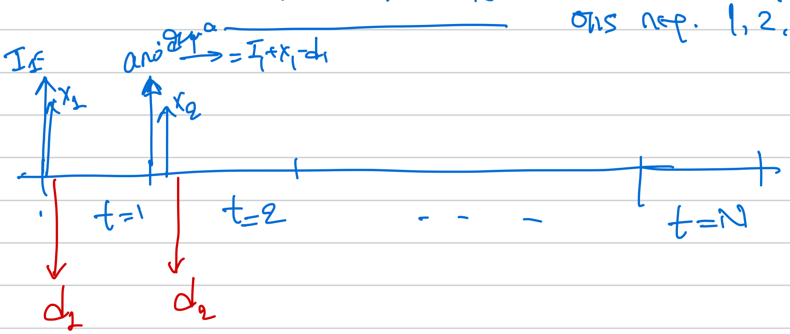
2024-02-26

Πρόβλημα παραγωγής σε πολλές περιόδους

Μοντελοποίηση ΓΠ.

① **Μεταβλητές** $x_1, x_2, \ldots, x_N$: ποσότητες παραγωγής στις περ. $1, 2, \ldots, N$



Περιορισμοί

$t=1$ $\quad x_1 + I_1 \geq d_1 \iff x_1 \geq d_1 - I_1$

$x_1 \geq 0$

$t=2$ $\quad \underbrace{I_1 + x_1 - d_1}_{(\geq 0)} + x_2 \geq d_2 \iff x_1 + x_2 \geq d_1 + d_2 - I_1$

$t=3$ $\quad \underbrace{(I_1 + x_1 - d_1 + x_2 - d_2)}_{\geq 0} \geq d_3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq d_1 + d_2 + d_3 - I_1$

$\vdots$

Αντικ. Συνάρτηση

Κόστος $= \sum_{t=1}^{N} c_t x_t$ (κόστος παραγ).

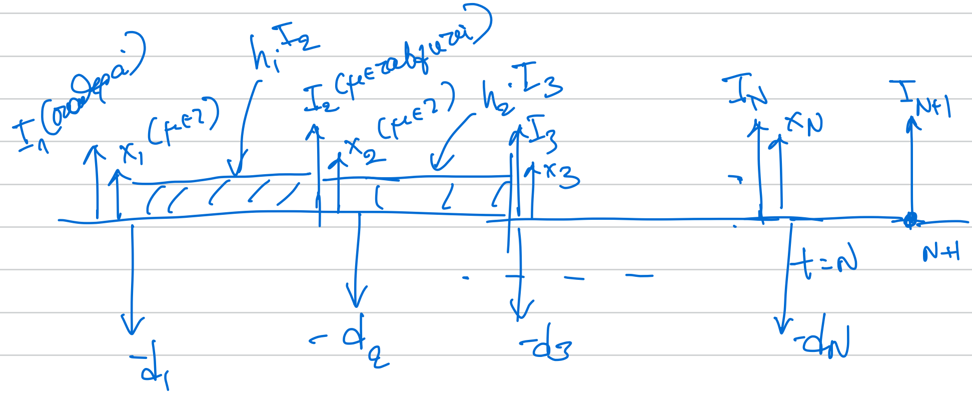
$+ \; h_1 \cdot (I_1 + d_1 - x_1)$

$+ \; h_2 \cdot (I_1 + d_1 - x_1 + x_2 - d_2)$

$+$
$\vdots$
$+ \; h_N (\qquad\qquad) =$

$= M + \sum_{t=1}^{N} b_t x_t$.

Δεύτερος Τρόπος



2N μεταβλητές

$x_1, \ldots, x_N$: ποσότητες παραγωγής

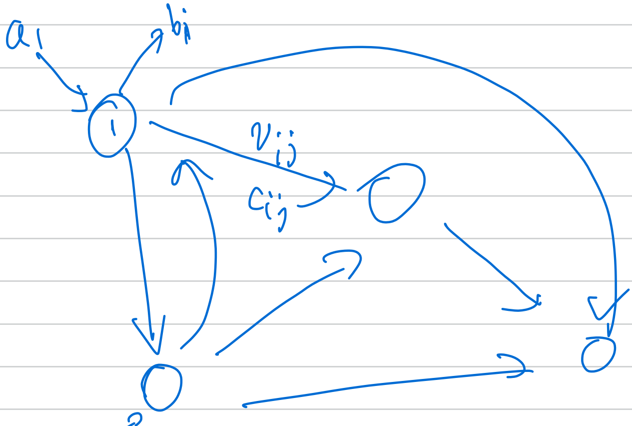
$I_2, \ldots, I_{N+1}$: απόθεμα στην αρχή περιόδου $2, \ldots, N+1$

$$
\begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{t=1}^{N} c_t x_t + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1} \\
\left.\begin{aligned}
I_2 &= I_1 + x_1 - d_1 \\
I_3 &= I_2 + x_2 - d_2 \\
&\;\;\vdots \\
I_{N+1} &= I_N + x_N - d_N
\end{aligned}\right\} \text{Λογικοί περιορισμοί (δυναμική προβλήματος)} \\
x_1, \dots, x_N \geq 0 \\
I_2, \dots, I_{N+1} \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\boxed{I_1 + x_1 \geq d_1 \iff \underbrace{I_1 + x_1 - d_1}_{= I_2} \geq 0 \iff I_2 \geq 0}
$$

③ Προβλήματα Ροής σε Δίκτυα

Ένα προϊόν διανέμεται μέσω δικτύου εγκαταστάσεων



εγκαταστάσεις (εργοστάσια, αποθήκες, σημεία λήψης)

Εστιάζουμε στη διακίνηση (ροή) του προϊόντος

① Πρόβλημα διαμετακόμισης ελάχιστου κόστους

② Πρόβλημα Μέγιστης Ροής

Δίκτυο - Γράφημα

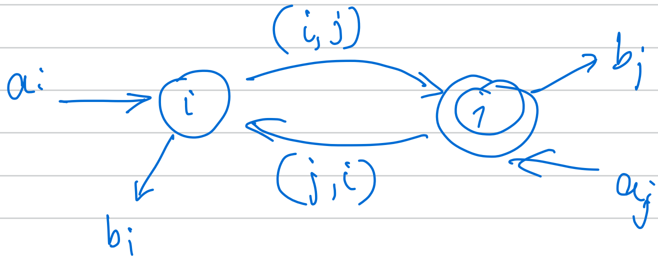
V : σύνολο κόμβων (κορυφών)

$$V = \{1, \dots, N\}$$

E : σύνολο ακμών (i,j), $i \in V$, $j \in V$, $i \neq j$

$$E \subseteq V \times V$$

(κατευθυνόμενες ακμές $i \to j$)



c_{ij} : κόστος ανά μονάδα προϊόντος που μεταφέρεται

u_{ij} : χωρητικότητα (μέγιστη δυνατή ποσότητα μεταφοράς)

a_i : εισερχόμενη (διαθέσιμη) ποσότητα προϊόντος

b_i : εξερχόμενη (απαιτούμενη) " "

(a) Πρόβλημα διαμετακόμισης (Capacited Transshipment)

Να βρεθούν οι μεταφερόμενες ποσότητες έτσι ώστε να καλυφθούν οι απαιτήσεις (b_i) χωρίς να υπερβούμε τις διαθεσιμότητες (a_i) κ' τις χωρητικότητες (v_{ij}) με το ελάχιστο δυνατό κόστος

Μεταβλητές $\{x_{ij} \,,\, (i,j)\in E\}$ x_{ij} : ποσότητα που μεταφέρεται στην ακμή (i,j)

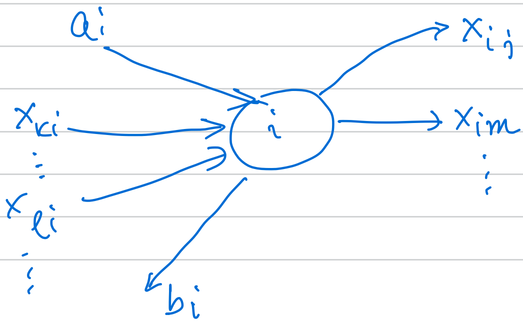
$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad n = |E|$$

$$\min \; f(\underline{x}) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$$

Περιορισμοί

(*) (a) $x_{ij} \le v_{ij} \quad \forall (i,j)\in E$

(β)



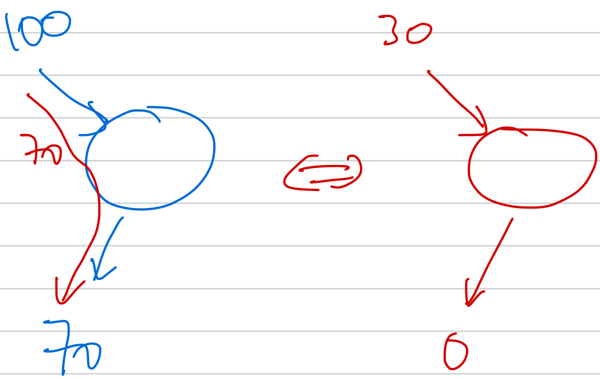
$$\left(\text{Εισερχ. ποσότητα}\right)_i \geq \left(\text{εξερχόμενη ποσ}\right)_i \quad \forall i=1,\dots,N$$

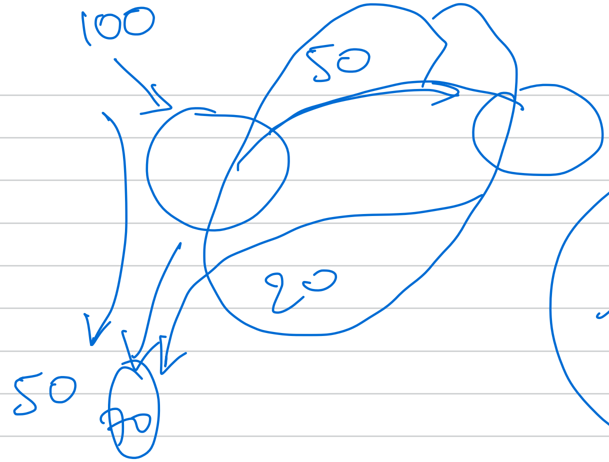
$$\sum_{\substack{j\in V\\(i,j)\in E}} x_{ij} + b_i \leq \sum_{\substack{j\in V\\(j,i)\in E}} x_{ji} + a_i \qquad \forall i$$

(*) $$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} x_{ji} \leq a_i - b_i, \quad i=1,\dots,N$$

εξισώσεις ισορροπίας (ροής)

(*) $$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j)\in E.$$

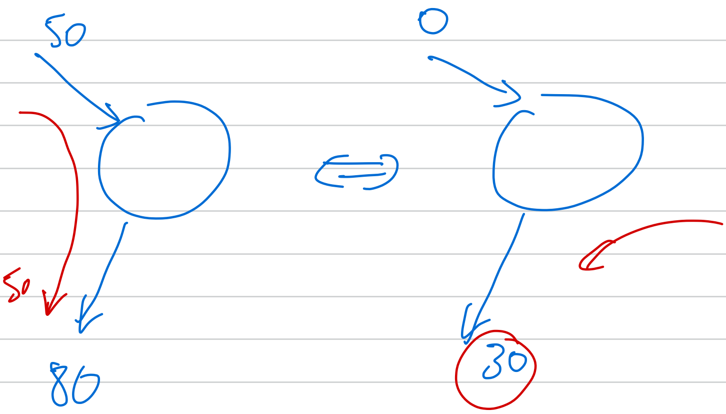




όχι βέλτιστη λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας

υποθέτουμε $a_i b_i = 0 \quad \forall i$



$$V = V_s \cup V_d \cup V_t \quad , \quad V_s V_d = V_s V_t = V_d V_t = \emptyset$$

$V_s = \{ i \ : \ a_i > 0 , b_i = 0 \}$ σύνολο πηγών (source)

$V_d = \{ i \ : \ a_i = 0 , b_i > 0 \}$ σύνολο προορισμών (destination)

$V_t = \{ i \ : \ a_i = b_i = 0 \}$ " διαμετακομιδής (transshipment)

(a1) Ροή Ελάχιστου Κόστους (Min-Cost Flow Problem)

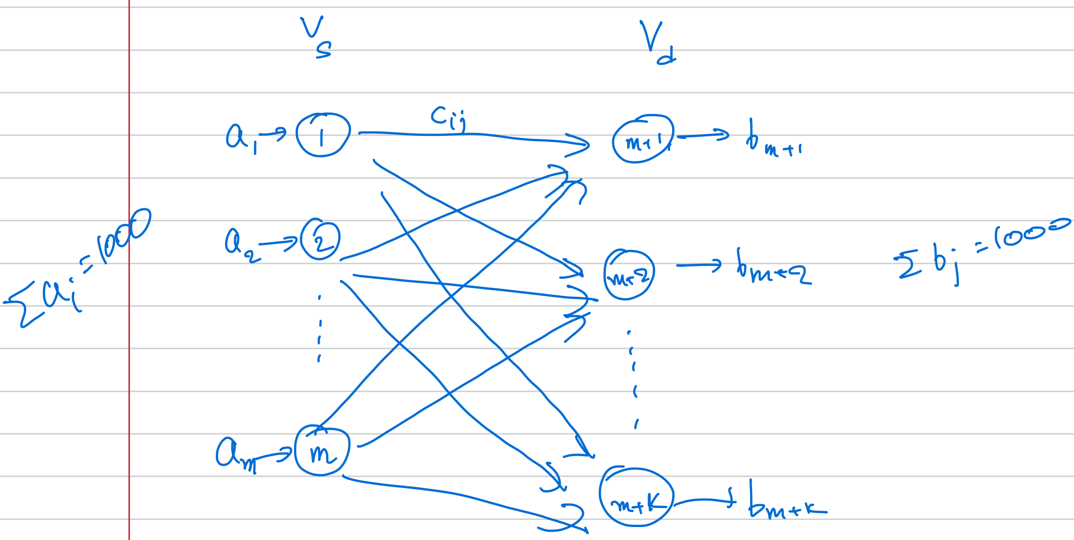
$$v_{ij} = \infty \quad \forall (i,j) \in E .$$

(a2) Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation Problem)

$$v_{ij} = \infty$$

Επίσης $V_t = \emptyset$

και $E = V_s \times V_d$ $\quad \forall\, i \in V_s ,\, j \in V_d \;\; \exists\, (i,j) \in E$



Εφικτό αν κ' μόνο αν $\sum_{i \in V_s} a_i \geq \sum_{j \in V_d} b_j$

ηγπ.

$$\min \sum_{i\in V_s} \sum_{j\in V_d} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j\in V_d} x_{ij} \le a_i \qquad i \in V_s$$

$$\sum_{i\in V_s} x_{ij} \ge b_j \qquad j \in V_d$$

$$x_{ij} \ge 0$$

πρόβλημα μεταφοράς

Ειδική Περίπτωση $\quad \sum_{i\in V_s} a_i = \sum_{j\in V_d} b_j$

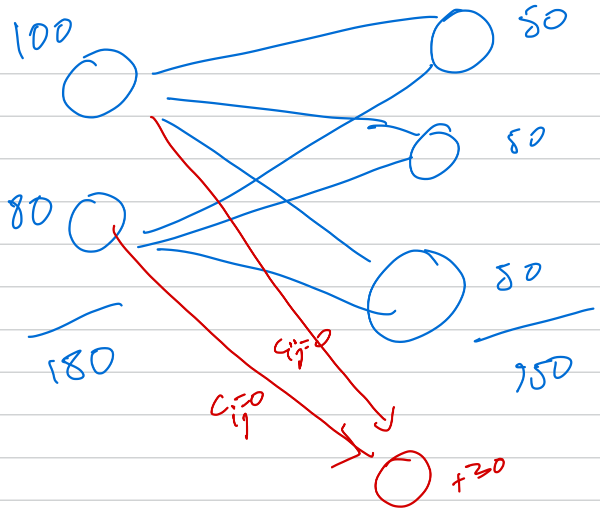
(ισορροπημένο – balanced problem)

Λήμμα

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad \forall i \in V_s$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad \forall j \in V_d$$

χ.β.γ. θεωρούμε ότι κάθε πρόβλημα ισορροπημένο.
(πλασματική – πηγή – προορισμοί)



100
80
180
50
50
50
150
$c_{ij}=0$
$c_{ij}=0$
+30