2024 - 2 - 19

Ντετερμινιστικά Μοντέλα Ε.Ε.

Eclass : Σημειώσεις
Ασκήσεις

Εργασία (Es) : Ασκήσεις
(Υπολογιστικά)

Βασικές αρχές Μαθηματικού Προγραμματισμού
(Θεωρητική Θεμελίωση)

1) Εφαρμογές Γ.Π.
2) Μεθοδολογία λύσης (Simplex)
3) Δυϊκότητα

4) Ακέραιος Προγραμματισμός
(Συνδυαστική Βελτιστοποίηση)

5) Μη Γραμμικός Προγραμματισμός { Κυρτός Προγρ. (KKT conditions)
Interior Point για ΓΠ
Gradient methods

Βιβλιογραφία

1) Εισαγωγή ΕΕ <u>Φακίνου-Οικονόμου</u>

2) Bertsimas and Tsitsiklis (Introduction to Linear Optimization)

3) <u>Vanderbei</u> Linear Programming (free).

4) (Μη Γραμμικές) Hillier + Lieberman (Introduction to Operations Research) (κεφ. Μη Γ.Π).

① Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

Γενική Μορφή ΠΓΠ

Γενική Μορφή Προβ. Μαθηματικού Προγραμματισμού

$$\max\ (\min)\ \{ f(x) : x \in F \}$$

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$F \subset \mathbb{R}^n$: εφικτή περιοχή {σύνολο περιορισμών}

Συνήθως $F = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{g_i(x) \leq 0}_{\text{περιορισμοί}}, \; i = 1, \dots, m \}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\ (\min) & f(x) \\ \text{υ.π.} & g_i(x) \leq 0, \; i = 1, \dots, m \end{array}}$$

ντετερμινιστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης

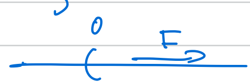
$$\left(g_i(x) = 0 \iff \begin{cases} g_i(x) \leq 0 \\ -g_i(x) \leq 0 \end{cases} \right)$$

$$\min \{ f(x) : x \in F \} = -\max \{ -f(x) : x \in F \}$$

$z = \min \{ f(x) : x \in F \}$ $\quad$ z: βέλτιστη τιμή

z $\exists$? $\quad$ π.χ. $z = \min \{ x : x > 0 \}$

$\nexists\ z$



$z = \inf(x : x > 0) = 0$, όμως $\nexists\, x : x > 0$ κ' $x = z$

Μπορούμε να ορίσουμε γενικά $z = \inf\{f(x) : x \in F\}$

z : βέλτιστη τιμή

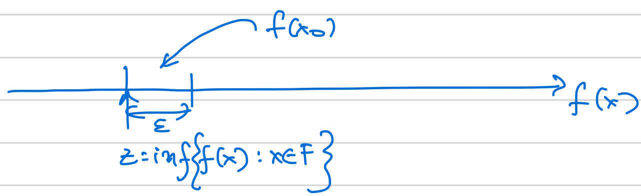
κ' αν $\exists\, x_0 : x_0 \in F,\ f(x_0) = z \Rightarrow x_0$: βέλτιστη λύση

Βέλτιστη τιμή: μοναδική

Βέλτιστες λύσεις $\begin{cases} \nexists \\ \text{μοναδική} \\ \text{πολλές (ακόμη και άπειρες)} \end{cases}$

$x_0 \in F \Leftrightarrow x_0$: εφικτή λύση

x_0 : ε-βέλτιστη λύση: αν $x_0 \in F$ και $z \leq f(x_0) < z + \varepsilon$



Γραμμικός Προγραμματισμός

f: γραμμική συνάρτηση

g_i: " " $i=1,\dots,m$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: γραμμική $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}^n$: $f(x) = c' \cdot x$

$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\Leftrightarrow$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y$.

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(σημείωση $f(x) = \underline{a + b'x}$ αφφινική (affine))
συνάρτηση

Γενικό Πρόβλημα ΓΠ.

$$z = \max(\min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f(x)$$

υπ.

$$F \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & , i=1,\dots,m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & , j = m_1+1,\dots,m_1+m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & , j = m_1+m_2+1,\dots, m_1+m_2+m_3 = m \\ x_j \geq 0 & , j=1,\dots,n_1 \\ x_j \leq 0 & , j = n_1+1,\dots,n_1+n_2 \\ x_j \in \mathbb{R} & , j = n_1+n_2+1,\dots,n \end{array} \right.$$

$f(x)$: αντικειμενική συνάρτηση

$F = \{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{περιορισμοί} \}$: εφικτή περιοχή

$x \in F$: εφικτή λύση

x^* : βέλτιστη αν $f(x^*) = z$

π.χ. $\max \{ x : x \geq 0 \}$ $\nexists$

$\sup \{ x : x \geq 0 \} = +\infty$

$\min \{ x : x \geq 0 \} = 0$, $x^* = 0$ = βέλτιστη

Ισοδύναμες Μορφές

Κανονική Μορφή

$$\boxed{\begin{aligned} z = \max \ & c'x \\ \text{υ.π.} \ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

(Simplex)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

$b \geq 0$

$\boxed{\text{Μετ/σμοί :}}$

$(b_i \geq 0)$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$ (περιθώρια μεταβλητή)

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_i \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$

$b_i<0$ π.χ. $\sum a_{ij}x_j \le b_i$ $(b_i<0)$

$\Leftrightarrow -\sum a_{ij}x_j \ge -b_i$ $(-b_i>0)$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\sum a_{ij}x_j - y_i = -b_i \\ y_i \ge 0 \end{array}\right\} \leftarrow$ ΚΜ.

$x_i \le 0 \Leftrightarrow x_i' = -x_i \ge 0$ (αντικ. $x_i = -x_i'$ παντού)

$x_i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_i = x_i' - x_i''$, $\left.\begin{array}{l} x_i' \ge 0 \\ x_i'' \ge 0 \end{array}\right\}$ (αντικ. παντού)

Για δυϊκότητα κατάλληλη η ημικανονική μορφή

$$\begin{array}{lll} \max c'x & & \min c'x \\ Ax \le b & \text{ή} & Ax \ge b \\ x \ge 0 & & x \ge 0 \end{array}$$

(Cb στεδιάστε)

Εφαρμογές σε Προγραμματισμό Παραγωγής

1 Παραγωγή Πολλών Προϊόντων σε Μια Περίοδο

n προϊόντα

m κοινοί πόροι παραγωγής

δεν διατηρείται απόθεμα μεταξύ περιόδων

c_j : κέρδος ανα μονάδα πρ. j, $j=1,\dots,n$

b_i : διαθέσιμη ποσότητα πόρου i, $i=1,\dots,m$

a_{ij} : απαιτ. ποσότητα πόρου i ανά μονάδα παραγωγής προϊόντος j, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

d_j : ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα πρ. j (ζήτηση)

Μεγ. συνολικού κέρδους

Ορίζουμε μεταβλητές x_j = ποσότητα παραγωγής πρ. j, $j=1,\dots,n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \leftarrow \text{συν. κέρδος}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{\text{απαιτούμενη ποσότητα πόρου } i} \le \underbrace{b_i}_{\text{διαθ. ποσότητα}}, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge d_j \quad j=1,\dots,n$$

$$(x_j \ge 0)$$

2 Παραγωγή ενός προϊόντος σε Πολλές Περιόδους

Ένα προϊόν διατηρείται σε απόθεμα

(δυναμικό πρόβλημα : παραγωγή σε κάθε περίοδο)

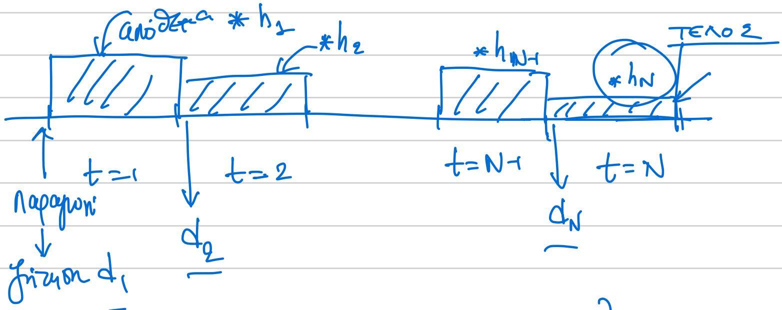
N = χρονικός ορίζοντας (αρ. περιόδων προγραμματισμού)

Παραγωγή στην αρχή περιόδου t, $t=1,2,\dots,N$

c_t = κόστος παραγωγής περιόδου t, $t=1,\dots,N$

d_t = ζήτηση περιόδου t

h_t = κόστος διατήρησης αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος, για τιο περίοδο t $(t \to t+1)$



Απεριόριστες ποσότητες πόρων
Άπειρη χωρητικότητα αποθήκης } απλούστευση

Να βρεθούν οι ποσότητες παραγωγής που ικανοποιούν τη ζήτηση και ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος.

(δεν επιτρέπονται ελλείψεις)

βέλτιστο αν $c_t = c \ \forall t$.

Γιατί όχι $\boxed{x_t = d_t \ \forall t}$ $\Rightarrow$ κόστος αποθήκευσης $= 0$.

① Επειδή c_t μπορεί να διαφέρει για $t = 1, \dots, n$

② Αν υπάρχει περιορισμός σε ποσότητα παραγωγής

πχ.

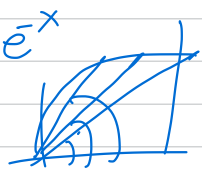
$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le 100 \\ x_2 \le 100 \\ \text{αλλά } d_1 = 50 \\ d_2 = 120 \end{array}\right\}$$

③ Οικονομίες κλίμακας στην παραγωγή

Αν κόστος παραγ. x μονάδων $= C(x)$

Εδώ υποθ. $C(x) = cx$

Όμως σε άλλα προβλήματα μπορεί $C(x) = 1 - e^{-x}$



$C(2x) < 2C(x)$

Μοντελοποίηση (επόμενο μάθημα)
