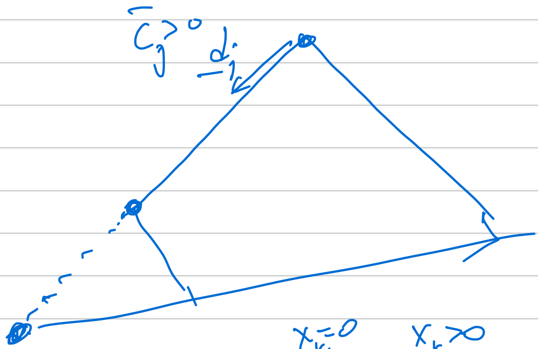
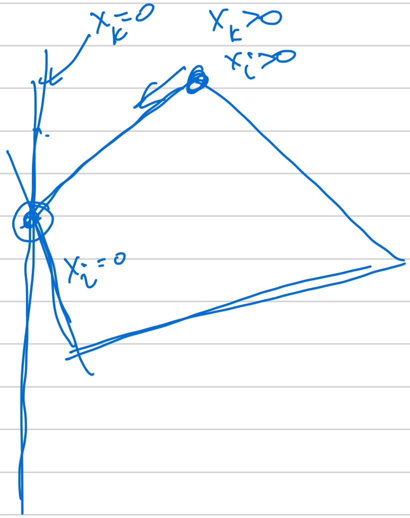
10-4-2024





Βήμα Simplex

x ΒΕΛ , B : πίνακας (βασικός)

υπολ. B^{-1}

$x_B = B^{-1} b$

$\forall j \notin B \quad d_j = -B^{-1} A_j$

$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j$

$\theta = \min\{ \; \cdots \; \}$

$\downarrow$

νέα λύση $\underline{x}'$, πίνακας B'

$(m=4)$

πχ. $B = (A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4)$ $\quad 3 \rightarrow$

$B' = (A_1 \; A_2 \; A_6 \; A_4)$ $\quad 6 \leftarrow$

$$\underbrace{3x_1 + x_2}_{B} + \underbrace{2x_3 + x_4}_{N} = 5 \qquad n=4$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \qquad m=2$$

Π.χ. $B_{2\times 2} = (A_1\ A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\exists B^{-1}$

$$x_B = B^{-1}b \iff Bx_B = b \Rightarrow$$

$$\underline{Bx_B + Nx_N = b} \quad \text{με } x_N = 0$$

$$\iff \underline{B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b}$$

$$(\underbrace{B^{-1}Ax}\ = B^{-1}b)$$

$$\iff \underline{Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b}$$

Π.χ.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrl} x_1 + & & + 3x_3 & - x_4 & = 0 \\ & x_2 & - x_3 & + 2x_4 & = 0 \end{array} \right] \rightarrow \text{φεύγει } (2)$$

Εμφανίση $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

μπαίνει

Modeling

Matlab / R / Python

optim package ?

function linprog $(\boxed{A, b, c})$

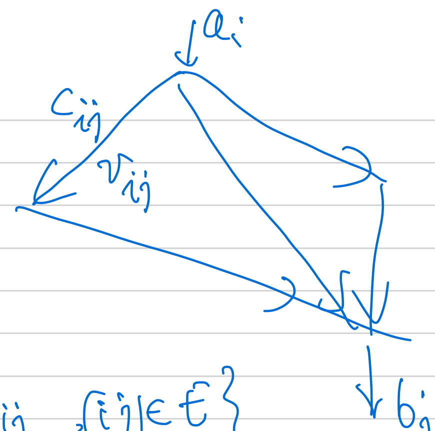
A

π.χ. min $\sum c_j x_j$

Παραγωγή $\sum a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m$

c_j ?

Παρ.2



δίκτυο.

c_{ij} : κόστος
v_{ij} capacity.

$\{c_{ij}, (i,j) \in E\}$

$\{v_{ij}, (i,j) \in E\}$

$\{a_i, b_i\}$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$b_i + \sum_{j \in \text{εξερ}} x_{ij} = a_i + \sum_{j \in \text{εισερ}} x_{ji}$$ (balance)

$$\begin{array}{cc} & \text{ακμές} \\ \text{κόμβοι} & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modeling Language

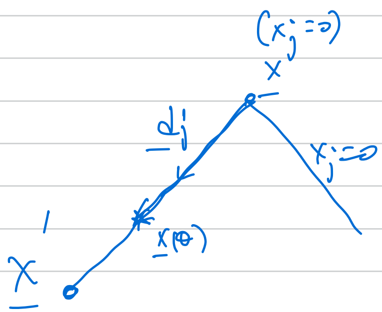
AMPL

GAMS

Οικονομική Ερμηνεία του $\bar{c}_j$

Έχουμε δει ότι αν $\underline{x}$ ΒΕΛ
κ' κινηθούμε σε μια βασική κατεύθυνση d_j
με βήμα θ, η νέα λύση (όχι αναγ. ΒΕΛ)

$$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_B(\theta)+\theta d_B \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$



$f(\underline{x}) = c'x$

Επίσης $\quad f(x(\theta)) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j$

$\bar{c}_j$ = Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ανά μονάδα αύξησης της μη βασικής μετ. x_j κατά την κίνηση στην κατεύθυνση d_j

Ειδικά αν η $\underline{x}$ βέλτιστη $(x_j=0)$ $(\bar{c}_j \le 0)$

$\bar{c}_j$: ρυθμός μείωσης του βέλτιστου κέρδους αν θέλουμε να κρατήσουμε θετική την x_j

Παραδ. 1 $x_1, \ldots, x_n$: ποσότητες παραγωγής

αν $x_j = 0$ στη βέλτιστη λύση τότε

$\bar{c}_j \leq 0$ σημαίνει ότι αν επιμείνουμε

να παραχθεί μια ποσότητα πρ. j,

το βέλτιστο κέρδος θα μειωθεί

κατά $\bar{c}_j$ ανά μονάδα παραγ. ποσότητας

του j.

Παράδειγμα 2

Έστω $x_1, \ldots, x_n$: ποσότητες παραγωγής

περιορισμός $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b$ (ποσότητα υλικού πόρου)

σε ΚΜ $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \underbrace{x_{n+1}}_{} = b$

x_{n+1} = περιθ. μεταβλητή.

x_{n+1} = αδιάθετη ποσότητα υλικού

στη λύση $\underline{(x_1, \ldots, x_n)}$

Έστω μια βέλτιστη λύση x^* : $x_{n+1} = 0$

(μη βασική)

$\Rightarrow$ στη βέλτιστη λύση