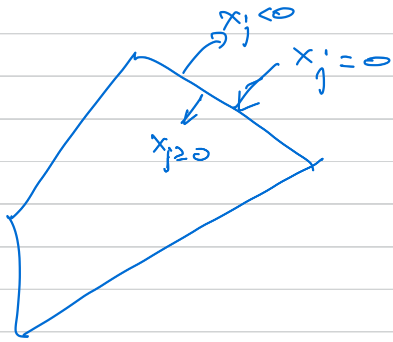
2024-03-20

$Ax=b \rightarrow$ υπερεπίπεδο

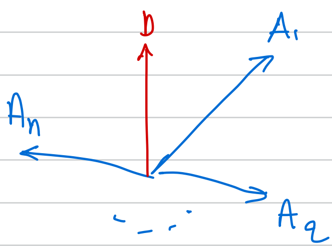
$x\geq 0 \rightarrow$ όρια εφικτής περιοχής



$Ax=b \iff \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$ $\quad A_j : j^{\text{οστή}}$ στήλη του A

$r(A)=m<n$

$m=2$



Βασικές (Εφικτές) Λύσεις
Βασικοί Πίνακες

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0 \}$$

$$r(A) = m < n \quad , \quad b \geq 0 .$$

Για $x \in \mathbb{R}^n$: $\quad I^+(x) = \{ j : x_j > 0 \}$

$$I^-(x) = \{ j : x_j < 0 \}$$

$I^+(x) \cup I^-(x) \cup I^0(x) = \{1, \ldots, n\}$ $\qquad I^0(x) = \{ j : x_j = 0 \}$

Για $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε $A_I = (A_j , j \in I)$

π.χ. $I = \{1, 3, 7\}$, $A_I = (A_1 \; A_3 \; A_7) \in \mathbb{R}^{m \times |I|}$

<u>Ορισμός 1</u> $x \in \mathbb{R}^n$: βασική λύση του $Ax = b$

αν :

i) $Ax = b$

ii) $A_{I^+(x) \cup I^-(x)}$: γραμμικά ανεξάρτητες στήλες

Ορ. 2 $x \in \mathbb{R}^n$: <u>βασική εφικτή λύση</u> (ΒΕΛ)

αν $x \in \mathbb{R}^n$ βασική λύση και $x \geq 0$

Παρατηρήσεις

① Αν x : βασική λύση τότε

$$k = |I^+(x) \cup I^-(x)| \leq r(A) = m$$

Αν A : 7×10 μπορεί $I = |I^+ \cup I^-| = 9$?

τότε A_I : 7×9 ? γρ. ανεξ. στήλες

② Αν $k = m \Rightarrow A_I = B$ $(m \times m)$

$$\det(B) \neq 0 \Rightarrow \exists \; B^{-1}$$

Επίσης οι στήλες του B αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^m$

(B : βασικός πίνακας, x : βασική λύση)

③ Αν $k < m$ $A_I = \overset{n \times}{(A_1, \ldots, A_k)}$ $m \times k$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{γρ. ανεξάρτητα διανύσματα} \in \mathbb{R}^m}$

$A_{B(1)} \ldots A_{B(k)}$

Τότε υπάρχουν επιπλέον $m-k$ στήλες του A

$B(k+1), \ldots, B(m)$

Έτσι ώστε $B = A_B = \left(A_{B(1)} \cdots A_{B(m)}\right)$: βάση του $\mathbb{R}^m$

③ Ισοδύναμος ορισμός για βασική λύση

x Βασική λύση αν $\exists$ δείκτες $B(1), \ldots, B(m) \in \{1, \ldots, n\}$

ώστε

(i) $A_{B(1)} \cdots A_{B(m)}$ γρ. ανεξάρτητες

ii) $I^+(x) \cup I^-(x) \subseteq \{B(1), \ldots, B(m)\}$

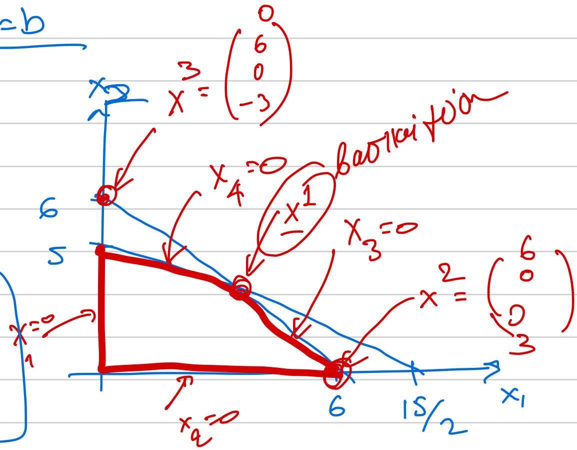
<u>Ορισμός 3</u> Ένας υποπίνακας $B = (A_{B(1)}, \ldots A_{B(m)})$ βασικός πίνακας ή βάση αν $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ γρ. ανεξάρτητα (βάση του $\mathbb{R}^m$)

<u>Ορισμός 4</u> Μια βασική λύση x είναι <u>μη εκφυλισμένη</u> (nondegenerate) αν $|I^+(x) \cup I^-(x)| = m$

αν $|I^+(x) \cup I^-(x)| < m \Rightarrow$ <u>εκφυλισμένη</u>

Παράδειγμα $Ax=b$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$



$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ 2x + 3x_2 \quad + x_4 &= 15 \end{aligned}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$

Βασικοί πίνακες

① $B^1 = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

βασική λύση $x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \} \text{ βασικές} \\ \} \text{ μη βασικές} \end{matrix}$ } συνιστώσες του x. (μη εκφυλισμένη)

$Ax=b$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

② $x^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = (A_1 \; A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ παραμ. ανεξ.

→ βάση του $\mathbb{R}^2$

x^2: βασική λύση (μη εφικτή).

③ $B = (A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ βάση

βασική λύση

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 6 \\ 3x_2 + x_4 = 15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x_2 = 6$$
$$x_4 = -3$$

$x_1 = 0 \Rightarrow$ καθ. άξονας

$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6.$

Παράδειγμα 2

$$2x_1 + x_2 \le 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 24$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 30$$

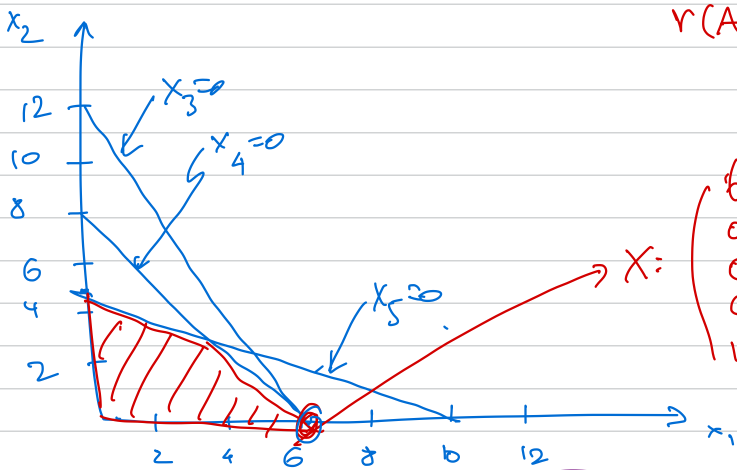
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_4 = 24$$
$$3x_1 + 6x_2 + x_5 = 30$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m=3$

$n=5$

$r(A)=3$



$$X: \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$ μη βασ

(1) $B = (A_1, A_2, A_5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $|B| \neq 0$

$x_3 = x_4 = 0$ μη βασικές

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

ποιο σημείο;

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

μη βασικές

βασικές συνιστώσες

$|I^+(x) \cup I^-(x)| = 2 < m = 3$

$\Rightarrow$ x εκφυλισμένη ΒΛ

2

$$B = (A_1, A_3, A_5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(x_2 = x_4 = 0)$

$|B| \neq 0$ βάση

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

μη βασικές

βασικές

Παράδ. 3

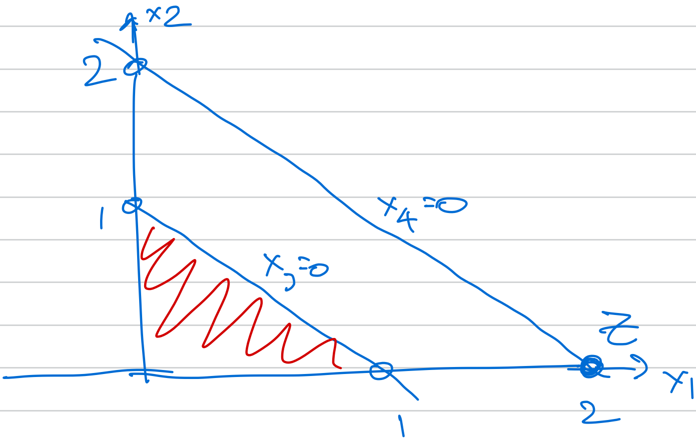
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2$$



① $B = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ βασικός πίνακας

$x_2 = 0, \; x_4 = 0 \quad (Z)$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Βασική λύση
μη εκφυλισμένη
μη εφικτή

② $B = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

$|B| = 0$ όχι βασικός πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έστω x = βασική λύση

B : αντίστ. βασικός πίνακας

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{pmatrix}$$

x_B : βασικές συνιστώσες

x_N : μη βασικές

Τότε $x_N = 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$

$x_B \in \mathbb{R}^m$

$x_B = ?$

$$Ax = b \iff \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

$$\iff \sum_{j \in B} x_j A_j + \sum_{j \in N} x_j A_j = b$$

$\forall j \in N \quad x_j = 0$

$$\iff \sum_{j \in B} x_j A_j = b \iff$$

$$B x_B = b \iff x_B = B^{-1} b$$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n-m \end{matrix}$$

Γενικά

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{B}_{m\times m} & \underbrace{N}_{m\times(n-m)} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n-m \end{matrix}$$

$$Ax = Bx_B + Nx_N \quad (\text{γενικά})$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

Αν B αντιστρ. $\Leftrightarrow$ $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$