15-4-2024

$$z_p = \max \; c'x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0.$$

Έστω $L(x,w) = c'x + w'(b - Ax)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$

$$= c'x + \sum_{i=1}^{m} w_i (b_i - a_i' x)$$

$$z_L(w) := \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \ge 0}} L(x,w)$$

Lagrangean relaxation του z_p.

[Σημ. άμεσα : $\max_{x \ge 0} c'x \ge \max_{\substack{Ax \le b \\ x \ge 0}} c'x$]

Λήμμα $z_L(w) \ge z_p \quad \forall \; w \ge 0$

Απόδειξη $z_L(w) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{ L(x,w) : x \ge 0 \}$

$$\ge \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{ L(x,w) : Ax \le b, x \ge 0 \}$$

$$= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c'x + w'(b - Ax) : Ax \le b, x \ge 0 \} \ge$$

$\forall \; x : Ax \le b, \; \forall \; w \ge 0:$

$$[\, c'x + w'(b - Ax) \ge c'x \,]$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \{ c'x : Ax \le b,\ x \ge 0 \} \quad \forall\ w \ge 0$$

$$z_L(w) \ge z_p \qquad \forall\ w \ge 0$$

Έστω το πρόβλημα.

$$z_D = \inf\{ z_L(w) : w \ge 0 \}$$

Δυϊκό πρόβλημα του z_p.

Θεώρημα $\quad z_p \le z_D$

{ Ασθενές θεώρημα δυϊκότητας (weak duality)

Επίλυση του z_D

$$z_L(w) = \max_{x \ge 0} \ c'x + w'(b - Ax)$$

$$z_L(w) = w'b + f_L(w)$$

$$f_L(w) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x \ge 0}} (c' - w'A)x$$

$$f_L(w) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (c_j - w'A_j)\, x_j \;:\; x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n \right\}$$

$$\left(w'A = (w_1 \cdots w_m) \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \right)$$

$$\max \left\{ d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n \;:\; x_1, \dots, x_n \geq 0 \right\}$$

$$\max \left\{ 2x_1 + 3x_2 \;:\; x_1, x_2 \geq 0 \right\} = +\infty$$

$$\max \left\{ 2x_1 - 3x_2 \;:\; x_1, x_2 \geq 0 \right\} = +\infty$$

$$\max \left\{ -2x_1 - 3x_2 \;:\; x_1, x_2 \geq 0 \right\} = 0$$

$$\underline{f_L(w)} = \begin{cases} 0, & \text{αν } \ c_j - w'A_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \\ +\infty, & \text{αν } \ c_j - w'A_j > 0 \ \text{ για κάποιο(α) } j \end{cases}$$

$$z_D = \inf_{w \geq 0} z_L(w) = w'b + \inf_{w \geq 0} f_L(w)$$

$$\Rightarrow \quad z_L(w) = \begin{cases} w'b & : \ c' - w'A \leq 0 \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$z_D = \inf_{w \geq 0} z_L(w) = \inf_{w} \left\{ w'b : \underset{w \geq 0}{c' - w'A \leq 0}, \right\}$$

z_D : ΠΓΠ

$$z_P = \max_{x \in \mathbb{R}^n} c'x \qquad z_D = \min_{w \in \mathbb{R}^m} b'w$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad Ax \leq b \quad x \geq 0$

$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ $\quad A'w \geq c \quad w \geq 0$

$A : m \times n \qquad A' : n \times m$

$HK\text{-}max \qquad HK\text{-}min$

$(A, b, c) \qquad (A', c, b)$

Ερώτηση

Κατασκευάζετε το δυϊκό του z_D

$$z_D = \min b'w \quad = \quad -\max (-b')w$$

$$A'w \geq c \qquad -A'w \leq -c \qquad HK_{max}$$

$$w \geq 0 \qquad w \geq 0$$

$$-HK_{max}(-A', -c, -b)$$

Το δυϊκό του z_D επομένως

$$-HK\min\left((-A')', -b, -c\right)$$

$$= -HK\min\left(-A, -b, -c\right) =$$

$$= -\min_{\substack{-Ax \ge -b \\ x \ge 0}} -c'x \qquad = -\min_{\substack{Ax \le b \\ x \ge 0}} -c'x$$

$$= +\max_{\substack{Ax \le b \\ x \ge 0}} c'x \quad = z_P$$

Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον.

ΠΓΠ **Ζεύγη πρωτεύοντος - δυϊκού**

$$z_{HK\max} \le z_{HK\min}$$

Έστω ότι έχουμε ένα ΠΓΠ σε αυθαίρετη μορφή (όχι ΗΚ)

Για να εκφράσουμε το δυϊκό πρόβλημα:

1) Μετατρέπουμε σε ΗΚmax ⟹ Δυϊκό

2) Απευθείας

Πρωτεύον	max	min	Δυϊκό
	$\leq b_i$	≥ 0	
Περιορισμοί	$\geq b_i$	≤ 0	Μεταβλητές
	$= b_i$	$\in \mathbb{R}$	
Μεταβλητές	≥ 0	$\geq c_j$	Περιορισμοί
	≤ 0	$\leq c_j$	
	$\in \mathbb{R}$	$= c_j$	

Παράδειγμα

$$z_p = \max \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \qquad w_1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \qquad w_2'$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \qquad w_3$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \leq 0, \; x_3 \in \mathbb{R}$$

$x_2' = -x_2$

$x_3 = x_3' - x_3''$

HKmax

$$\max\ 2x_1 - 3x_2' + 4x_3' - 4x_3''$$

$$x_1 + x_2' + 2x_3' - 2x_3'' \leq 7 \qquad w_1$$

$$-2x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' \leq -5 \qquad w_2$$

$$x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' \leq 12 \qquad w_3$$

$$-x_1 + x_2' - x_3' + x_3'' \leq -12 \qquad w_4$$

$$x_1,\ x_2',\ x_3',\ x_3'' \geq 0$$

Δυϊκό
HKmin

$$\min\ 7w_1 - 5w_2 + 12w_3 - 12w_4$$

$$w_1 - 2w_2 + w_3 - w_4 \geq 2$$

$$w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \geq -3$$

$$2w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \geq 4$$

$$-2w_1 + w_2 - w_3 + w_4 \geq -4$$

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4 \geq 0$$

$$12\,\boxed{(w_3 - w_4)}$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 7w_1 - 5w_2 + 12w_3 - 12w_4 \\
& w_1 - 2w_2 + w_3 - w_4 \geq 2 \\
& w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \geq -3 \\
& 2w_1 - w_2 + w_3 - w_4 = 4 \\
& w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 7w_1 - 5w_2 + 12w_3 \\
& w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 2 \\
& w_1 - w_2 - w_3 \geq -3 \\
& 2w_1 - w_2 + w_3 = 4 \\
& w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 7w_1 - 5w_2 + 12w_3 \\
& w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 2 \\
& -w_1 + w_2 + w_3 \leq 3 \\
& 2w_1 - w_2 + w_3 = 4 \\
& w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$w_2' = -w_2$

$$\Updownarrow$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\min & 7w_1 + 5w_2' + 12w_3 \\
x_1 & w_1 + 2w_2' + w_3 \geq 2 \\
x_2 & -w_1 - w_2' + w_3 \leq 3 \\
x_3 & 2w_1 + w_2' + w_3 = 4 \\
 & w_1 \geq 0 \quad w_2' \leq 0, \quad w_3 \in \mathbb{R}.
\end{array}
}
$$