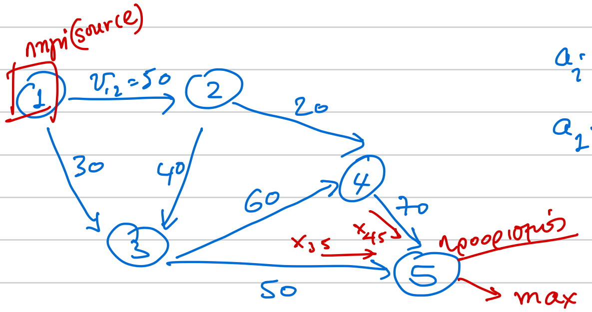
28-2-2024

Πρόβλημα μέγιστης ροής (max-flow)



$a_i = b_i = 0 \quad i = 2,3,4$

$a_1 = \infty$

Πρόβλημα Ελάχιστης Τομής (min-cut)

Τομή: Σύνολο ακμών που αν αφαιρεθούν το δίκτυο παύει να έχει μονοπάτι $1 \to 5$

π.χ. τομή : $(4,5), (3,5)$: χωρητ. $= 50+70 = 120$.

max flow ≤ 120

τομή $(2,4), (3,4)$ $(3,5)$: χωρητ. $20+60+50 = 130$

maxflow ≤ 130

τομή : $(1,2), (1,3)$: χωρητ 80

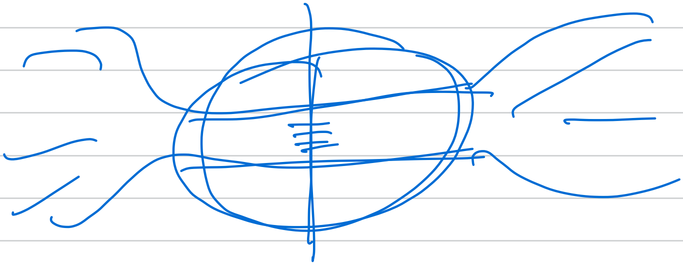
τομή : $(1,3), (2,3), (2,4)$: χωρητ $= 90$

max flow ≤ 80

maximum flow $\leq$ χωρητικότητα ελάχιστης τομής

maxflow $\leq$ mincut.

Θεώρημα : max flow = min cut



bottleneck.

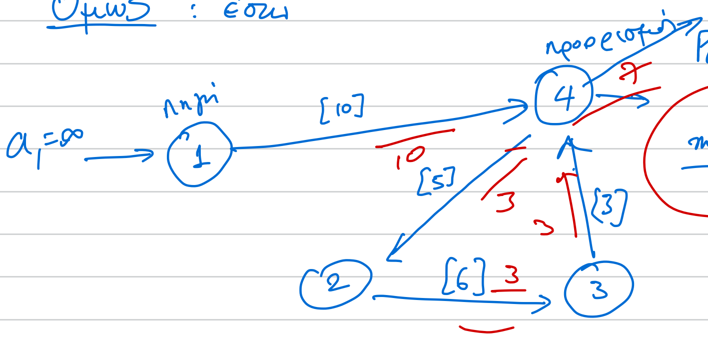
Πρόβλημα max flow ως ΠΓΠ.

$\{x_{ij}\}$

① Αντικ. συνάρτηση : συνολική ποσότητα που εισέρχεται στον προορισμό

π.χ. στο παραπάνω δίκτυο Ο.Κ.

Όμως : έστω



Ροή 1 → 4

max flow = 10

Σύμφωνα με την προηγούμενη μοντελοποίηση:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_{14} + x_{34} \\
& x_{14} \le \infty \\
& x_{23} \le x_{42} \\
& x_{34} \le x_{23} \\
& x_{14} \le 10 \\
& x_{42} \le 5 \\
& x_{23} \le 6 \\
& x_{34} \le 3 \\
& x_{ij} \ge 0
\end{aligned}
$$

$x_{14} = 10$

$x_{42} = 3$

$x_{23} = 3$

$x_{34} = 3$

Εφικτή !!

$x_{14} + x_{34} = 10 + 3 = 13$

Σωστό

$$\max \quad x_{14} + x_{34} - x_{42}$$

! όμοια

βέλτιστη λύση

$x_{14} = 10$

$x_{42} = x_{23} = x_{34} = 0$

Γενικά αν πηγή : 1

προορ : N

πρβ.

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN} - \sum_{j:(N,j)\in E} x_{Nj} \\ x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\ \underline{\text{ισορροπία}} \, : \quad \text{με} \quad a_1 = \infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_1 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_i = b_i = 0 \quad i \neq 1, N \end{cases}$$

Υπάρχουν ειδικοί πιο γρήγοροι αλγόριθμοι (augmenting path: βελτιωμένου μονοπατιού)

3 Προβλήματα Προγραμματισμού Εργασιών.

1. **Νοσοκομείο** $\begin{cases} \text{Βάρδιες προσωπικού} \\ \text{Ανάγκες διαφορετικές ανα ημέρα} \end{cases}$

Κάθε εργαζόμενος εργάζεται 5 συνεχόμενες ημέρες / εβδομάδα.

2. **Τηλ. κέντρο** : Εργάζεται 10 ώρες/ημέρα (5 δίωρα)

Οι εργαζόμενοι : 3 συνεχόμενα δίωρα.

Γενικά:

Ορίζοντας m περιόδων

d_i = ελάχιστος αρ. ατόμων στην περίοδο i, $i=1,\dots,m$

Εργαζόμενοι : n κατηγορίες (βάρδιες) ανάλογα με το ωράριο.

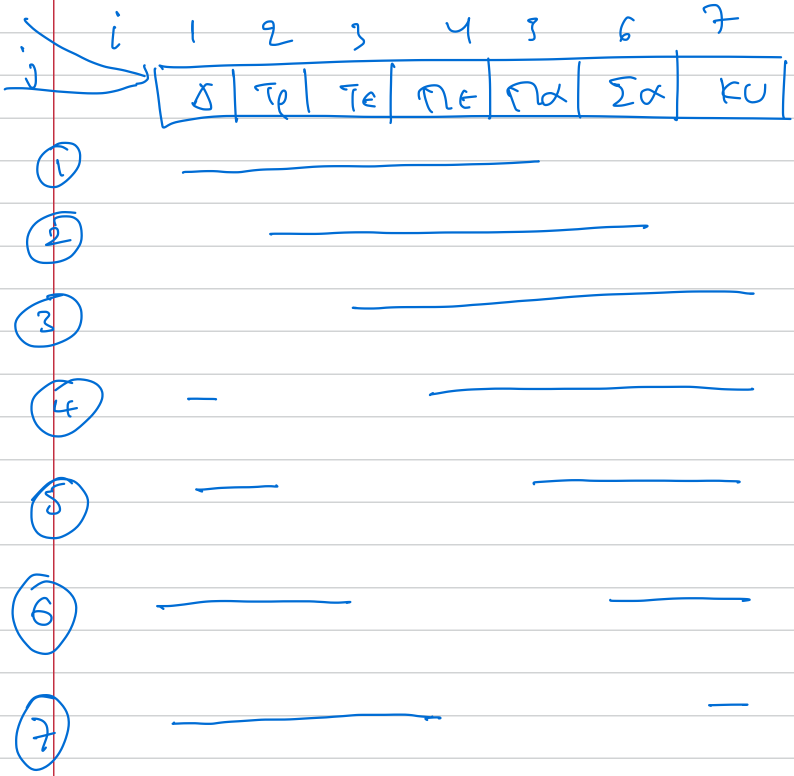
c_j : κόστος ανα εργαζόμενο κατηγορίας j (για όλο τον ορίζοντα)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εργ. κατηγ. } j \text{ είναι διαθέσιμος κατά την περίοδο } i \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Π.χ. Ορίζοντας $m=7$ ημέρες.

Εργαζόμενοι: (βάρδιες)

Δε – Πα 1
Τρ – Σα 2
Τε – Κυ
Πε – Δε
Πα – Τρ
Σα – Τε
Κυ – Πε 7



Π.χ. $a_{11}=a_{14}=a_{15}=a_{16}=a_{17}=1$

$a_{12}=a_{13}=0$

Έστω x_j = αρ. εργαζ. στην κατηγ. j

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0$$

$(x_j \in \mathbb{Z}) \leftarrow$ ξεφεύγει από ΓΠ.

ακέραιος προγραμματισμός (πιο δύσκολα)

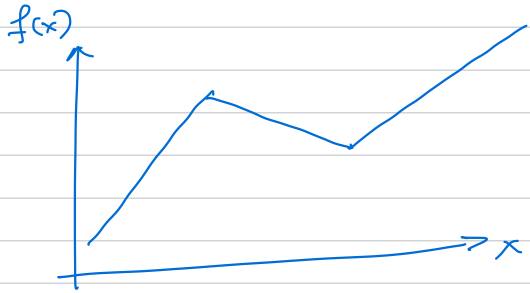
ειδικές περιπτώσεις ΠΓΠ που αποδεικνύεται ότι έχουν ακέραιη βέλτιστη λύση

(το παραπάνω πρόβλημα εμπίπτει εδώ)

το ίδιο κ' με τα προβλήματα σε δίκτυα (αν $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$.)

(4) Τμηματικά Γραμμική Αντικ. Συνάρτηση

π.χ. $x \in \mathbb{R}$



$\min\ (\max)\ f(x)$, $x \in F$ | γενικά δε λύνεται ως ΠΓΠ.

(λύνεται ως προβλ. ακέραιου προγραμματισμού)

Ειδικές περιπτώσεις τμημ. γραμμικών αντικ. συναρτήσεων που επιτρέπουν ΠΓΠ.

f(x) κυρτή ή κοίλη

Έστω $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\max(\min)\ f(x)$
$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ (ΓΜ)

① $f(x) = c'x \quad \forall x \in \mathbb{R}$: γραμμική ✓

② <u>Έστω</u> $f(x) = \min\{d_i'x + e_i \ , \ i = 1, \dots, k\}$

όπου $d_i \in \mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathbb{R}$ $\quad i = 1, \dots, k$.

$d_i'x + e_i$ = αφφινική συνάρτηση

$f(x)$: τμηματικά γραμμική (piecewise linear)

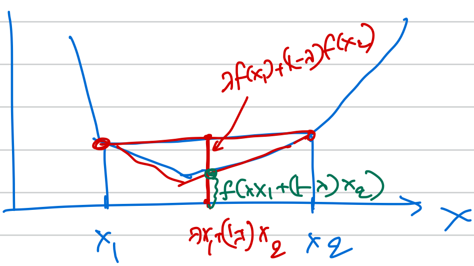
<u>Παρένθεση</u> $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή

αν $\quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

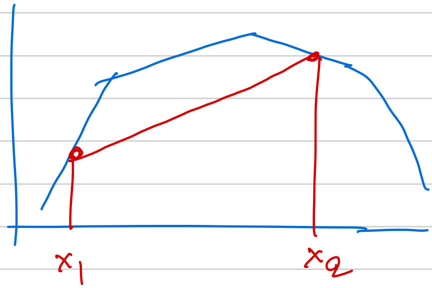
$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$\forall\ \lambda \in [0,1]$.

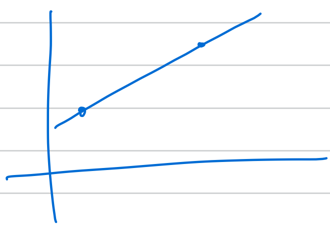
$n=1$



Κοίλη $\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

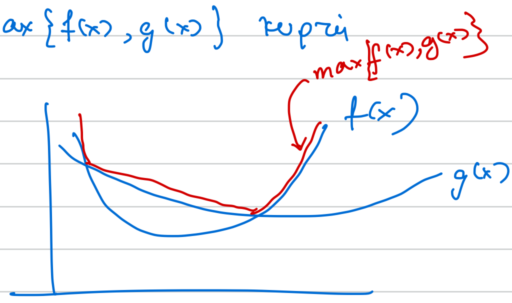


ⓐ $f(x) = a + b'x$ και κυρτή και κοίλη

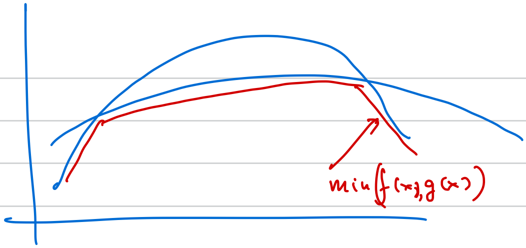


ⓑ αν $f(x), g(x)$ κυρτές

$\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\}$ κυρτή



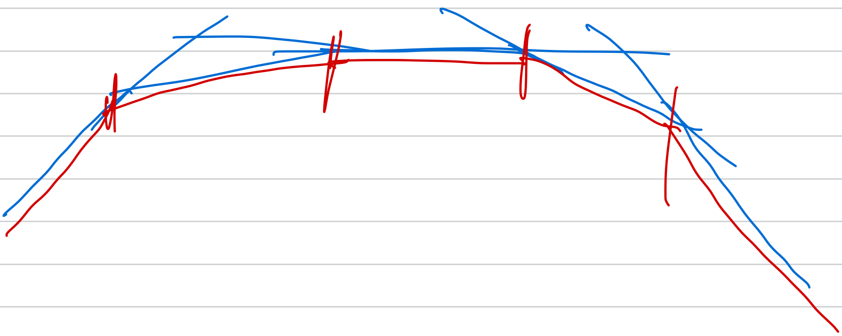
ⓒ αν $f(x), g(x)$ κοίλες $\Rightarrow \min\{f(x), g(x)\}$ κοίλη



$$f(x) = \min\{d_i' x + e_i \ , \ i=1,\dots,k\} \leftarrow \text{κοίλη}$$

$$f(x) = \max\{d_i' x + e_i \ , \ i=1,\dots,k\} \leftarrow \text{κυρτή.}$$

$k < \infty$ $f(x)$ είναι τμηματικά γραμμική

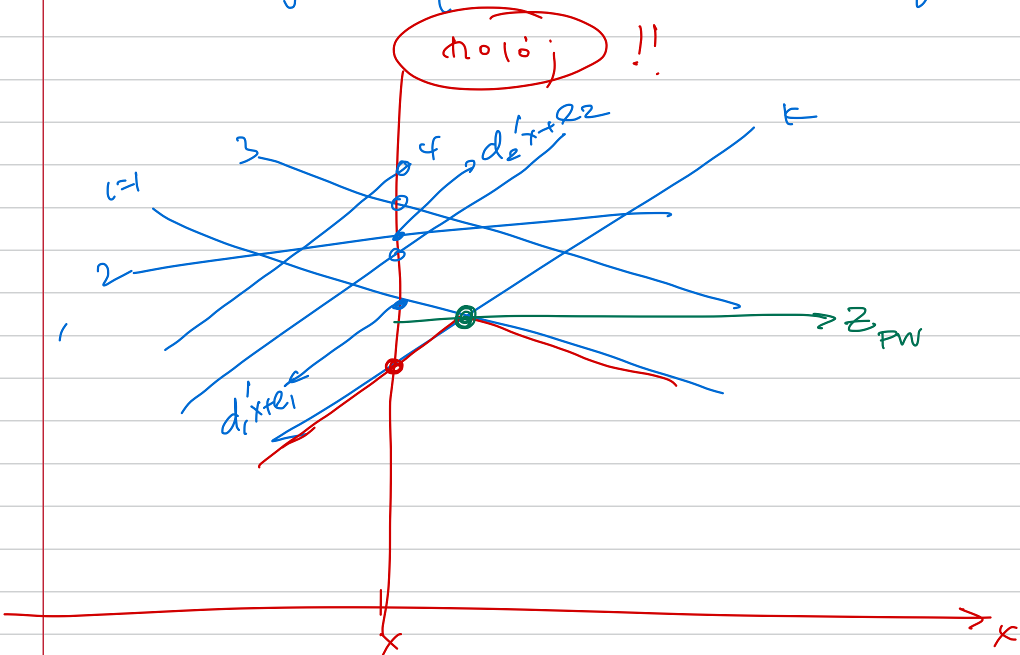


Έστω $f(x) = \min\{d_i' x + e_i \ , i=1,\dots,k\}$

$f(x)$ τμ. γραμμική – κοίλη

<u>Παρατήρηση</u> : $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (fixed)

η $f(x)$ προκύπτει ως λύση ενός ΠΓΠ·



Αν $f(x) = z \Rightarrow$

$$z \le d_1'x + e_1$$
$$z \le d_2'x + e_2$$
$$\vdots$$
$$z \le d_k' \le e_k.$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \max & z & \\ & z \le d_i' x + e_i & i = 1, \dots, k. \\ & z \in \mathbb{R} & \end{bmatrix}$$

πηγή διάστασης $(k \times 1)$

Γενικά $\min(a, b) = \max\{z : z \le a, z \le b\}$

Έστω $z_{PW} = \max_x f(x)$, $Ax = b$, $x \ge 0$ $\Big\}$ πηγή?

Έστω $z_{LP} = \max_{z \in \mathbb{R}, \, x \in \mathbb{R}^n} z$

υ.π. $Ax = b$

$z \le d_i' x + e_i \quad , i = 1, \dots, k.$

$x \ge 0$

Θ.δ.ο. $z_{LP} = z_{PW}$