1. Μια κυκλική ομάδα τάξεως p^2, όπου p πρώτος, δεν αναλύεται ως ημιευθύ γινόμενο.

2. Αν $G = N \rtimes H$, τότε $G/N \cong H$.

3. Η ομάδα $G = N \rtimes_\phi H$ δεν είναι αβελιανή, αν ο ϕ δεν είναι τετριμμένος.

4. Αν $G = N \rtimes_\phi H$, τότε ο πυρήνας kerϕ αποτελείται από τα στοιχεία της $\widetilde{H}$ που μετατίθενται με κάθε στοιχείο της υποομάδας $\widetilde{N}$, δηλ. $(1, \ker\phi) = C_{\widetilde{H}}(\widetilde{N})$.

5. Κάθε ομάδα G η οποία αναλύεται ως ημιευθύ γινόμενο $G = N \rtimes_\phi H$, όπου N και H κυκλικές με τάξεις 10 και 3 αντίστοιχα, είναι κυκλική.

6. Για κάθε πρώτο p κατασκευάστε μη-αβελιανή ομάδα τάξεως p^3.

   Υπόδειξη: Αν $N = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, τότε η απεικόνιση που ορίζεται από τον τύπο $\varphi(a^k b^s) = a^k b^{s+k}$, όπου $0 \leq k, s < p$, είναι αυτομορφισμός της N τάξεως p.

7. Έστω K, H δύο ομάδες, $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ ομομορφισμός και $\sigma \in \text{Aut}(K)$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\psi : H \rtimes_{\varphi\circ\sigma} K \to H \rtimes_\varphi K$ με $\psi(h,k) = (h, \sigma(k))$, είναι ισομορφισμός ομάδων.

8. Έστω K κυκλική ομάδα, H τυχαία ομάδα και $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \text{Aut}(H)$ ομομορφισμοί έτσι ώστε οι εικόνες $\varphi_1(K)$ και $\varphi_2(K)$ είναι συζυγείς υποομάδες της Aut(H). Αν η K είναι άπειρη υποθέτουμε επιπλέον ότι οι ομομορφισμοί φ_1 και φ_2 είναι 1-1. Να δειχθεί ότι $H \rtimes_{\varphi_1} K \cong H \rtimes_{\varphi_2} K$.

   Υπόδειξη: Έστω $K = \langle x \rangle$. Εφόσον $\varphi_1(K)$ και $\varphi_2(K)$ συζυγείς, υπάρχει $\sigma \in \text{Aut}(H)$ και ακέραιος a έτσι ώστε $\sigma\varphi_1(k)\sigma^{-1} = \varphi_2(k)^a$, για κάθε $k \in K$. Το στοιχείο $\varphi_2(x)$ είναι γεννήτορας της $\varphi_2(K)$. Έτσι στην περίπτωση που η είναι πεπερασμένη έχουμε ότι $(a, |\varphi_2(K)|) = 1$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 12, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι $(a, |K|) = 1$. Άρα υπάρχει ακέραιος b τέτοιος ώστε $(x^a)^b = x$. Αν K άπειρη, τότε υπάρχει ακέραιος b τέτοιος ώστε $\sigma^{-1}\varphi_2(k)\sigma = \varphi_1(k)^b$, για κάθε $k \in K$. Το 1-1 μας δίνει πάλι ότι $(k^a)^b = k$ για κάθε $k \in K$. Η απεικόνιση $\psi : H \rtimes_{\varphi_1} K \to H \rtimes_{\varphi_2} K$ με $\psi(h,k) = \big((\sigma(h), k^a)\big)$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφο $\phi : H \rtimes_{\varphi_2} K \to H \rtimes_{\varphi_1} K$, $\psi(h,k) = \big((\sigma^{-1}(h), k^b)\big)$.

   Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, έχουμε την ακόλουθη:

9. Έστω p και q πρώτοι με $p > q$.

   (α′) Αν $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, τότε κάθε ομάδα τάξεως pq είναι κυκλική.

   (β′) Αν $p \equiv 1 \pmod{q}$, υπάρχουν δύο (ως προς ισομορφισμό) ομάδες τάξεως pq: η κυκλική $\mathbb{Z}_{pq}$ και μια μη αβελιανή $\mathbb{Z}_p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_q$.

   Υπόδειξη: Υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός $\varphi : \mathbb{Z}_q \to \text{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ αν και μόνο αν ο q διαιρεί τον $p-1$.

10. Να βρεθεί ο μικρότερος περιττός n για τον οποίο υπάρχει μη αβελιανή ομάδα τάξεως n.

    Υπόδειξη: Είναι το 21 γιατί το 3 διαιρεί το 7-1.

11. Να δειχθεί ότι υπάρχουν (ως προς ισομορφισμό) ακριβώς 5 ομάδες τάξεως 12, από τις οποίες οι τρεις είναι μη αβελιανές.

12. Έστω m, n θετικοί ακέραιοι έτσι ώστε ο m διαιρεί τον n και ϕ ο φυσικός ομομορφισμός δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ με $[a]_n \mapsto [a]_m$. Αποδείξτε ότι ο περιορισμός του $\phi : (\mathbb{Z}_n)^* \to (\mathbb{Z}_m)^*$ στις αντίστοιχες ομάδες μονάδων των δακτυλίων είναι επιμορφισμός.

    Υπόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι ο περιορισμός είναι καλά ορισμένος, γιατί $m|n$. Έστω $[a]_m \in (\mathbb{Z}_m)^*$, ισοδύναμα $(a, m) = 1$. Εφόσον $(a, m) = 1$, υπάρχει πρώτος διαιρέτης του m (άρα και του n) που δεν διαιρεί τον a. Συνεπώς, το σύνολο $\mathcal{P} = \{p : \text{ πρώτος } p|n,\ p \nmid a\}$ που αποτελείται από τους πρώτους διαιρέτες του n που δεν διαιρούν τον a είναι μη κενό. Θεωρούμε τον ακέραιο $a' = a + km$, όπου $k = \prod_{p\in\mathcal{P}} p$. Τότε $a' \equiv a \,(\mathrm{mod} m)$, δηλ. $[a']_m = [a]_m$, και $(a', n) = 1$. Για να δείξουμε ότι $(a', n) = 1$, θεωρούμε πρώτο διαιρέτη p του n και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: $p|a$ και $p \nmid a$.