24-4-2024

Συμπληρωματικότητα – Complementarity

$$z_P = \max c'x \qquad\qquad z_D = \min w'b$$
$$Ax \le b \qquad\qquad w'A \ge c'$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad w \ge 0$$

$$z_P = \max c'x \qquad\qquad z_D = \min w'b$$

$$a_1'x \le b_1 \quad w_1 \qquad\qquad w'A_1 \ge c_1 \quad x_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_m'x \le b_m \quad w_m \qquad\qquad w'A_n \ge c_n \quad x_n$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad w \ge 0$$

Έστω $u_i = w_i(b_i - a_i'x) \quad , i = 1, \ldots, m$

$v_j = x_j(w'A_j - c_j) \ , j = 1, \ldots, n$

Αν x, w εφικτές λύσεις στα P, D αντίστοιχα.

$\Rightarrow \quad u_i \ge 0, \ v_j \ge 0 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n$

Επίσης $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i = w'(b - Ax)$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = (w'A - c')\cdot x$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = w'b - w'Ax + w'Ax - c'x$$
$$= w'b - c'x$$

① $w'b \ge c'x \quad \forall\, w \in F_D,\ x \in F_P \Rightarrow z_P \le z_D$
(ασθ. θεώρημα).

② Έστω ότι οι x, w είναι βέλτιστες λύσεις των P, D αντίστοιχα.

$$\Rightarrow \quad c'x = z_p = z_D = b'w$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \sum u_i + \sum v_j = 0 \\ u_i, v_j \ge 0 \quad \forall\, i, j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$u_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$$
$$v_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Θεώρημα Συμπληρωματικότητας
(Complementarity Theorem)
(Complementary slackness)

Οι x, w είναι βέλτιστες λύσεις των P, D
αντίστοιχα, αν και μόνο αν

$$w_i\,(b_i - a_i' x) = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$(w' A_j - c_j) \cdot x_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$z_p = c'x \qquad\qquad z_p = \max c'x$$

$$a_i' x \le b_i \iff a_i' x + y_i = b_i$$

$$x \ge 0 \qquad\qquad x \ge 0$$

HKM $\qquad\qquad$ KM

$$z_D = \min b'w$$

$$w' A_j - r_j = c_j \;, \; j = 1, \dots, n$$

Comp. Slackness :
$$\boxed{\begin{array}{ll} w_i y_i = 0 & , i = 1, \dots, m \\ x_j r_j = 0 & , j = 1, \dots, n \end{array}}$$

x, w βέλτιστες

$$w_i,\ y_i,\ x_j,\ r_j \geq 0$$

$\Rightarrow$ Αν $x_j > 0 \Rightarrow r_j = 0 \Rightarrow w' A_j = c_j$

Αν $a_i' x < b_i \Rightarrow y_i > 0 \Rightarrow w_i = 0$

Έστω x ΒΕΛ βέλτιστη μη εκφυλισμένη.

$$z_p = \max\ c'x$$
$$a_i' x + y_i = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$
$$x, y \geq 0.$$

Διαστάσεις $m \times (m+n)$ $\qquad y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

(x, y) μη εκφυλ. ΒΕΛ

m μετ. > 0

n μετ. $= 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \#m > 0 \\ \#n = 0 \end{array}$$

Προκύπτουν m γρ. ανεξ. εξισώσεις για w

$\Rightarrow$ w προκύπτει μονοσήμαντα

(όπως η αρχή ξέρουμε $\underline{w = c_B' \cdot B^{-1}}$)

B βασικός πίνακας

Αν x βέλτιστη ΒΕΛ εκφυλισμένη

τότε $B_1, B_2, \ldots, B_k$ βέλτιστοι βασικοί

πίνακες όπου $B_1 x_{B_1} = b$

$\vdots$

$B_k x_{B_k} = b$.

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = c_{B_1}' B_1^{-1} \\ w_2 = c_{B_2}' B_2^{-1} \\ \vdots \\ w_k = c_{B_k}' B_k^{-1} \end{array}\right\}$$

από βελτιστότητα της x

$\Rightarrow$

$\underline{\bar{c}' = c' - c_B' B^{-1} A \leq 0}$

$w_1' b = w_2' b = \cdots = z_D$

$= z_P$

Complementarity Condition

$$\boxed{\begin{aligned} & w_i(b_i - a_i'x) = 0, \quad \forall i \\ & (w'A_j - c_j)\,x_j = 0 \quad \forall j \end{aligned}}$$

ικανές και αναγκαίες ώστε $\left.\begin{array}{l} x \in F_P \\ w \in F_D \end{array}\right\}$ βέλτιστες λύσεις.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Αν } x \in F_P & \Rightarrow & x_j \geq 0 & \forall j \\ & & b_i - a_i'x \geq 0 & \forall i \\ \text{Αν } w \in F_D & \Rightarrow & w_i \geq 0 & \forall i \\ & & w'A_j - c_j \geq 0 & \forall j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} & w_i(a_i'x - b_i) \geq 0 \quad \forall i \\ & (w'A_j - c_j)\,x_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Αν $x \in F_P$, $w \in F_D$ όχι βέλτιστες

$$\sum u_i + \sum v_j > 0$$

$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0 \quad \forall i, j$

complementarity gap. (duality gap)

$$\underbrace{\sum u_i + \sum v_j}_{} = \underbrace{w'b - c'x}_{} \geq 0$$

$\longrightarrow$ primal-dual Simplex