8-4-2024

1) $\boxed{F=\emptyset \text{ ? Αν όχι μια αρχική ΒΕΛ}}$

2) ∃ εκφυλισμένες ΒΕΛ.

---

① Παράδ.

ΒΕΛ $\iff$ $\boxed{B: \text{βασικός πίνακας τ.ω. } B^{-1}b \geq 0}$: B^{-1} ∃

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & I_{m\times m} & - & - & - \end{bmatrix}$$

$B=I$, $B^{-1}b = b \geq 0$

Ⓐ Αν στις στήλες του A εμφανίζεται ο $I_{m\times m}$ τότε $F \neq \emptyset$ κ' η λύση $x=b$ είναι εφικτή ΒΕΛ.

π.χ. πγπ.

$$\left.\begin{aligned} \max\ & 5x_1+3x_2 \\ & x_1+x_2 \leq 7 \\ & 2x_1+3x_2 \leq 20 \\ & x_1+2x_2 \leq 15 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}\right| \quad \overset{\text{κΜ}}{\iff}$$

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 15$$

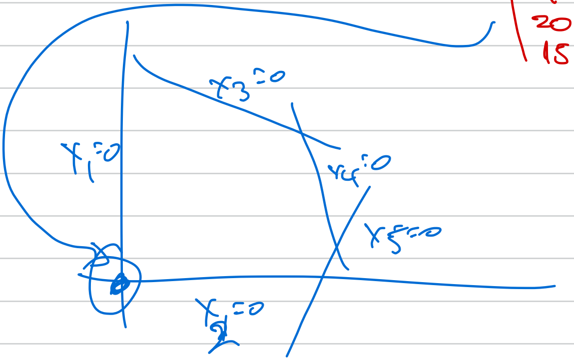
$$x_1 \,.\, - - - - \, x_5 \geq 0$$

$$A_{3x5} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{B}$$

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$B = (A_3\ A_4\ A_5) \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$



Ⓑ Έστω ότι εμφανίζονται κάποιες στήλες του I
αλλά όχι όλες

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 \qquad [\ ?\ ]$$

(*)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 + y_1 & = 12 \\ x_2 + 3x_4 + x_5 + y_2 & = 9 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \qquad y_1, y_2 \geq 0$$

τεχνητές (artificial)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λείπουν $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Επεκτείνω το πρόβλημα.

Παράδειγμα

Ένα διάνυσμα $x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ εφικτή λύση στο (*)

και $\boxed{y_1=y_2=0}$ τότε η $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$

είναι εφικτή στο αρχικό.

Αν ∄ λύση του $*$: $y_1=y_2=0 \Rightarrow F=\emptyset$

Πρόταση Στο αρχικό πρόβλημα $F \neq \emptyset$

ανν ∃ εφικτή λύση στο $\circledast$ τ.ω. $y_1=y_2=0$

Έστω το πγπ.

$$\left.\begin{array}{ll} z' = \min & y_1+y_2 \\ \text{υ.π.} & \circledast \end{array}\right\}$$

① Εφικτό.

② ∃ αρχική ΒΕΛ, εμφανίζεται ο I

Θεώρημα $F \neq \emptyset$ ανν $z'=0$.

Phase I

② ∃ εκφυλισμένες ΒΕΛ $\quad c=(10,3,0,0,0)$

Π.Χ

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

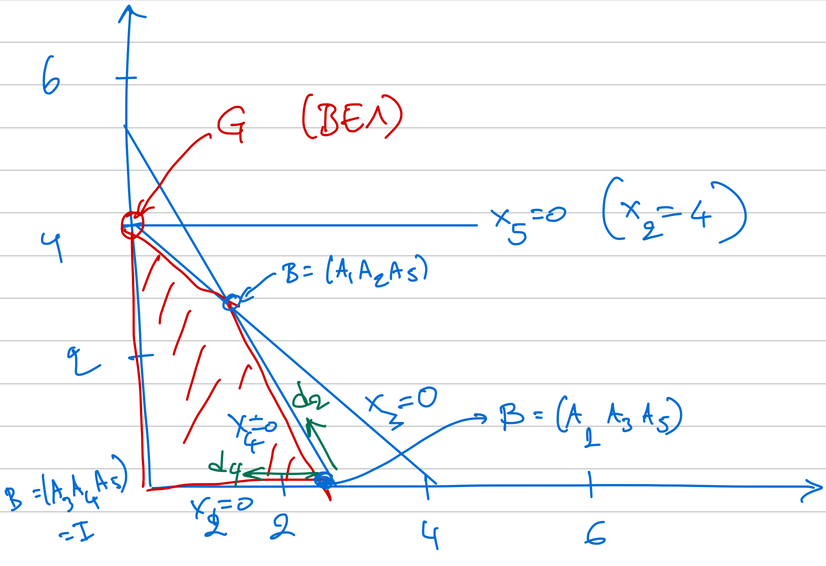
ΚΜ

$$\begin{aligned} & 10x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5 \\ & x_1+x_2+x_3 = 4 \\ & 5x_1+2x_2+x_4 = 11 \\ & x_2+x_5 = 4 \end{aligned}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\;\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I}\right), \quad b=\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$n=5$

$m=3$



x ΒΕΛ (με B) : $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 3x1 \\ \} 2x1 \end{matrix}$

$x_B = B^{-1} b$

G : $\Leftrightarrow$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_2, x_4 βασικές

$x_1 = 0$ $x_2 = 4$

$x_3 = 0$ $x_4 = 3$

$x_5 = 0$

B_1

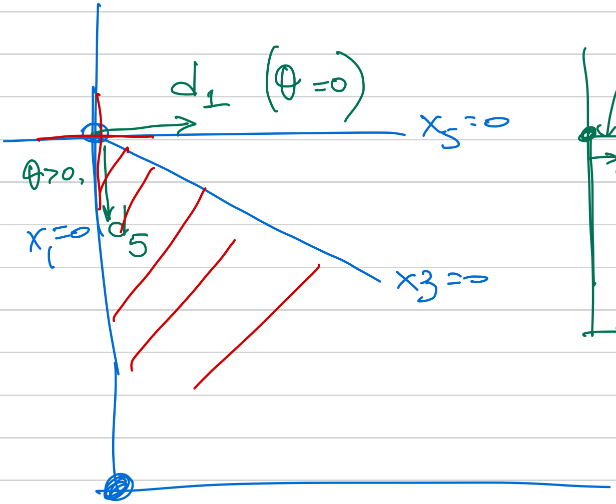
$B_1 = (A_1\ A_2\ A_4)$ $B_2 = (A_2\ A_3\ A_4)$ $B_3 = (A_2\ A_4\ A_5)$

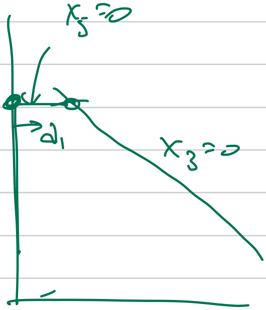
$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{x_1, x_5}$ $\boxed{\text{μη βασικές}}$

Εφικτές κατευθύνσεις : $\underline{d}_1$, d_3





d_5 : οδηγεί στη λύση $(0,0)$

$$d_1 = -B_2^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad c_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1 = c_1 - c_{B_2} B_2^{-1} A_1 = c_1 + c_{B_2} d_1 = 10$$

>0

"βελτίωση"

$$d_5 = -B_2^{-1} A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\bar{C}_5 = -3 < 0}$$

Κινούμαστε στη d_1 $\Rightarrow$ "νέα" ΒΕΛ

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{x_3, x_5 \text{ μη βασικές}}$$

$$\rightarrow B_1 = (A_1, A_2, A_4$$

Στη Simplex

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_2 \\ \leftarrow x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{array}$$

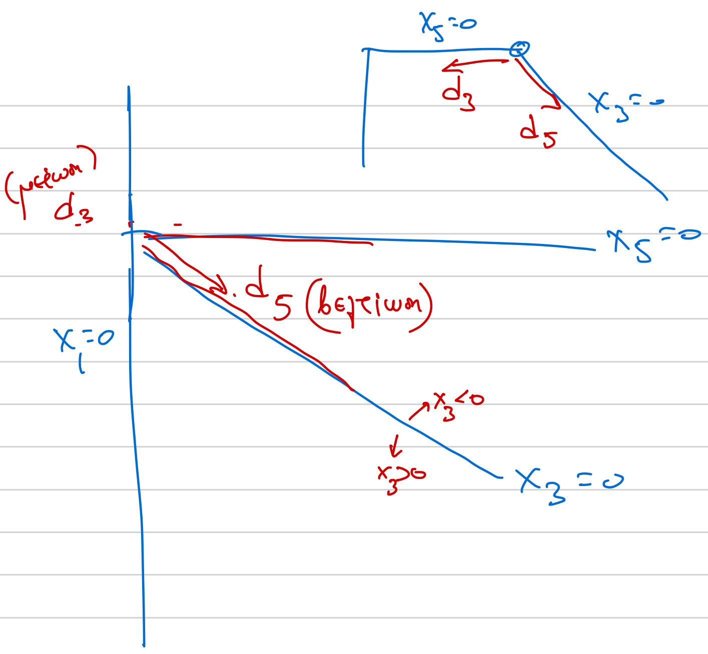
$$\theta = \min\left\{ \frac{x_{Bi}}{d_{ji}} , \; d_{ji} < 0 \right\}$$

$$\min\left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{i=3}}}{\boxed{\frac{0}{1}}} , \frac{3}{5} \right\} = 0 \qquad \boxed{\theta = 0}$$

Νέα λύση

$$\underline{B_1 = (A_1, A_2, A_4)}$$

μη βασικές x_3, x_5



$d_3 = -B_1^{-1} A_B$ $\qquad \bar{c}_3 = -10$

$d_5 = -B_1^{-1} A_5$ $\qquad \bar{c}_5 = 7 \Rightarrow$ νέα ΒΕΛ κατεύθυνση

Cycling

Bland's rule (lexicographic).

Όταν υπάρχουν πολλά j με $\bar{c}_j > 0$

επιλέγουμε το μικρότερο j

Όταν υπάρχων ισοπαλίες στον υπολογισμό

του $$\theta = \min\left\{ -\frac{x_{Bi}}{d_{Bi}} : d_{Bi} < 0 \right\}$$

Επιλέγουμε το μικρότερο i από αυτά που έχουν ίσο λόγο