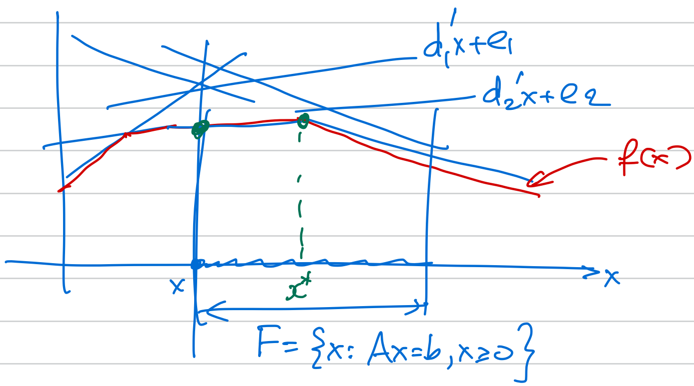
4-3-2024

$$\max f(x)$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \min \{ d_i' x + e_i \ , \ i = 1, \dots, K \}$$
$$d_i \in \mathbb{R}^n, \quad e_i \in \mathbb{R}.$$



$$f(x) = \max_z z$$
$$z \leq d_i' x + e_i \ , \ i = 1, \dots, K$$
$$(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$z_{PW} = \max f(x) \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

$$z_{LP} = \max_{(x,z)} z \quad z \leq d_i' x + e_i \ , \ i = 1, \dots, K \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

Ν.δ.ο. $\quad z_{LP} = z_{PW}$

Λήμμα Αν το πρόβλημα z_{LP} έχει βέλτιστη λύση (x^1, z^1). Τότε ισχύει $z^1 = f(x^1)$

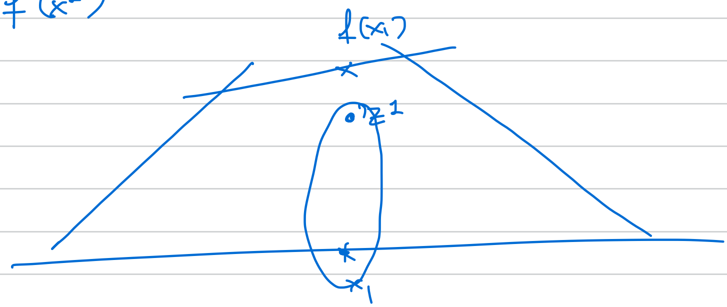
Απόδειξη

(z^1, x^1) εφικτή στο z_{LP} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow z^1 \le d_i' x^1 + e_i, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow z^1 \le \min_{i=1,\dots,k} (d_i' x^1 + e_i) \Rightarrow z^1 \le f(x^1)$$

Έστω $z^1 < f(x^1)$



Έστω μια άλλη λύση (x_1, z_1'), $z_1' = f(x_1)$

Η (x_1, z_1') εφικτή

Επίσης $\underline{z_1' > z_1}$ } άτοπο γιατί (x_1, z_1) βέλτιστη λύση του LP

Επομένως $z_1 = f(x_1)$

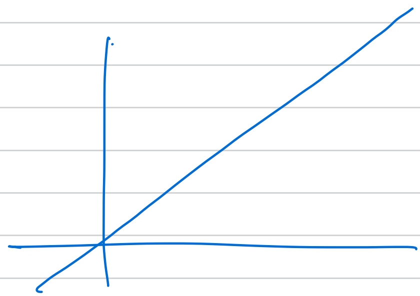
Θεώρημα

Αν ένα από τα z_{PW}, z_{LP} έχει βέλτιστη λύση τότε έχει και το άλλο, και οι δύο βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται στο διάνυσμα x κ' $z_{LP} = z_{PW}$.

Παρατήρηση Μπορεί να μην υπάρχει βέλτιστη λύση

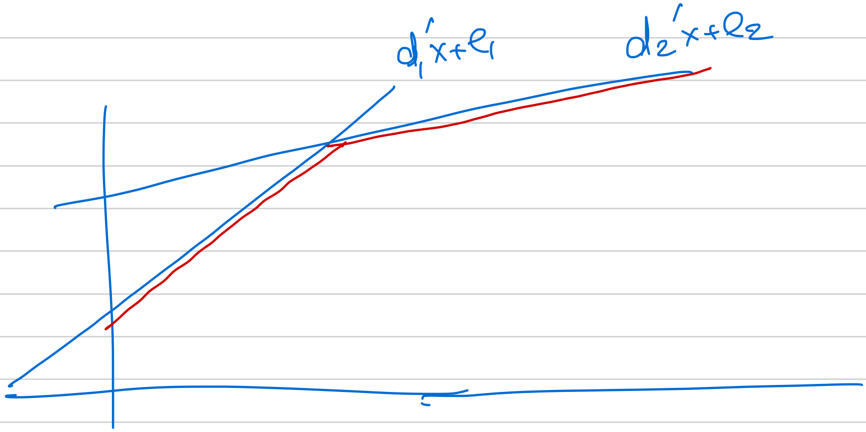
π.χ. $f(x) = 2x$

(1)



$$\max_{x \geq 0} f(x)$$

(2)



$$\max_{x \geq 0} f(x) = +\infty$$

Απόδειξη

(1) Έστω ότι το z_{PW} έχει βέλτιστη λύση x^0

και $z_{PW} = f(x^0)$.

Τότε $f(x^0) = \min\{d_i' x^0 + e_i \ , \ i=1,\dots,k\}$

$\Rightarrow z_{PW} \le d_i' x^0 + e_i \ , \ i=1,\dots,k.$

Επίσης $\left.\begin{array}{l} Ax^0 = b \\ x^0 \ge 0 \end{array}\right\}$ x^0 εφικτή λύση του z_{PW}

$\Rightarrow (x^0, z_{PW})$ εφικτή λύση του z_{LP}

$\Rightarrow z_{PW} \le z_{LP}$

Έστω $z_{PW} < z_{LP}$, Τότε έστω (x', z') βέλτιστη λύση του z_{LP} $\Rightarrow z' = f(x')$.

Όμως x^1 : $\begin{array}{l} Ax' = b \\ x' \ge 0 \end{array}$

από λήμμα $z^1 = f(x^1) > z_{PW}$ άτοπο γιατί

η z_{PW} = βέλτιστη τιμή της $f(x)$ για $\begin{array}{l} Ax = b \\ x \ge 0 \end{array}$

άτοπο $\Rightarrow$ $z_{PW} = z_{LP}$.

Έστω z_{LP} έχει βέλτιστη λύση (x^1, z^1)

οπότε $z^1 = f(x^1) = z_{LP}$

Η x^1 εφικτή λύση του z_{PW} $\{Ax^1 = b,\ x^1 \geq 0\}$

επομένως $f(x^1) \leq z_{PW} \Rightarrow z_{LP} \leq z_{PW}$

Αν $z_{LP} < z_{PW}$

Έστω άλλη λύση του z_{PW} : x^0 : $\begin{array}{l} Ax^0 = b \\ x^0 \geq 0 \end{array}$

και $f(x^0) > z_{LP}$

$\Rightarrow$ $(x^0, f(x^0))$ εφικτή λύση του z_{LP}

$\left(\begin{array}{l} Ax^0 = b \\ x^0 \geq 0 \end{array} \right.$

$\underset{(2)}{\underline{f(x^0)}} \leq d_i' x + e_i \quad , i = 1, \ldots, k.$

και καλύτερη αντικ. από την (x^1, z^1)

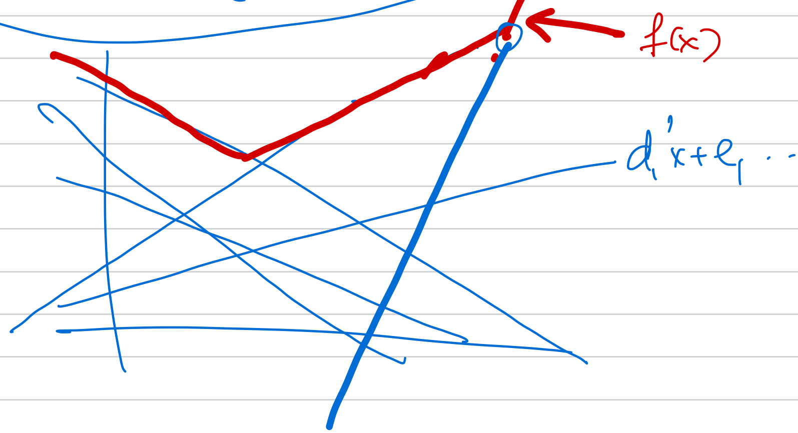
άτοπο γιατί (x^1, z^1) βέλτιστη λύση του z_{LP}

$\Rightarrow$ $z_{LP} = z_{PW}$

Παρατηρήσεις

① Τμημ. γραμμική κυρτή συνάρτηση

$$f(x) = \max\{d_i'x + e_i \,,\ i=1,\dots,k\}$$



$$z_{PW} = \min f(x) \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad z_{LP} = \min z$$
$$Ax=b \qquad\qquad\qquad\qquad z \geq d_i'x + e_i \,,\ i=1,\dots,k$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

---

② Πρβ. 1.

$$\max_x \left\{ \min_i \,(d_i'x + e_i) \right\}$$

maximin

Πρβ. 2

$$\min_x \left\{ \max_i \,(d_i'x + e_i) \right\}$$

minimax.

$\downarrow$ LP

Αν έχουμε $\min_{x} \left\{ \min_{i} (d_i' x + e_i) \right\}$ δεν μορφοποιείται ως LP.

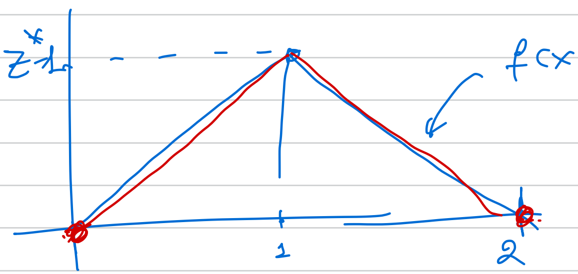
π.χ.

$$
\left.\begin{aligned}
z_{LP} = \min\ & z \\
& z \le d_i' x + e_i \ , \ i = 1, \dots, k \\
& Ax = b \\
& x \ge 0
\end{aligned}\right\} \ ?
$$

π.χ. έστω $f(x) = \min\{x, 2-x\} \ (= 0) \quad x \in \mathbb{R}$

$x^* = 0$, ή 2

$$
= \begin{cases} x & , x \le 1 \\ 2 - x & , x \ge 1 \end{cases}
$$



z_{PW} $\quad \max \left(f(x) , \ 0 \le x \le 2 \right) = 1 \ , \quad x^* = 1$

$$
\left.\begin{aligned}
\max\ & z \\
& z \le x \\
& z \le x - 2 \\
& 0 \le x \le 2
\end{aligned}\right\} \overset{\text{(simplex)}}{\Longrightarrow} (x^*, z^*) = (1, 1)
$$

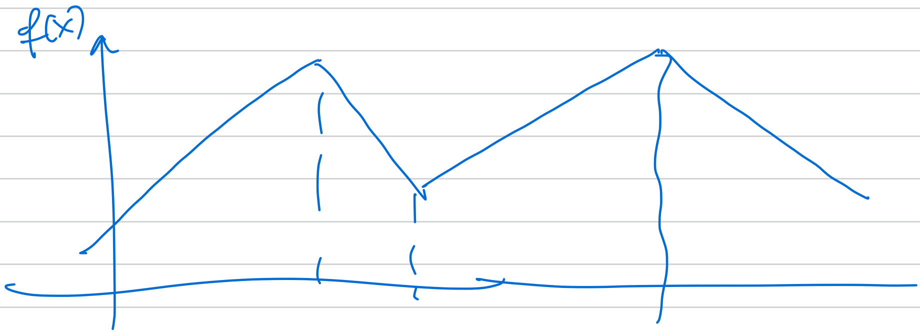
Όμως $\displaystyle \min_{(x,z)} z$

$$\left.\begin{array}{l} z \le x \\ z \le x-2 \\ 0 \le x \le 2 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad z^* = -\infty$$

μη φραγμένο

$$\min\{f(x) : 0 \le x \le 2\} = 0, \quad x^* = 0 \text{ ή } 2$$

③ Γενική περίπτωση f: τμηματικά γραμμική γενικά



Δεν γίνεται με LP

(γίνεται με ακέραιο προγραμματισμό)

(4) Ερμηνεία

Παράδειγμα Πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους

x : μεταβλητές (απόφαση)

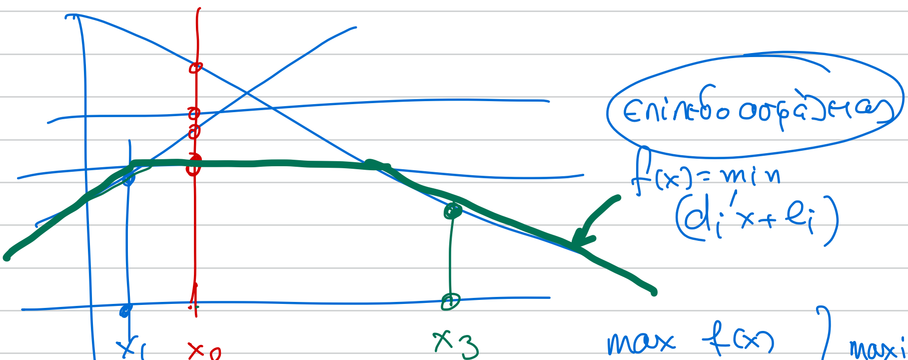
$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \text{περιορισμοί}$$

Το κέρδος δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων

Υπάρχουν k δυνατές περιπτώσεις

Αν συμβεί η περίπτωση i $(i=1,\dots,k)$

τότε το κέρδος θα είναι $d_i'x+e_i$



$$\left.\begin{array}{l} \max f(x) \\ Ax=b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{maxi} \\ \text{min} \end{array}$$

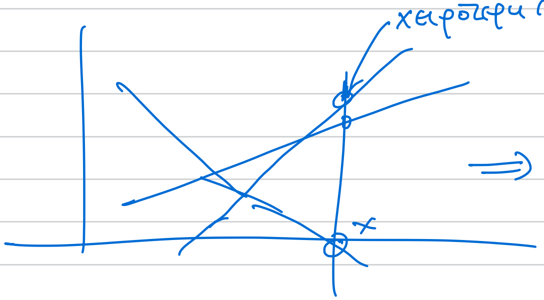
Μοντελοποίηση

(1) Πιθανότητες : κατανομή στο κέρδος ←

(2) **Χειρότερη δυνατή περίπτωση**

αν <u>θέλουμε ελαχ. κόστους</u>

η χειρότερη περίπτωση $f(x) = \max(d_i x + e_i)$



$\Rightarrow$ <u>minimax</u>

5

Προβλήματα Προσέγγισης Στόχων
(Goal Programming Problems)

Έστω ένα πρόβλημα απόφασης $x \in \mathbb{R}^n$

εφικτή περιοχή :

στόχοι

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \boxed{\alpha_i' x = b_i}, \; i = 1, \dots, k \\ \alpha_i \in \mathbb{R}^n, \; b_i \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Έστω ότι $F = \emptyset$ (ανέφικτο πρόβλημα)

όμως $F' = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \; x \geq 0 \} \neq \emptyset$

Οι περιορισμοί F' θεωρούνται <u>απαραίτητοι</u> (ανελαστικοί)

αλλά οι $\alpha_i' x = b_i$, $i = 1, \dots, k$ είναι <u>ελαστικοί</u>

(Επιτρέπεται να παραβιαστούν με μια ποινή/κόστος)

Έστω ο στόχος i : $a_i' x = b_i$

Γραμμικά κόστη παραβίασης

$$E_i(x) = \text{Κόστος παραβίασης} = \begin{cases} p_i(a_i'x - b_i), & a_i'x > b_i \\ q_i(b_i - a_i'x), & a_i'x < b_i \end{cases}$$

<u>Παρένθεση</u>

$w \in \mathbb{R}^+$

w^+ = θετικό μέρος

$= \max(w, 0) = \begin{cases} w, & w \geq 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases}$

w^- = αρνητικό μέρος

$= -\min(w, 0) = \begin{cases} -w, & w \leq 0 \\ 0, & w \geq 0 \end{cases}$

<u>$w^+, w^- \geq 0$</u>

$2^+ = 2$, $2^- = 0$, $(-2)^+ = 0$, $(-2)^- = 2^+ = 2$

$w^- = (-w)^+$

Ταυτότητες:

$w^+ w^- = 0$

$w^+ + w^- = |w|$ $\quad \forall w \in \mathbb{R}$

$w^+ - w^- = w$

Πρόβλημα Goal Programming:

$$z_{GP} = \min \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(x)$$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$\varepsilon_i(x) = p_i \underline{(a_i'x - b_i)^+} + q_i (a_i'x - b_i)^-$$

$$= p_i \cdot \underline{(a_i'x - b_i)^+} + q_i \underline{(b_i - a_i'x)}^+$$

$$\varepsilon_i(x) = p_i \underbrace{\max(a_i'x - b_i, 0)}_{\text{τμ. γρ. κοίλη}} + q_i \underbrace{\max(-a_i'x + b_i, 0)}_{\text{τμ. γρ. κοίλη.}}$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_i(x)$ τμ. γρ. κοίλη.

Παρένθεση

$$\max(\alpha, \beta) + \max(\gamma, \delta) = \max(\alpha+\gamma, \alpha+\delta, \beta+\gamma, \beta+\delta)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(x) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p_i \max(a_i'x - b_i, 0) + \sum_{i=1}^{k} q_i \max(-a_i'x + b_i, 0)}_{\text{τμ. γραμ. κοίλη}}$$

$$= \max\left(\underbrace{d_i'x + e_i}, \; i = 1, \ldots, 2^k\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} z_{GP} = \min \sum \varepsilon_i(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{minimax}$$

Εναλλακτική Μοντελοποίηση

Ανελαστικοί περιορισμοί:

$$a_i'x - u_i + v_i = b_i \quad (*), \quad u_i, v_i \geq 0$$

$\forall x$: $\exists$ άπειρα ζεύγη (u_i, v_i) ικανοπ. ⊛

$a_i' x = 5$

$b_i = 8$

$$\begin{array}{ccccc} & u_i & & v_i & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 5 & -\,0 & + & 3 & = 8 \\ 5 & -\,2 & + & 5 & = 8 \\ 5 & \boxed{-\,7 & + & 10} & = 8 \end{array}$$

Γενικά: $u_i = (a_i' x - b_i)^+ + \lambda$ $\quad \forall \lambda \geq 0$.

$v_i = (b_i - a_i' x)^+ + \lambda$

Έστω LP:

$$z_{LP} \quad \min \sum_{i=1}^{k} (p_i u_i + q_i v_i)$$

$$A x = b$$

$$x \geq 0$$

$$a_i' x - u_i + v_i = b_i \quad , i = 1, \dots, k.$$

1 Z_{LP} Εφικτό λύση

$$Z_{LP} = Z_{GP}$$