22/5/2024

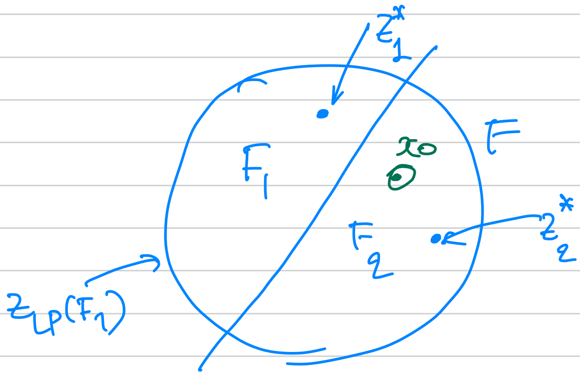
# Η μέθοδος κλάδου - φράγματος

$$z^* = \max c'x$$
$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array}\right\} F$$

$$F = \{ x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b, \ x \geq 0 \}$$

① Έστω $F = F_1 \cup F_2$ , $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$$z(F_1) = \max\{c'x : x \in F_1\} \qquad z(F_2) = \max\{c'x : x \in F_2\}$$



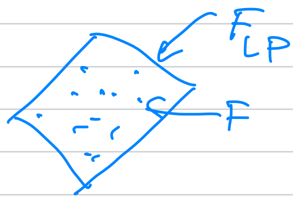

Τότε $z(F) = \max\{z(F_1), z(F_2)\}$

Εδώ $z(F_1)$ , $z(F_2)$ Π.Α.Π.

Έστω $\left.\begin{array}{l} z_{LP}(F_1) \\ z_{LP}(F_2) \end{array}\right\}$ η χαλάρωση ΓΠ σε κάθε πρόβλημα

Τότε $z(F_1) \leq z_{LP}(F_1)$. $\quad F_{1LP} \supseteq F_1$

$z(F_2) \leq z_{LP}(F_2)$




② Έστω $x_0 \in F$ μια εφικτή λύση του αρχικού ΠΑΠ

και $z_0 = c'x_0$.

**Λήμμα** Αν $z_0 \ge z_{LP}(F_1)$ τότε $z^* = \max\{z^0, z(F_2)\}$

**Αποδ.** Αν $z_0 \ge z_{LP}(F_1)$ τότε

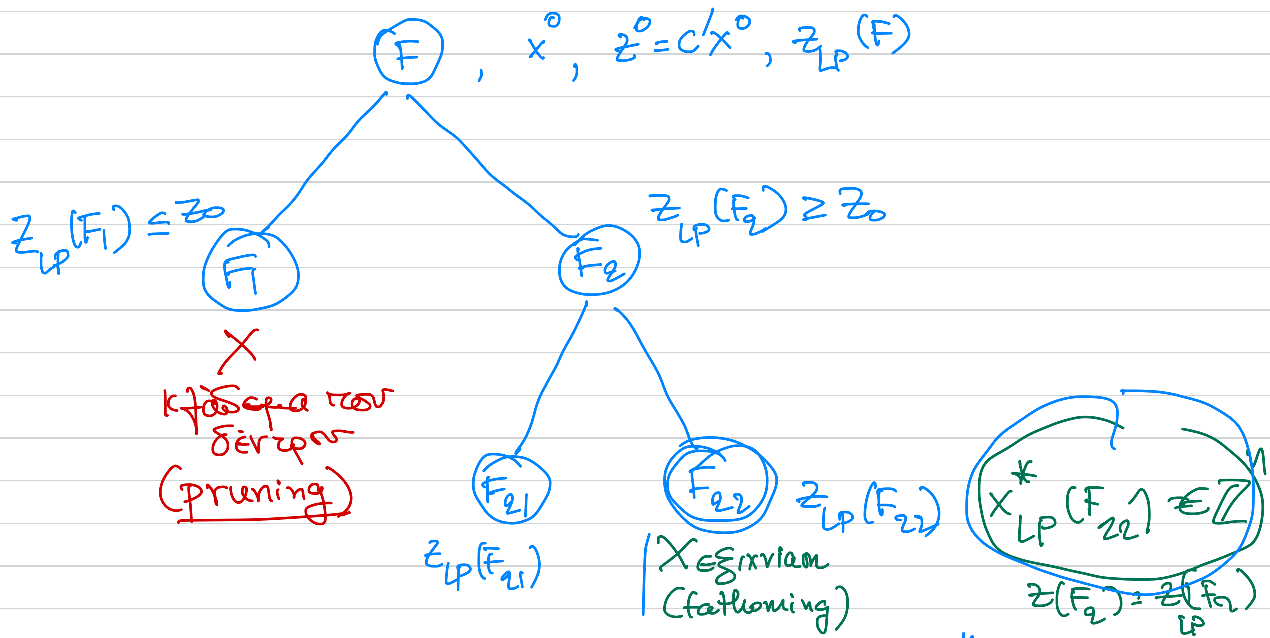
$$z(F_1) \le z_{LP}(F_1) \le z_0 \le z^*$$

---

Τώρα έστω ότι εφαρμόζουμε τη διαμέριση στο $F_2$

$F_2 = F_{21} \cup F_{22}$ κ' συνεχίζουμε με τον "ίδιο τρόπο".

Γράφημα της διαδικασίας




Αν σε έναν κόμβο $F_a$ ισχύει $x^*_{LP}(F_a) \in \mathbb{Z}^n$

τότε $\quad z(F_a) = z_{LP}(F_a)$

$$z_{LP}(F_a) = c' \underbrace{x^*_{LP}(F_a)}_{\in \mathbb{Z}^n} \le z(F_a) \le z_{LP}(F_a)$$

και $x^*_{LP}(F_a)$ βέλτιστη λύση του $z(F_a)$.

τότε :

① Σταματάμε τη διαμέριση από το $F_a$ και κάτω (fathoming - εξιχνίαση του $F_a$)

② Αν $z(F_a) = c' x^*_{LP}(F_a) > z_0$ τότε αντικαθιστούμε την $x_0$ από την $x^*_{LP}(F_a)$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x^*_{LP}(F_a) \\ z_0 &= z(F_a) \end{aligned}\right\}$$ νέα υποψήφια βέλτιστη λύση

---

Πώς κάνουμε τη διαμέριση;

Αν $x_{LP}(F_a) \notin \mathbb{Z}^n$

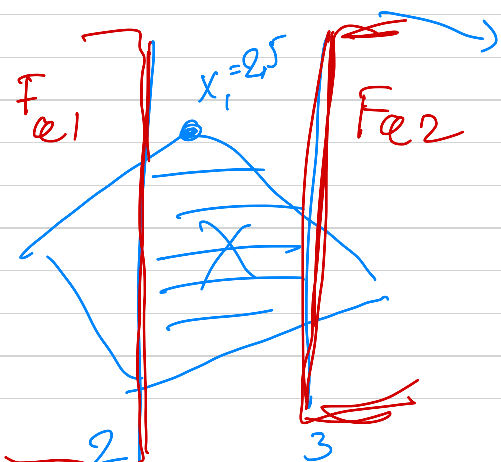
Έστω $x_1^* \notin \mathbb{Z}$

$$F_{a1} = \{ x \in F_a : x_1 \le \lfloor x_1^* \rfloor \}$$

$$F_{a2} = \{ x \in F_a : x_1 \ge \lfloor x_1^* \rfloor + 1 \}$$

π.χ. $x_1 = 2.37$ → $F_{a1} : x_1 \le 2$

→ $F_2 : x_1 \ge 3$



Ο αλγόριθμος σταματάει όταν όλοι οι κόμβοι έχουν είτε εξιχνιαστεί είτε κλαδευτεί.
Τότε η καλύτερη λύση $x_0$ που έχουμε βρει μέχρι στιγμής είναι και <u>βέλτιστη</u>

---

Γενική περιγραφή αλγορίθμων Branch-and-Bound

Σε κάθε βήμα υπάρχει ένα σύνολο κόμβων (υποπροβλημάτων) που δεν έχουν εξεταστεί [<u>Ενεργοί κόμβοι</u> – active nodes].

Επίσης (μπορεί να) υπάρχει μια εφικτή λύση $x_0$ του αρχικού προβλήματος (η καλύτερη που έχει βρεθεί μέχρι τώρα) : <u>τρέχουσα λύση (incumbent solution)</u>

<u>Αλγόριθμος</u>

① Επιλέγουμε έναν ενεργό κόμβο $F_i$

② Υπολογίζουμε το φράγμα χαλάρωσης $z_{LP}(F_i)$

③ Αν $z_{LP}(F_i) \le z_0$ ο κόμβος <u>κλαδεύεται</u> (pruning) και παύει να είναι ενεργός.

④ Αν $z_{LP}(F_i) > z_0$

(4a) Αν $x^*_{LP}(F_i) \in \mathbb{Z}^n$ τότε ο κόμβος έχει εξιχνιαστεί (fathoming) παύει να είναι ενεργός

Επιπλέον αν $c'x^*_{LP}(F_i) > z_0$

τότε θέτουμε $x_0 = x^*_{LP}(F_i)$ (γίνεται η νέα τρέχουσα λύση)

$z_0 = z_{LP}(F_i)$

διαφορετικά παραμένει η αρχική $x_0$.

(4b) Αν $x^*_{LP} \notin \mathbb{Z}^n$ επιλέγουμε μια μη ακέραιη συνιστώσα του $x^*_{LP}(F_i)$ έστω $x^*_1$

Δημιουργούμε δύο νέους κόμβους $F_{i1}, F_{i2}$

$F_{i1}$ προσθέτουμε περιορ. $x_1 \leq \lfloor x^*_1 \rfloor$

$F_{i2}$ " " $x_1 \geq \lfloor x^*_1 \rfloor + 1$

Ο $F_i$ παύει να είναι ενεργός κόμβος.

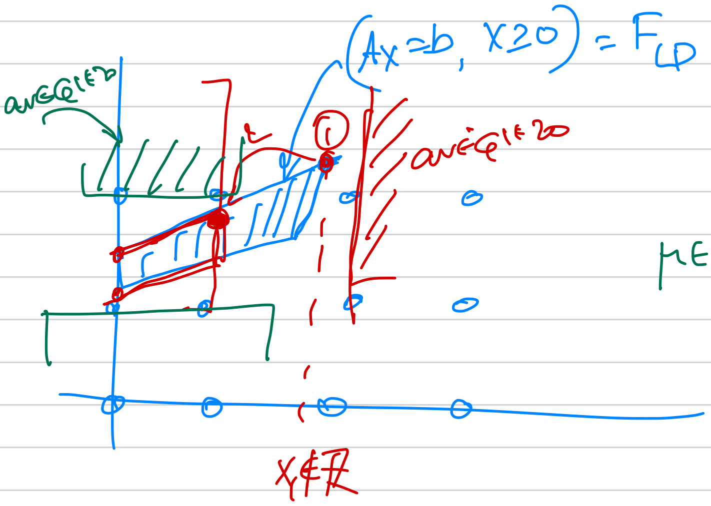
---

## Παρατηρήσεις

1. Αν σε έναν κόμβο $F_a$ το $z_{LP}(F_a)$ είναι μη εφικτό ο κόμβος διαγράφεται παύει να είναι ενεργός

2. Σταματάει όταν εξαντληθεί η λίστα των ενεργών κόμβων. Αν σε αυτό το σημείο δεν έχει βρεθεί τρέχουσα λύση, τότε το αρχικό ΠΑΠ είναι ανέφικτο, διαφορετικά η τρέχουσα λύση

είναι βέλτιστη και $z(F) = z_0$.




παράδειγμα με $F = \emptyset$

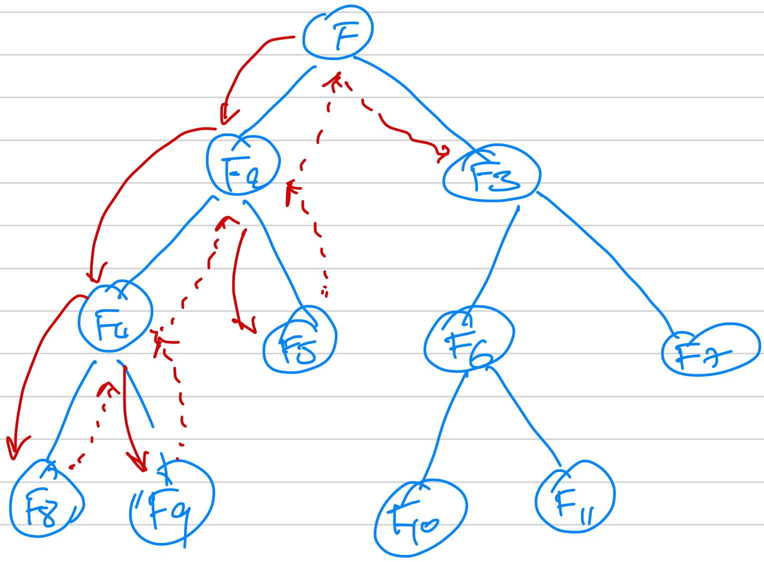
---

(3) Αν σε ένα βήμα $\exists$ περισσότεροι ενεργοί κόμβοι υπάρχουν διάφορες στρατηγικές

(a) Κατά βάθος πρώτα (depth-first)

(b) Κατά πλάτος πρώτα (breadth-first)

Παράδ.:




depth first $F_1 \to F_2 \to F_4 \to F_8 \to F_9 \to F_5 \to F_3 \to F_6 \to F_{10} \to F_{11} \to F_7$

breadth first $F \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to F_5 \to F_6 \to F_7 \to F_8 \to F_9 \to F_{10} \to F_{11}$

④ Η χαλάρωση LP χρησιμεύει για να δίνει φράγματα.
Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κ' άλλες μέθοδοι χαλάρωσης
π.χ. Lagrangean

⑤ Για min προφανείς μετατροπές στις ανισότητες
για pruning / fathoming.

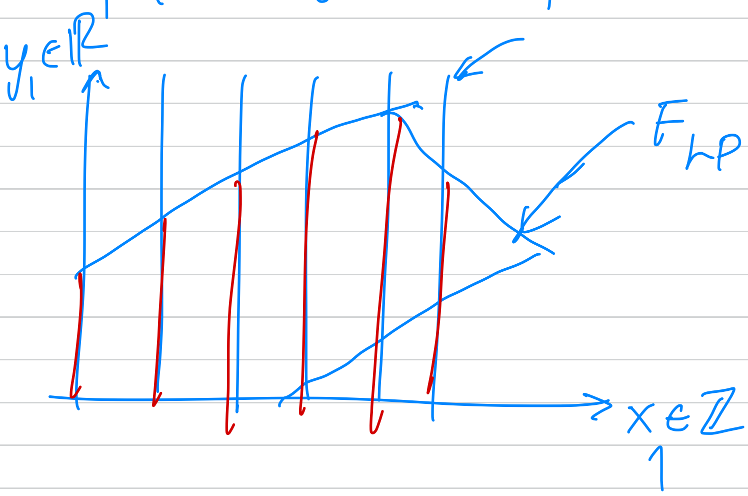
⑥ 0-1 προγράμματα $x \in B^n$

η διαμέριση όταν $x_j \notin Z$ $(\Leftrightarrow 0 < x_j < 1)$

$F_1 : x_j = 0$

$F_2 : x_j = 1$

⑦ Σε μεικτό προγρ. $(x \in Z^n, y \in R^p)$
διαμερίσεις γίνονται μόνο στις $x$



## Παράδειγμα

$$z = \max \; 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3$$

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 13x_2 \quad & - 10x_4 \leq 6700 \\
7x_1 + 6x_2 \quad & \leq 6200 \\
10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 & + x_4 \leq 7200 \\
2x_1 + 3x_2 \quad & \leq 1650 \\
-154x_3 & + x_4 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$x_j \geq 0$$

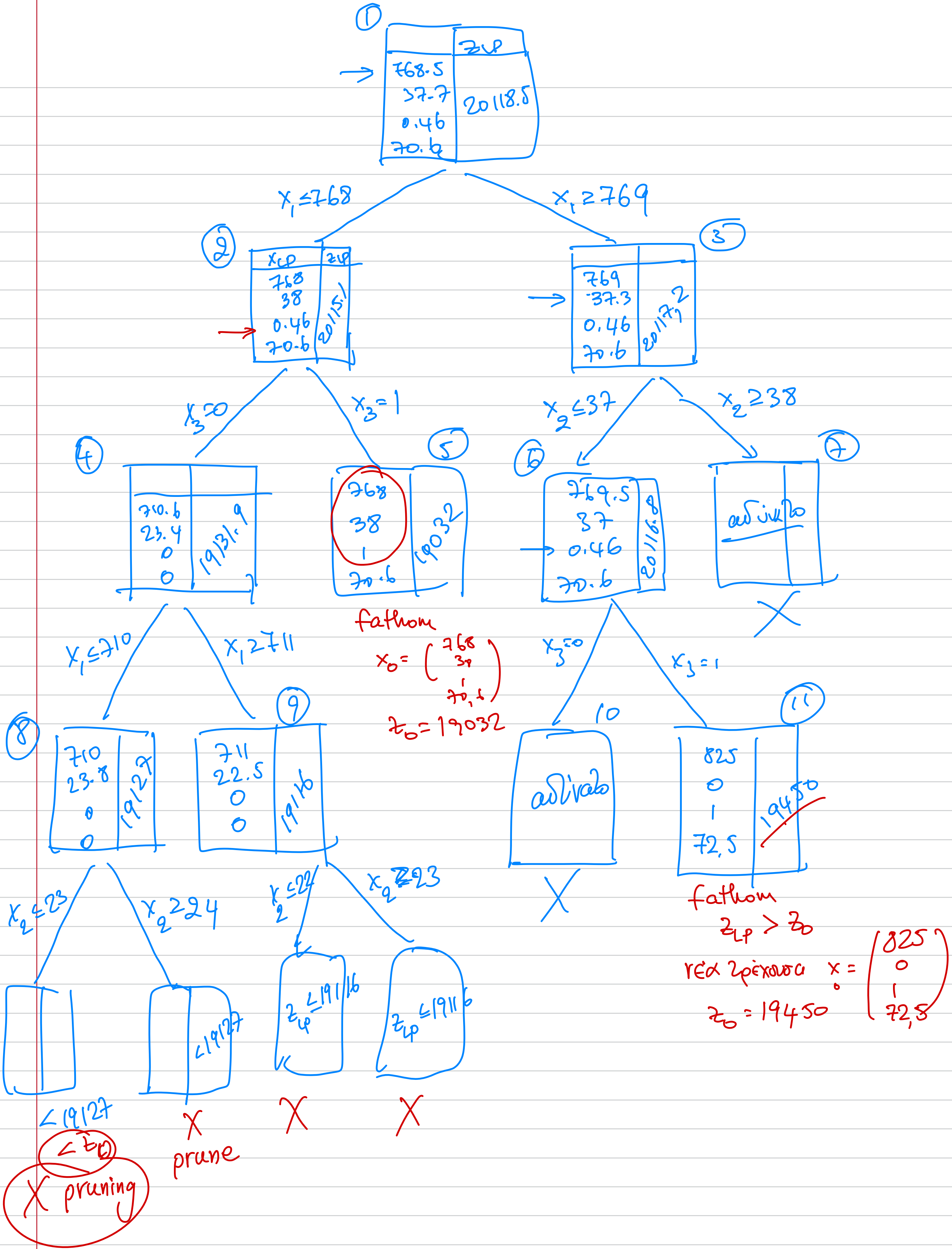
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_3 \in \mathbb{B}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

Διακλαδώσεις $\quad x_4$ όχι

$x_3 = 0$ ή $x_3 = 1$

όχι ΚΜ. (δεν ενοχλεί)

Στρατηγική κατά εύρος πρώτα.



1
768.5
37.7
0.46
70.6
20118.5
x1 ≤ 768
x1 ≥ 769
2
768
38
0.46
70.6
20115.1
3
769
37.3
0.46
70.6
20117.2
x3 = 0
x3 = 1
x2 ≤ 37
x2 ≥ 38
4
710.6
23.4
0
0
19131.9
5
768
38
1
70.6
19032
fathom
x0 =
z0 = 19032
6
769.5
37
0.46
70.6
20116.8
7
αδύνατο
x1 ≤ 710
x1 ≥ 711
x3 = 0
x3 = 1
8
710
23.8
0
0
19127
9
711
22.5
0
0
19116
10
αδύνατο
11
825
0
1
72.5
19450
fathom
zLP > z0
νέα τρέχουσα x0 =
z0 = 19450
x2 ≤ 23
x2 ≥ 24
x2 ≤ 22
x2 ≥ 23
< 19127
zLP ≤ 19116
< 19127
< z0
pruning
prune

Αν αρχικά επιλέγαμε $x_3 = 0$ ή $x_3 = 1$