

Ασκήσεις Ε

1. Έστω G ομάδα με μια συνθετική σειρά $1 = G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$. Υποθέτουμε ότι όλα τα ενδιάμεσα πηλίκα είναι μη ισόμορφα μεταξύ τους ($G_i/G_{i+1} \not\cong G_j/G_{j+1}$ για $i \neq j$). Δείξτε ότι:
 - (α') Δύο διαφορετικές κανονικές υποομάδες της G δεν είναι ισόμορφες.
 - (β') Κάθε κανονική υποομάδα της G είναι χαρακτηριστική.
 - (γ') Κάθε υποκανονική υποομάδα της G είναι κανονική.
2. Έστω G ομάδα και H, K κανονικές υποομάδες της G με $G = HK$. Υποθέτουμε ότι η G έχει μια συνθετική σειρά. Δείξτε ότι κάθε πηλίκο της σειράς αυτής είναι ισόμορφο με το πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της H , ή με το πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της K .

Στην περίπτωση, όπου πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της H δεν είναι ισόμορφο με κάθε πηλίκο μιας συνθετικής σειράς της K , δείξτε ότι $G = H \times K$.
3. Έστω G ομάδα και $H, K \leq G$ με $G = \langle H, K \rangle$.

Υποθέτουμε ότι οι H και K είναι πεπερασμένες και η μια εκ των δύο είναι υποκανονική στην G . Δείξτε ότι η G είναι πεπερασμένη.

Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα, όπου ενώ και οι δύο υποομάδες H και K είναι πεπερασμένες η $G = \langle H, K \rangle$ δεν είναι πεπερασμένη;
4. Έστω D_{2n} η διεδρική ομάδα τάξης $2n$. Δείξτε ότι η D_{2n} είναι επιλύσιμη.

Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η D_{2n} να είναι μηδενοδύναμη.

Να βρεθεί μια επιλύσιμη συνθετική σειρά της D_{2n} και μιά κεντρική σειρά της.
5. Έστω n ένας άρτιος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα κάθε ομάδα με τάξη ίση με n να είναι μηδενοδύναμη. Δείξτε ότι ο n είναι δύναμη του 2.
6. Δείξτε ότι οι ομάδες $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ και $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ είναι επιλύσιμες.

Να βρεθούν επιλύσιμες σειρές τους.

Σημείωση: Στην πραγματικότητα είναι οι μόνες $GL_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, όπου \mathbb{F} σώμα, οι οποίες είναι επιλύσιμες.

Η απόδειξη της μη επιλυσιμότητας αυτών των ομάδων δεν είναι τόσο προφανής, αλλά αναζητήστε την.

Παρ' όλα ταύτα, αν το σώμα είναι χαρακτηριστικής μηδέν, η απόδειξη είναι προφανέστατη.
7. Έστω G ομάδα και H μέγιστη επιλύσιμη υποομάδα της G (δηλαδή δεν υπάρχει επιλύσιμη υποομάδα της G , η οποία να περιέχει γνησίως την H). Δείξτε ότι $N_G(H) = H$.

Συνεπώς, αν H είναι κανονική και μέγιστη επιλύσιμη υποομάδα της G , τότε η G είναι επιλύσιμη.
8. Έστω $H \leq G$. Δείξτε ότι $H^G G' = HG'$, όπου H^G είναι η κανονική θήκη της H στην G .

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η G είναι επιλύσιμη, δείξτε ότι $H^G = G$ αν και μόνο $HG' = G$.
9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $|G| = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$, όπου p_i διακεκριμένοι πρώτοι. Δείξτε ότι η G είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν το μήκος κάθε συνθετικής σειράς της G ισούται με $\sum_{i=1}^n m_i$.

10. Έστω G πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε ελάχιστη κανονική υποομάδα της είναι στοιχειώδης αβελιανή και χαρακτηριστική στην G .

11. Έστω G επιλύσιμη ομάδα. Δείξτε ότι η G έχει συνθετικές σειρές αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη.

12. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι η G δεν είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν περιέχει μια κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$.

(Επίσης δείξτε ότι στην μια κατεύθυνση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απαίτηση 'κανονική μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$ ' με την "ασθενέστερη" 'τυχαία μη τετριμμένη υποομάδα H με $H = H'$ '.)

13. Δείξτε την ισοδυναμία των δύο προτάσεων:

α) Κάθε πεπερασμένη (μη αβελιανή) απλή ομάδα έχει άρτια τάξη.

β) Κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη.

Σημείωση: Υπάρχει το περίφημο Θεώρημα των Feit - Thomson, ότι όλες οι πεπερασμένες ομάδες περιττής τάξης είναι επιλύσιμες.

Επομένως, αν κάποιος αποδείξει την ισχύ του α) (ανεξάρτητα) έχει αποδείξει το Θεώρημα των Feit - Thomson με άλλο τρόπο. Αυτό έχει επιτευχθεί και έχουν δοθεί συντομότερες αποδείξεις του Θεωρήματος αυτού, δεδομένου ότι η αρχική απόδειξη ήταν άνω των 270 σελίδων.

Πριν συνεχίσουμε ορισμένα προκαταρκτικά.

Όταν έχουμε μια ομάδα G και $A_1, A_2 \subseteq G$, είχαμε ορίσει $[A_1, A_2] = \langle [a, b] \mid a \in A_1, b \in A_2 \rangle$.

Αν τώρα έχουμε $A_1, A_2, A_3 \subseteq G$, τότε ορίζουμε $[A_1, A_2, A_3] = [[A_1, A_2], A_3]$ και αναδρομικά $[A_1, A_2, A_3, \dots] = [\dots [[A_1, A_2], A_3] \dots]$.

Προσοχή! Εν γένει $[A_1, A_2] \neq [A_2, A_1]$ και $[[A_1, A_2], A_3] \neq [A_1, [A_2, A_3]]$. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα στην ομάδα S_3 .

14. Έστω G ομάδα και $A, B, \Gamma \leq G$. Δείξτε ότι

(α') Έστω G ομάδα και $A, B \leq G$. Τότε ισχύει $[A, B] = [B, A]$ και $[A, B] \triangleleft \langle A, B \rangle$.

(β') Αν οι υποομάδες A, B, Γ είναι κανονικές στην G , τότε ισχύει $[AB, \Gamma] = [A, \Gamma][B, \Gamma]$.

(γ') Αν οι δύο από τις υποομάδες $[A, B, \Gamma]$, $[B, \Gamma, A]$, $[\Gamma, AB,]$, περιέχονται σε μια κανονική υποομάδα της G , τότε και η τρίτη υποομάδα περιέχεται στην υποομάδα αυτή.

Στην περίπτωση όπου και οι τρεις υποομάδες είναι κανονικές, τότε ισχύει $[A, B, \Gamma] \leq [B, \Gamma, A] \cdot [\Gamma, AB,]$.

Υπόδειξη. Αποδείξτε πρώτα τις εξής σχέσεις: Έστω $x, y, z \in G$. τότε ισχύει

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \text{ και}$$

$$[x, y^{-1}, z]^y \cdot [y, z^{-1}, x]^z \cdot [z, x^{-1}, y]^x = 1$$

Εδώ, χάριν συντομίας χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: Για $a, b \in G$ ορίζουμε $a^b = b^{-1}ab$. Δεν είναι καθόλου αυθαίρετος αυτός συμβολισμός. Για παράδειγμα $(a^b)^c = a^{bc}$. Η γνωστή ιδιότητα των 'δυνάμεων', που γνωρίζουμε ...απ' το Δημοτικό!

15. Έστω G ομάδα $N \triangleleft G$ και $G = G^0 \triangleright G^1 \triangleright \dots$,

$$G = \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \dots,$$

$1 = Z_0(G) \triangleleft Z_1(G) = Z(G) \triangleleft Z_2 \triangleleft \dots$ η παράγωγος, η κατώτερη κεντρική και η ανώτερη κεντρική σειρά αντίστοιχα.

Δείξτε ότι:

(α') $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$.

(β') $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$.

(γ') $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-i}(G)$, (για $j \geq i$).

(δ') $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$.

(ε') $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$ και $\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)N/N$.

Ερώτημα: Ισχύει κάτι ανάλογο για την ανώτερη κεντρική σειρά;

Δηλαδή $Z_i(G/N) = ??? Z_i(G)N/N$.

(στ') $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G)$. Συνεπώς, αν η G είναι μηδενοδύναμη με κλάση μηδενοδυναμίας n , τότε η κλάση επιλυσιμότητας της G είναι το πολύ ίση με $(\log_2 n) + 1$.

(ζ') Η ομάδα $\gamma_2(G/\gamma_4(G))$ είναι αβελιανή.

16. Έστω G και $K \leq H \leq G$ με $K \triangleleft G$. Δείξτε ότι $[H, G] \leq K$ αν και μόνο αν $H/K \leq Z(G/K)$.

17. Έστω G ομάδα με $G/Z(G)$ πεπερασμένη. Δείξτε ότι η παράγωγος υποομάδα G' είναι πεπερασμένη.

Παρατήρηση: 'Διαισθητικά' μπορούμε να δούμε την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού. Όταν το κέντρο είναι 'σχεδόν όλη η ομάδα' (το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι πεπερασμένο), η ομάδα είναι 'σχεδόν αβελιανή', δηλαδή η παράγωγος ομάδα είναι 'σχεδόν τετριμμένη', δηλαδή πεπερασμένη.

Παρ'όλα ταύτα η απόδειξη δεν είναι προφανής. Αναζητήστε την!!

Εδώ αξίζει να υπενθυμίσουμε ένα "δυϊκό" αποτέλεσμα.

Έστω G ομάδα και H κανονική πεπερασμένη υποομάδα της. Δείξτε ότι η κεντροποιούσα της $C_G(H)$ είναι κανονική και πεπερασμένου δείκτη στην G .

Δηλαδή 'μικρές' υποομάδες έχουν 'μεγάλες' κεντροποιούσες.

18. Έστω $G = H \times K$. Δείξτε ότι $\gamma_i(G) = \gamma_i(H) \times \gamma_i(K)$ και $G^{(i)} = H^{(i)} \times K^{(i)}$.

19. Έστω G ομάδα και H, K κανονικές επιλύσιμες/μηδενοδύναμες ομάδες της. Δείξτε ότι η HK είναι επιλύσιμη/μηδενοδύναμη.

Σημείωση: Η περίπτωση της επιλυσιμότητας είναι τετριμμένη. Η περίπτωση της μηδενοδυναμίας χρειάζεται προσεκτική αντιμετώπιση.

20. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε μέγιστη υποομάδα της είναι κανονική και το αντίστοιχο πηλίκο είναι πεπερασμένο με τάξη πρώτο αριθμό.

21. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα και A μια μέγιστη κανονική αβελιανή ομάδα της. Δείξτε ότι $A = C_G(A)$.

22. Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα με τάξη $|G| = n$. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m με $m | n$ υπάρχει υποομάδα της G με τάξη m .

Σχόλιο: Στις πεπερασμένες μηδενοδύναμες ομάδες ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος του Lagrange.

23. Έστω G ομάδα με $G = G'$. Δείξτε ότι η ομάδα $G/Z(G)$ έχει τετριμμένο κέντρο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 14.

24. Έστω G ομάδα και $H \triangleleft G$ με $H \cap G' = 1$. Δείξτε ότι $H \leq Z(G)$.

25. Έστω G_n μια πεπερασμένη p -ομάδα με κλάση μηδενοδυναμίας n (γιατί για τον τυχαίο θετικό ακέραιο n υπάρχουν πεπερασμένες p -ομάδες με κλάση μηδενοδυναμίας n ;)

Έστω G το σύνολο όλων των τελικά σταθερών ακολουθιών $(g_1, g_2, \dots, 1, \dots)$, όπου $g_i \in G_i$. Προφανώς (;) το G είναι μια ομάδα (η πράξη κατά συντεταγμένες), κάθε στοιχείο της G έχει τάξη μια δύναμη του p . Δηλαδή η G είναι μια (άπειρη) p -ομάδα. Η οποία δεν είναι μηδενοδύναμη (γιατί;;;)