1. Έστω $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ και $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ δύο στοιχεία της G. Αν $|\alpha|, |\beta| \geq 2$, τότε τα g_1 και g_2 παράγουν μια ελεύθερη υποομάδα της G διάστασης 2.

2. Μια ομάδα G λέγεται hopfian αν δεν είναι ισόμορφη με γνήσιο πηλίκο της, ισοδύναμα, αν $\varphi : G \to G$ επιμορφισμός, τότε φ ισομορφισμός. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα είναι hopfian.

3. Αν G πεπερασμένα παραγόμενη και προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε $\mathrm{Aut}(G)$ προσεγγιστικά πεπερασμένη.

4. Έστω F_n ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης τάξης n.
(α) Δείξτε ότι η F_n δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από n το πλήθος στοιχεία. [Υπόδειξη: Κάθε επιμορφισμός ομάδων επάγει επιμορφισμό στις αβελιανοποιήσεις.]
(β) Αν S είναι ένα υποσύνολο από n στοιχεία που παράγει την F_n, τότε S βάση της F_n (δηλ. F_n ελεύθερη επί του S). [Υπόδειξη: Κάθε ελεύθερη ομάδα είναι hopfian.]

5. Έστω $G = G_1 *_A G_2$ και H_1, H_2 υποομάδες των G_1, G_2, αντίστοιχα, με $H_1 \cap A = H_2 \cap A = 1$. Να δειχθεί ότι η υποομάδα της G που παράγεται από τις (εικόνες των) H_1 και H_2 είναι ισόμορφη με το ελεύθερό τους γινόμενο. Δηλαδή, $\langle H_1, H_2 \rangle \cong H_1 * H_2$.

6. Έστω $\varphi_i : H \to G_i$, $i = 1, 2$ μονομορφισμοί, $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Αποδείξτε ότι $Z(G_1 *_H G_2) = H \cap Z(G_1) \cap Z(G_2)$ (για την ακρίβεια $\pi(H) \cap Z(\pi(G_1)) \cap Z(\pi(G_2))$), όπου με $Z(G)$ συμβολίζουμε το κέντρο μια ομάδος G.

7. (Καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα) Έστω G_λ, $\lambda \in \Lambda$ οικογένεια ομάδων, H ομάδα, $\varphi_\lambda : H \to G_\lambda$ οικογένεια μονομορφισμών και $G = *_H G_\lambda$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Αποδείξτε ότι για κάθε ομάδα K και οικογένεια ομομορφισμών $\theta_\lambda : G_\lambda \to K$ με $\theta_\lambda \circ \varphi_\lambda = \theta_\mu \circ \varphi_\mu$ για κάθε ζεύγος $\lambda, \mu \in \Lambda$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\theta : G \to K$ έτσι ώστε $\theta \circ \pi_\lambda = \theta_\lambda$ για κάθε λ, όπου π_λ ο περιορισμός στην G_λ του φυσικού επιμορφισμού $\pi : *_\lambda G_\lambda \to G$.

8. Έστω $\varphi_i : H \to G_i$, $i = 1, 2$ μονομορφισμοί, $G = G_1 *_H G_2$ το αντίστοιχο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός. Μια *ανηγμένη μορφή* ενός στοιχείου g της $G_1 *_H G_2$ είναι μια έκφραση $g = \pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$, όπου κάθε $g_i \in G_1 \cup G_2$, διαδοχικά g_i δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα G_1 ή G_2 και $g_i \notin \varphi_1(H) \cup \varphi_2(H)$ για κάθε i, εκτός εάν $n = 1$.
(i) Κάθε στοιχείο της G μπορεί να γραφεί σε ανηγμένη μορφή.

(ii) Αν $g = \pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$ ανηγμένη μορφή με $n \geq 2$, τότε $g \neq 1$.

(iii) Αν $\varphi_i(H)$ γνήσια υποομάδα της G_i, $i = 1, 2$, τότε η ομάδα G περιέχει στοιχεία απείρου τάξης.

(iv) Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της G είναι συζυγές με στοιχείο ενός παράγοντα G_i.

9. Έστω G_1, G_2 υποομάδες μιας ομάδας G και $H = G_1 \cap G_2$. Υποθέτουμε ότι η G παράγεται από τις G_1 και G_2. ’Εστω : $G_1 *_H G_2 \to G$ ο επιμορφισμός που επάγεται από τις ενθέσεις των G_1 και G_2 στην G. Αποδείξτε ότι ο είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν κάθε γινόμενο $g_1 g_2 \cdots g_n$ στην G, όπου κάθε παράγοντας g_k ανήκει στο $G_1 - H$ ή στο $G_2 - H$ και διαδοχικοί παράγοντες δεν ανήκουν στο ίδιο σύνολο $G_i - H$, είναι διάφορο του 1.