in I}X_i|\sqcup_{i\in I}R_i\rangle$. [Υπόδειξη: η ομάδα που ορίζεται από την τελευταία παράσταση ικανοποιεί την καθολική συνθήκη του σχετικού ελευθέρου γινομένου.]

11. Έστω G ομάδα και N κανονική υποομάδα της G. Αν G/N ελεύθερη, τότε υπάρχει υποομάδα H της G με $G=HN$ και $H\cap N=1$.

12. Έστω F ελεύθερη και H υποομάδα της F πεπερασμένου δείκτη. Αν K μη τετριμμένη υποομάδα της F, τότε $K\cap H\neq 1$.

13. Η ελεύθερη ομάδα F_2 τάξεως 2 περιέχει ελεύθερη υποομάδα:

    1) Τάξεως k για κάθε φυσικό k. [Υπόδειξη: Αν $\{\alpha, \beta\}$ βάση της F_2, τότε θεωρήστε την υποομάδα που παράγεται από τα στοιχεία $\alpha, \beta^{-1}\alpha\beta, \ldots, \beta^{-(k-1)}\alpha\beta^{k-1}$ και παρατηρήστε ότι κάθε ανηγμένη λέξη θετικού μήκους ως προς αυτά είναι διαφορετική από το 1.]

    2) Αριθμήσιμης τάξης.

14. Έστω F_n η ελεύθερη ομάδα σε n το πλήθος γεννήτορες $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και $G = F_n \times \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ άπειρη κυκλική με γεννήτορα t. Θεωρούμε την υποομάδα H της G που παράγεται από τα στοιχεία $x_1, \ldots, x_{n-1}, tx_n$. Να δειχθεί ότι η $H \cap F_n$ είναι ελεύθερη επί του συνόλου $\{x_n^i x_j x_n^{-i} : 1 \leq j < n, -\infty < i < \infty\}$. Ιδιαιτέρως, η $H \cap F_n$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη αν και είναι η τομή δύο πεπερασμένα παραγόμενων υποομάδων. [Υπόδειξη: ένα στοιχείο της γράφεται ως γινόμενο μιας "λέξης" των $x_i^{\pm 1}$ και μιας δύναμης t^k. Τι σχέση έχει ο εκθέτης k με τις εμφανίσεις του στοιχείου x_n;]