Ισχυρό Θεώρημα Δυικότητας

(P) $z_P = \max \; c'x$

$$F_P \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

(D) $z_D = \min \; b'w$

$$\left.\begin{aligned} A'w &\ge c \\ w &\ge 0 \end{aligned}\right\} F_D$$

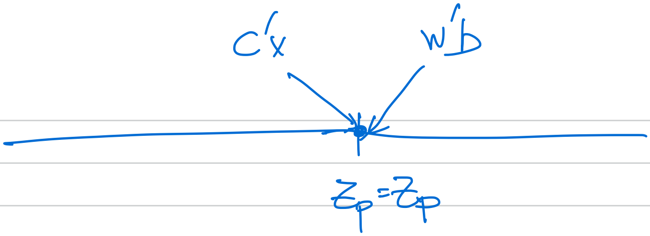
Ασθενές Θεώρημα Δυικότητας $\quad z_P \le z_D$

$$\left.\begin{aligned} \forall\, x \in F_P &: \; c'x \le z_P \\ \forall\, w \in F_D &: \; b'w \ge z_D \end{aligned}\right\} : \; c'x \le z_P \le z_D \le b'w$$

Λήμμα : Αν $x \in F_P$ κ' $w \in F_D$ κ' $c'x = b'w$

$$\Longrightarrow \; c'x = z_P = z_D = b'w$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_P = z_D \\ x \text{ βέλτιστη του } P, \; w \text{ βέλτιστη του } D \end{cases}$$



Ισχυρό Θεώρημα Δυικότητας

Αν ένα από τα P, D έχει βέλτιστη λύση τότε έχει κ' το άλλο και $z_P = z_D$

<u>Απόδειξη</u> Έστω το P έχει β.λ.

το P σε ΚΜ:

$$A_{m\times n},\ m<n \qquad \begin{aligned} z_P &= \max c'x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} z_D &= \min b'w \\ A'w &\geq c \\ w &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \right)$$

Στο P (ΚΜ) το κριτήριο βελτιστότητας:

Έστω x ! ΒΕΛ με βασικό πίνακα B

(αποθ. μη εκφυλισμένη)

$$x_B = B^{-1}b \quad , \quad x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ m \\ \}\ n-m \end{matrix}$$

Αφού η x είναι βέλτιστη:

$$\bar{c}_j \le 0 \qquad j=1,\dots,n$$

όπου $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$ σχετ. κόστος της j

($\bar{c}_j = 0$ για βασικές μεταβλητές)

$$c_j - c_B' B^{-1} A_j \le 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \underbrace{c' - c_B' B^{-1} A \le 0}_{c'}$$

$$\underbrace{\left[\quad c' \quad\right]}_{(c_1 \cdots c_n)} - \overbrace{\underbrace{c_B' B^{-1}}_{(\dots\dots)\ m}}^{1\times m \times (m\times m)} \overbrace{\underbrace{\left[A_1 \cdots A_n\right]}_{m\times n}}^{A}$$

$$\Leftrightarrow A' \cdot \underbrace{(c_B' B^{-1})'}_{w} \ge c$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} A'w \ge c \\ w \in \mathbb{R}^m \end{array} \Rightarrow w \in \bar{F}_D$$

Επίσης

$$c'x = \begin{pmatrix} c_B' & c_N' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N = 0 \end{pmatrix} =$$

$$= c_B' \cdot x_B = \underbrace{c_B' B^{-1}}_{w'} \cdot b = w'b = b'w$$

<u>Επομένως</u>:

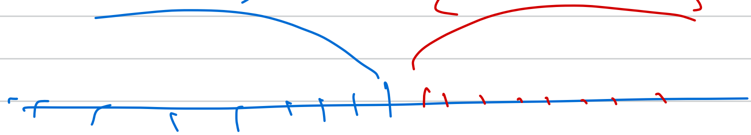
$$\left.\begin{array}{l} x \in F_P \\ w' = c_B B^{-1} \in F_D \\ c'x = b'w \end{array}\right\} \overset{\text{Λήμμα}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{c'x = z_P = z_D = b'w}$$

Έστω ότι τα P, D έχουν βέλτιστες λύσεις

x^* , w^* , $c'x^* = b'w^*$

$\{c'x : x \in F_P\}$ $\{b'w : w \in F_D\}$



$z_P = z_D$

Έστω οποιαδήποτε ΒΕΛ στο P : $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ (B)

(όχι βέλτιστη)

$$c' - \underbrace{c_B' B^{-1}}_{w'} A \not\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w'A \not\geq c' \Rightarrow A'w \not\geq c$$

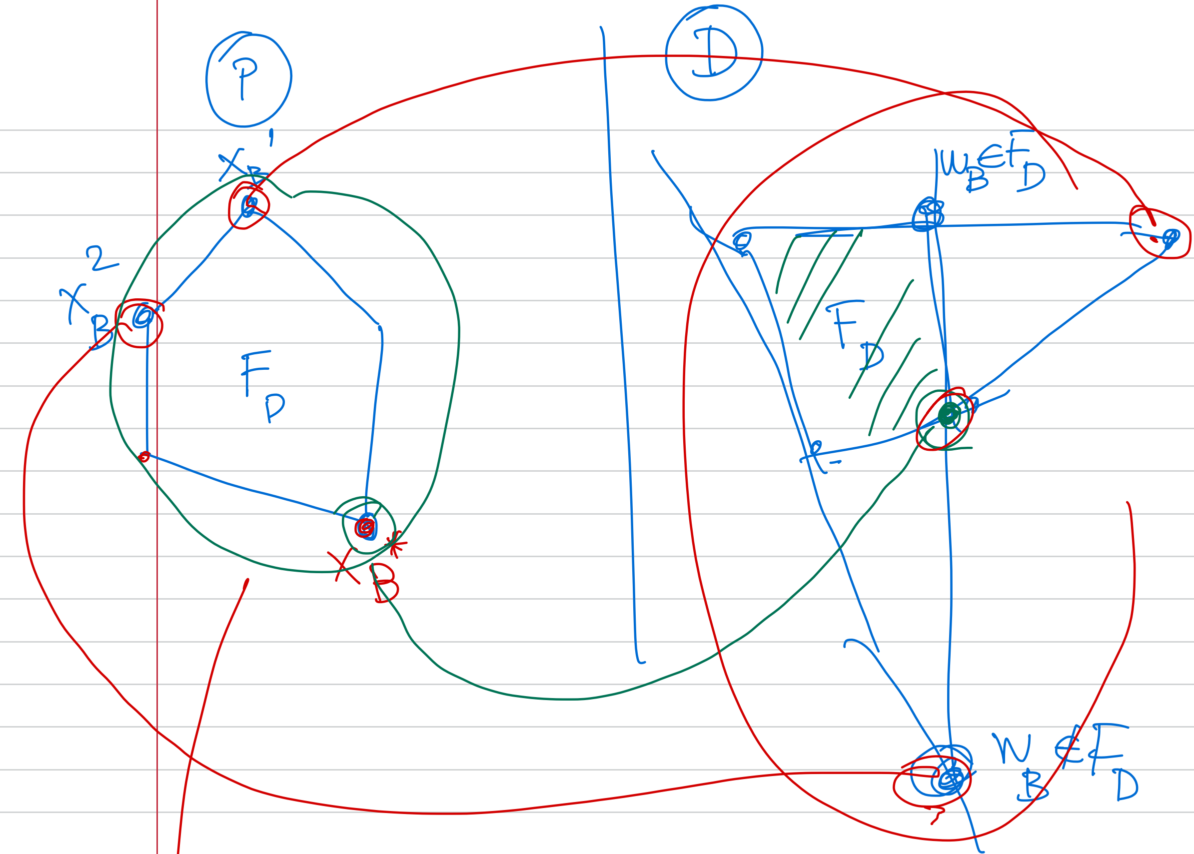
$$w \notin F_D$$

x : primal feasible

but not dual feasible $\Leftrightarrow$ not optimal

εννοούμε

ότι το $w' = c_B' B^{-1} \notin F_D$



primal Simplex method

Δυϊκή μέθοδος Simplex

(dual Simplex method)

Πόρισμα Αν ένα από τα P, D είναι μη φραγμένο τότε το δυϊκό του είναι αδύνατο

Απόδ. Έστω P μη φραγμένο $\begin{cases} F_P \neq \emptyset \\ z_P = +\infty \end{cases}$

$$z_P = \sup\{c'x : x \in F_P\} = +\infty$$

Από ασθ. θεώρημα $(z_P \leq z_D) \Rightarrow z_D = +\infty$

$$\left.\begin{aligned} z_D = \min\ & b'w \\ & A'w \geq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_D = +\infty$$

Έστω $F_D \neq \emptyset \Rightarrow$ Έστω $w \in F_D$

Τότε $b'w < +\infty \Rightarrow z_D < +\infty$ άτοπο

$$\Longrightarrow F_D = \emptyset$$

(Αν D μη φραγμένο $\Rightarrow z_D = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow z_P = -\infty \Rightarrow F_P = \emptyset$)

P \ D	Βέλτιστη λύση	Μη φραγ.	Αδύνατο
Βέλτιστη λύση	✓	✗	✗
Μη φραγ.	✗	✗	✓
αδύνατο	✗	✓	? ✓

∃ παραδείγματα