27/5/2024

① **Άσκηση 4.1** Εταιρεία μεταφορών

Παράδοση σε n πελάτες

Πελάτης j ποσότητα d_j $\quad j=1,\ldots,n$

Η εταιρεία έχει m φορτηγά.

Φορτηγό k $\begin{cases} L_k = \text{χωρητικότητα} \\ C_k = \text{κόστος αν χρησιμοποιηθεί} \end{cases}$

Η παραγγελία κάθε πελάτη εξ ολοκλήρου από 1 φορτηγό

Κάθε φορτηγό το πολύ M παραδόσεις σε μια μέρα

Οι πελάτες 1 και 7 δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν από το ίδιο φορτηγό.

Λύση

$x_{jk} = 1$ (φορτηγό k παράδοση στον πελάτη j)

$x_k = 1$ (φορτηγό k χρησιμοποιείται)

$$\min \sum_{k=1}^{m} c_k x_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} \le M x_k \quad , \quad k=1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_{jk} \le L_k x_k, \quad k=1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j=1,\ldots,n$$

$x_{1k} + x_{7k} \le 1 \qquad k = 1, \dots, m$

② Άσκηση 4.3 Παραγωγή ενός προϊόντος σε T περιόδους

c_t : κόστος παραγ/μονάδα περ. t
h_t : " αποθ /μονάδα περ. $t \to t+1$
d_t : ζήτηση περ. t

Ελαχ. συνολικού κόστους (ικανοποιείται η ζήτηση)

x_t : ποσότητα παραγ. περ. t, $t = 1, \dots, T$
I_t : απόθεμα στην αρχή περ. t, $t = 2, \dots, T+1$

LP

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left(c_t x_t + h_t I_{t+1} \right)$$

$$I_{t+1} = I_t + x_t - d_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

$$x_t \ge 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

$$I_t \ge 0, \quad t = 2, \dots, T+1$$

Επιπλέον σε κάθε περίοδο υπάρχει κόστος K_t : έναρξης παραγωγής

οικονομίες κλίμακας

fixed costs
setup costs

~~Οικον. κλίμακας~~

Παραγωγή : $C(x)$: κόστος παραγωγής x μονάδων.

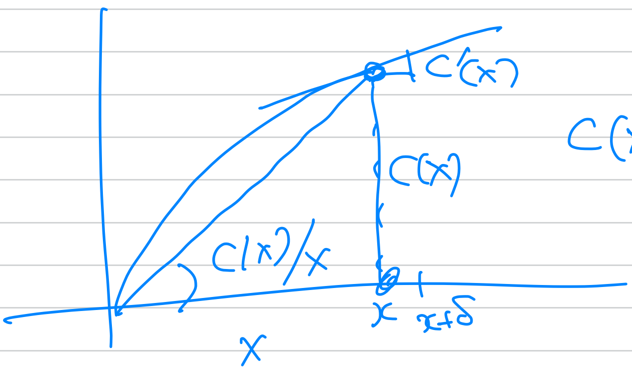
ⓐ Γραμμική περ: $C(x) = cx$

$$C'(x) = c$$

$$\frac{C(x)}{x} = c$$

~~Γενικά~~

$C'(x)$ = οριακό κόστος (marginal cost)



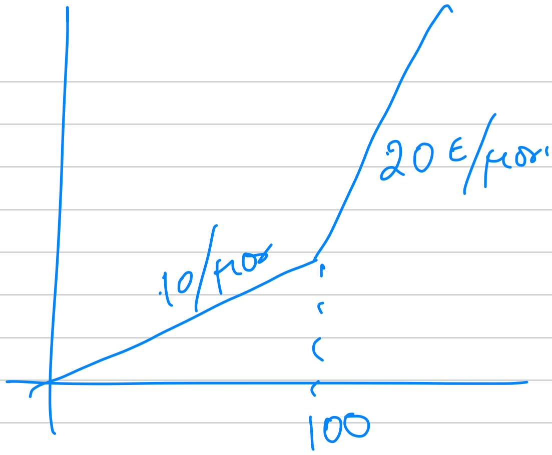
$C(x+\delta) \approx C'(x)\cdot\delta$

$\frac{C(x)}{x}$: μέσο κόστος παραγ./μονάδα για τις πρώτες x

Οικον. κλίμακας $\boxed{\frac{C(x)}{x} \downarrow x.}$

Όταν $C(0)=0$, $C(x)$ αύξ. : $\frac{C(x)}{x} \downarrow$ αν $C'(x) \downarrow$

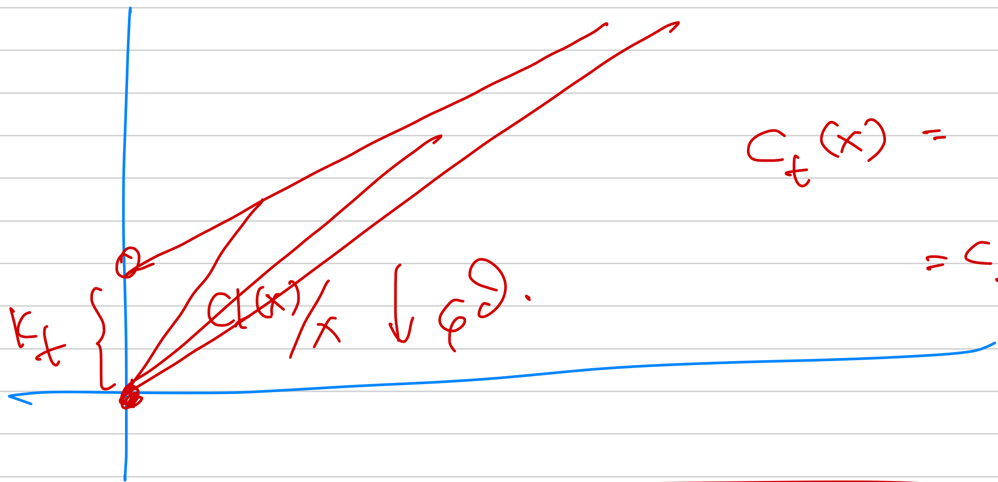
($\exists$ αντιοικ. κλ.: $\frac{C(x)}{x} \uparrow x$



Εδώ

$$C_t(x) : \begin{cases} 0 , & \text{αν } x=0 \\ K_t + c_t x & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

$C_t'(x) = c_t$ σταθ. (λάθος)



$$C_t(x) = \frac{c_t x}{x} = c_t + \frac{K_t}{x}$$

$y_t = 1$ (γίνεται παραγωγή στην περ. t)

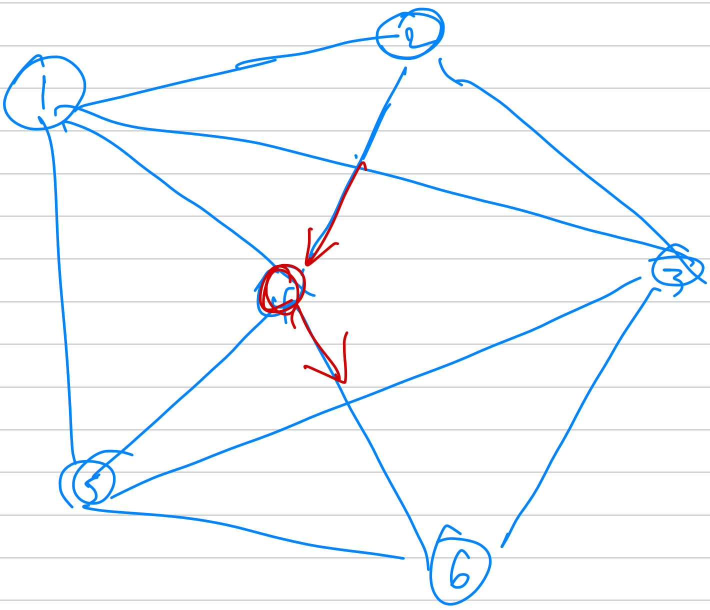
$$\min \sum_{t=1}^{T} \left(K_t y_t + c_t x_t + h_t I_{t+1} \right)$$

$$I_{t+1} = I_t + x_t - d_t \quad , \ t = 1, \dots, T.$$

$$x_t \le \left(\sum_{t=1}^{T} d_t \right) y_t \qquad (M \to \infty)$$

(γίνεται και με ΔΠ ή αλγ. Wagner-Whitin)

4 Traveling Salesman Problem.



$V = \{\text{nodes}\}$

$E = \{(i,j) \text{ ακμές}\}$

c_{ij} = κόστος διαδρομής $i \to j$

Tour (Περιοδεία) Πολύγωνο που περνάει από όλους τους κόμβους μια φορά

Να βρεθεί τουρ ελάχιστου κόστους

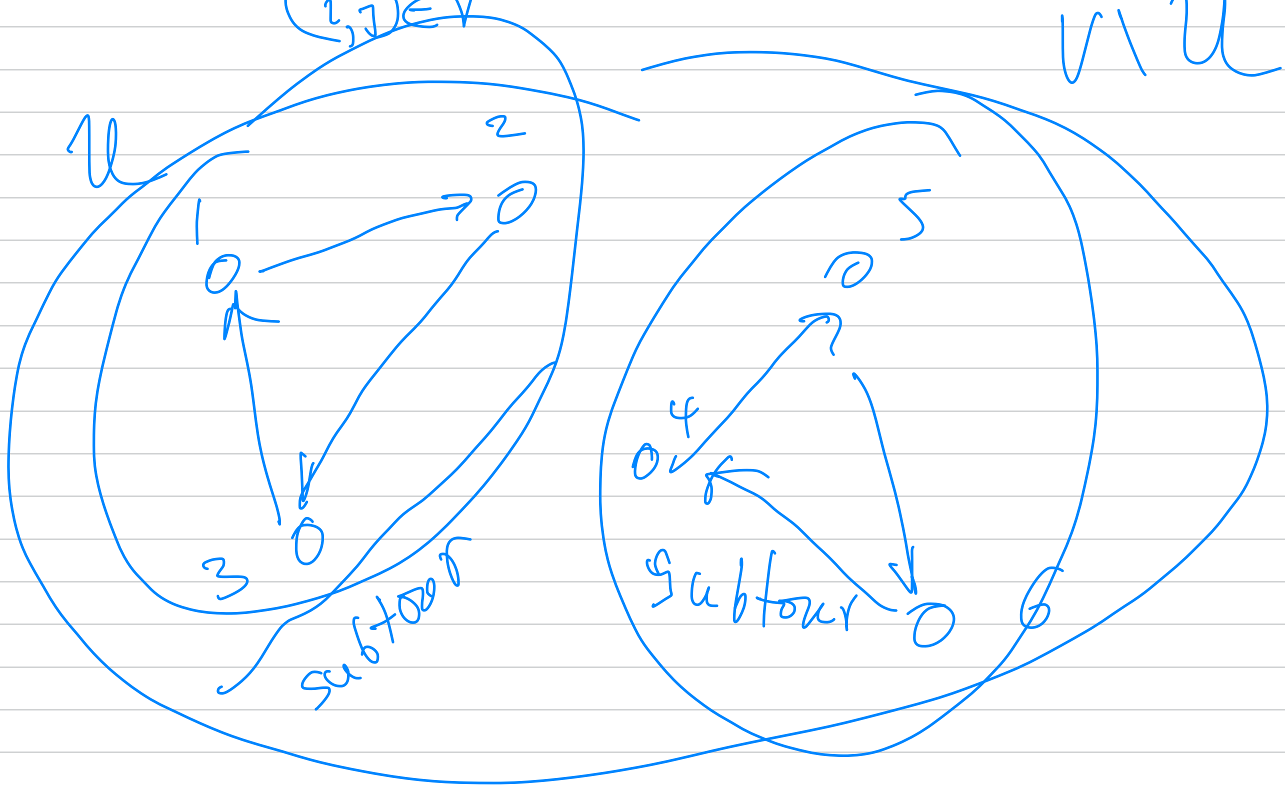
$x_{ij} = 1$ (ο j ακολουθεί τον i στην περιοδεία)

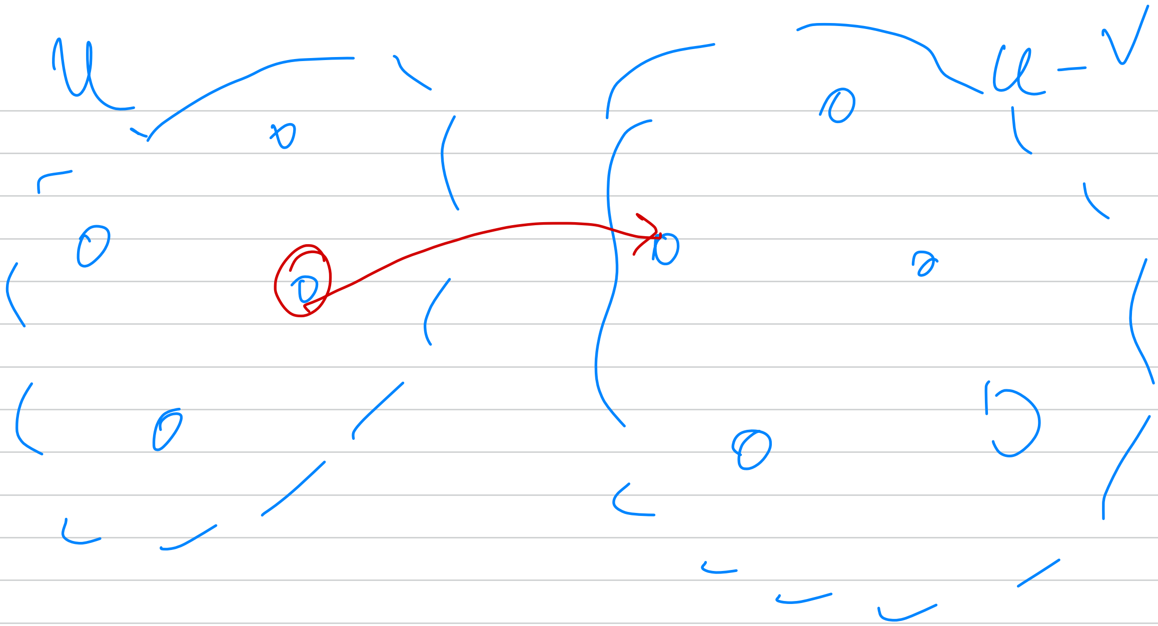
$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}$$

υ.π.

$$\sum_{\substack{i \in V: \\ (i,j) \in E}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V$$

$$\sum_{\substack{j \in V: \\ (i,j) \in V}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V$$





Subtour elimination constraints

$\forall\, U \subset V \;:\; 2 \leq |U| \leq |V| - 2$

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E:\\ i\in U\\ j\in V\setminus U}} x_{ij} \geq 1$$

$\approx 2^{|V|}$ περιορισμοί