29-4-2024

Έστω $z_P = \max c'x$
$Ax \le b$
$x \ge 0$

πρόβλημα παραγωγής πολλών προϊόντων
$j = 1, \dots, n$

$x_1, \dots, x_n$: ποσότητες παραγωγής

$b_1, \dots, b_m$: διαθέσιμες ποσότητες πόρων παραγωγής

a_{ij} : τεχνολ. συντελ.

$c_1, \dots, c_n$: μοναδιαία κέρδη

$$z_D = \min b'w \qquad w'A \ge c \qquad w \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \min \; b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$$

$$\begin{cases} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 \dots + a_{m1} w_m \ge c_1 \\ \vdots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \ge c_n \\ w_1 \dots \quad w_m \ge 0 \end{cases}$$

$a_{1n+1} w_1 + \dots + a_{mn+1} w_m \ge c_{n+1}$

w_1 : €/μον. πόρου 1
$\vdots$
w_m : €/μον. πόρου m

Έστω εξωτερικός αγοραστής κάνει προσφορά για να αγοράσει τις ποσότητες $b_1, \dots, b_m$ σε τιμές/μονάδα $\boxed{w_1, \dots, w_m \text{ αντίστοιχα}}$

μεταβαλλόμενες

$$\min \; w_1 b_1 + \dots + w_m b_m$$ ← ελάχιστο κόστος αγοράς

Περιορ. $a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \geq c_1$:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow i=1 \\ \\ \\ \leftarrow i=m \end{array} \\ \;\; j=1 & \end{array}$$

Αν ο παραγωγός πωλήσει στον αγοραστή ποσότητες $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}$ από πόρους $1, \dots, m$ αντίστοιχα θα εισπράξει $\alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 + \dots + \alpha_{m1} w_m$

Εναλλακτικά με αυτές τις ποσότητες θα μπορούσε να παράξει μια μονάδα προϊόντος κ' θα είχε κέρδος c_1

Δυϊκό : έννοια ανταγωνισμού

1) Ισχυρό Θεώρημα : $Z_P = Z_D$ ✓

$w_1, \dots, w_m$: "πραγματικές" αξίες των πόρων $b_1, \dots, b_m$ για τον παραγωγό.

(σκιώδεις τιμές των περιορισμών)

shadow price

2) Έστω ότι ο παραγωγός προσθέτει ένα επιπλέον προϊόν στον κατάλογο των προϊόντων του (μαθαίνει να παράγει ένα επιπλέον προϊόν)

$j = \underbrace{1, \dots, n}_{A}, n+1$

b ίδια

$$Z_P' = \max \; c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_{n+1} x_{n+1}$$

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + a_{1n+1} x_{n+1} \le b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + a_{m,n+1} x_{n+1} \le b_m$$

$$x_1 \; \dots \; x_n, \; x_{n+1} \ge 0$$

$$z_p \;\overset{\le}{\underset{\ge}{=}}\; z_{p'} \quad ?$$

Για κάθε εφικτή λύση $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ του z_p

$x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$ εφικτή στο z_p'

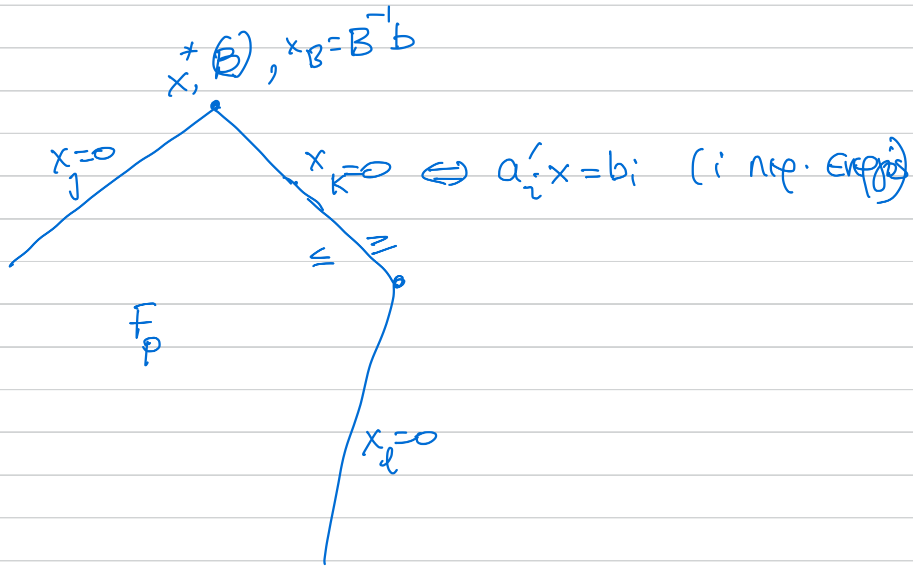
$$\Rightarrow \underset{\displaystyle \|}{z_p} \le \underset{\displaystyle \|}{z_p'}$$

$$\Rightarrow z_D \le z_D'$$

(2) Ερμηνεία βασισμένη στη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Γενίκευση έννοιας σκιώδους τιμής

$$P: \quad z_p : \max \; c'x \qquad\qquad \max \; d'x$$
$$Ax = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad A'x \le b$$
$$x \ge 0 \qquad\qquad\qquad x \ge 0$$

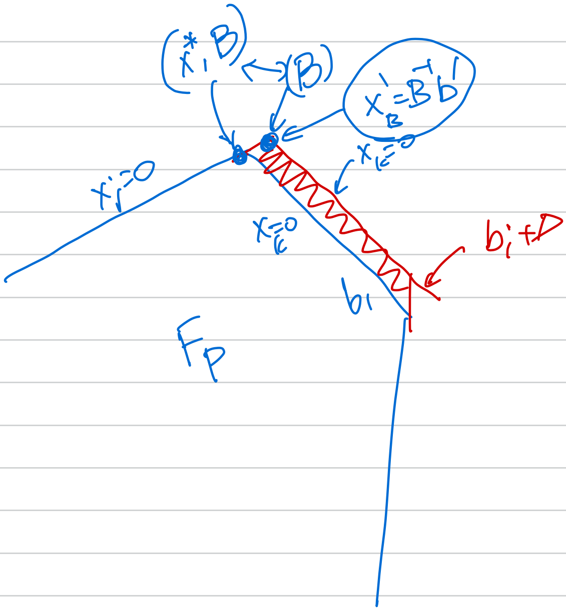


Έστω x^* μη εκφυλ. βέλτιστη ΒΕΛ, (B)

$x_B = B^{-1}b$

Έστω ότι η x_k είναι περιθώρια μεταβλητή του περ. $a_i'x \le b_i \iff a_i'x + x_k = b_i$

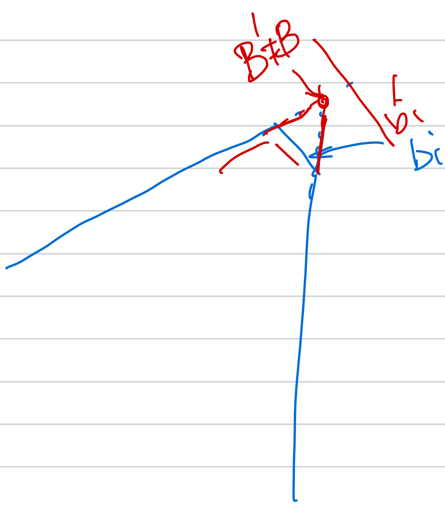
Έστω $b_i' = b_i + \Delta_i$ $\quad$ $\Delta_i > 0$ μικρό



παραμένει ο ίδιος βασικός πίνακας

(x^* μη εκφυλισμένη)

$x_B > 0$



Αφού η x^* είναι βέλτιστη στο αρχικό πρόβλημα:

$$B: \quad \bar{c}' = \underbrace{c' - c_B' B^{-1} A}\ \le 0 \qquad \text{ανεξ. των } x$$

Επομένως κ' στο νέο πρόβλημα $\bar{c}' \le 0$

$\Leftrightarrow$ $x^{*'}$ βέλτιστη

$$z' = c' x^{*'} = c_B \cdot x_B$$

$$z = c' x^* = c_B \cdot x_B'$$

$$b' = b + \underline{\Delta} \qquad \left(\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

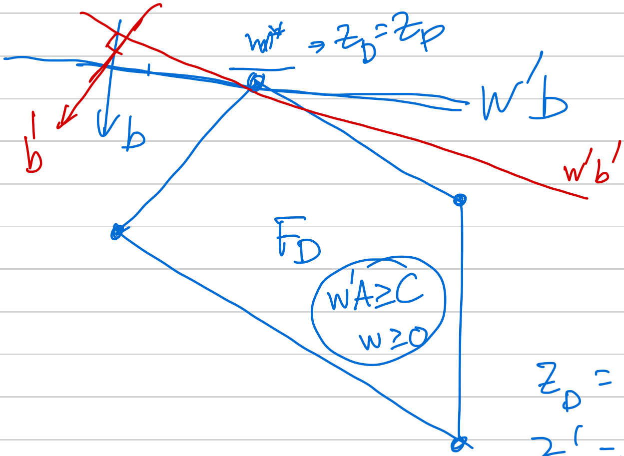
$$x_B' = B^{-1} \cdot b' = B^{-1}(b + \Delta) = B^{-1} b + \underbrace{B^{-1} \Delta}$$

$$\Rightarrow z' = c_B' x_B' = \underbrace{c_B' B^{-1} b}_{z} + \underbrace{c_B' \cdot B^{-1}}_{w'} \cdot \Delta$$

$$\Rightarrow z' = z + w' \cdot \Delta = z + w_i \Delta_i$$

Όταν $\Delta_i \to 0$ $\quad \boxed{w_i = \dfrac{\partial z}{\partial b_i}}$

Από την πλευρά του z_D:



!!

F_D ανεξ. του b

$$z_D = w^* \cdot b$$

$$z_D' = w^* \cdot b' = w^*(b+\Delta)$$

$$= w^* b + w^* \Delta$$

$$= z_D + w^* \Delta$$

Θ. Συμπληρωματικότητας

$$w_i(b_i - a_i' x) = 0$$

(πρ. παραγωγής)

$a_i' x \leq b_i$ διαθέσιμοι πόροι

i) Αν για κάποιο i $a_i' x < b_i$

μη δεσμευτικός περιορ.

δεν εξαντλείται η ποσότητα b_i

Τότε $\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = 0$

Όμως $b_i - a_2' x > 0 \xRightarrow{\theta.\Sigma} w_2 = 0$

Ασκήσεις

3.1 (a)

$$z_p = \max \; x_1 - x_2 + 3x_3 \quad (\leq)$$

(ροδ φορά)	$2x_1 + 3x_2 - x_3$	≤ 5	$w_1 \geq 0$
(αντίθετη)	$x_2 + 3x_3$	≥ 3	$w_2 \leq 0$
(ισότητα)	$-x_1 + x_2 + x_3$	$= 7$	$w_3 \in \mathbb{R}$

$\underbrace{x_1 \leq 0}, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$

δυϊκό (min) (προδ $\geq$) $\quad (\leq c_1) \quad (\geq c_2) \quad (\geq c_3)$

D

$$z_D = \min \; 5w_1 + 3w_2 + 7w_3$$

$$2w_1 - w_3 \leq 1$$

$$3w_1 + w_2 + w_3 \geq -1$$

$$-w_1 + 3w_2 + w_3 \geq 3$$

$w_1 \geq 0, \; w_2 \leq 0, \; w_3 \in \mathbb{R}$

33

$z_p = \max c'x$ (Η κ max)

$Ax \leq c$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός

$c \in \mathbb{R}^n$

Δ.ο. αν x^* : $Ax^* = c$, $\boxed{x^* \geq 0}$ $\Rightarrow$ βέλτιστη λύση

Απόδειξη

$z_D = \min c'w$

$A'w \geq c$

$w \geq 0$

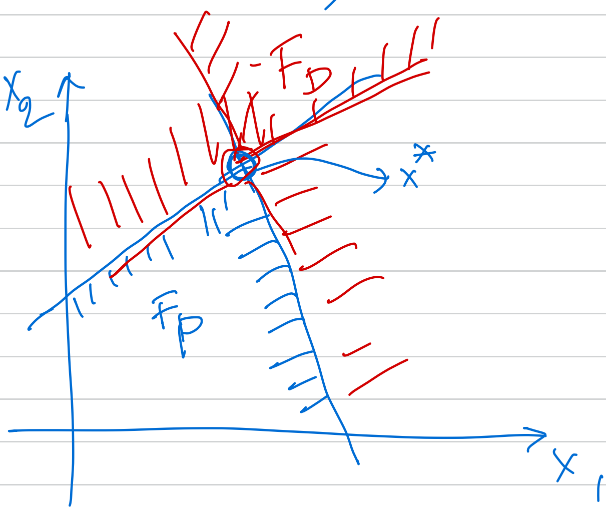
$(A' = A)$

$z_D = \min c'w$

$Aw \geq c$

$w \geq 0$

$w \in \mathbb{R}^n$



π.χ. $n=2$

Αν $\exists\ x^* : Ax^*=c,\ x^*\geq 0 \Rightarrow x^*\in F_P$

Όμως $x^*\in F_D$ $\left(Ax^*=c \Rightarrow \begin{array}{l} Ax^*\geq c \\ x^*\geq 0 \end{array}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^*\in F_P & w^*=x^*\in F_D \\ \text{και} & \underbrace{c'x^*}_{} = c'w^* \end{array}}$$

$\Rightarrow$ (Λήμμα 3.1) $\Rightarrow$ x^* βέλτιστη (P)

$w^*=x^*$ " (D)

3.5 Λήμμα του Farkas

Έστω $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$

Τότε ακριβώς μία από τις παρακάτω ισχύει:

i) $\exists\ x\in\mathbb{R}^n : Ax=b,\ x\geq 0$

ii) $\exists\ w\in\mathbb{R}^m : w'A\geq 0,\ w'b<0$

(i) $\Leftrightarrow$ όχι (ii)

Αν (i) $\Rightarrow$ όχι (ii)

Αν όχι (i) $\Rightarrow$ (ii)

Απόδειξη :

(a) (i) $\Rightarrow$ όχι (ii)

Έστω $\exists\, x : Ax=b,\ x\geq 0$

Θ.δ.ο. $\forall\, w\in\mathbb{R}^m : w'A\geq 0 \Rightarrow w'b\geq 0$ $\quad *$

Αφού έχουμε $Ax=b,\ x\geq 0$

$\Rightarrow \forall\, w\in\mathbb{R}^m$ με $w'A\geq 0 \Rightarrow \underbrace{w'A}_{\geq 0}\underbrace{x}_{\geq 0}\geq 0$

Όμως $Ax=b \Rightarrow w'Ax = w'b\geq 0$ αποδείχθηκε (*)

(b) Έστω όχι A : $\nexists\, x\in\mathbb{R}^n : Ax=b,\ x\geq 0$

Έστω $z_p = \max 0'\cdot x$

$$F_p \begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z_p : \text{ανέφικτο},\quad F_p=\emptyset$$

Το δυικό του

$$z_D = \underline{\min}\ w'b$$

$$F_D \begin{cases} w'A\geq 0 \\ w\in\mathbb{R}^m \end{cases}$$

z_D είτε $F_D=\emptyset$

είτε μη φραγμένο

δηλ. $z_D=-\infty$

z_D : $w' = 0 \in F_D \Rightarrow F_D \neq \emptyset$

z_D όχι ανέφικτο $\Rightarrow$ $z_D = -\infty$

$\Rightarrow \exists$ τουλάχιστον ένα $w \in F_D$: $w'b < 0$

Επομένως αν όχι (i) $\Rightarrow$ $\exists\, w \in \mathbb{R}^m : w'A \geq 0,\ w'b < 0$

3.7 Παραγωγή ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους (Έστω $N=3$)

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + h_1 I_2 + h_2 I_3 + h_3 I_4 \\
w_1 & x_1 & & & - I_2 & & = d_1 - I_1 \\
w_2 & & x_2 & & + I_2 - I_3 & & = d_2 \\
w_3 & & & x_3 & & + I_3 - I_4 & = d_3
\end{array}
$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \cdots \quad I_4 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
Z_D = \max\ (d_1 - I_1)\, w_1 + d_2 w_2 + d_3 w_3 & \\
w_1 & \le c_1 \\
w_2 & \le c_2 \\
w_3 & \le c_3 \\
-w_1 + w_2 & \le h_1 \\
-w_2 + w_3 & \le h_2 \\
-w_3 & \le h_3 \\
w_1, w_2, w_3 & \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
w_2 &\le w_1 + h_1 \\
w_3 &\le w_2 + h_2 \\
w_3 &\ge -h_3
\end{aligned}\right\} \iff
\left|\begin{aligned}
-w_1 + w_2 &\le h_1 \\
-w_2 + w_3 &\le h_2 \\
-w_3 &\le h_3
\end{aligned}\right.
$$

$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix}\right\}$ προσφορά (ανά μονάδα) εξωτερικής εταιρείας που θα μας παραδώσει ποσότητες $d_1 - I_1$, d_2, d_3 στις περιόδους $\underline{1, 2, 3}$

$w_t \le c_t \implies$ τιμή περ. t δεν μπορεί να υπερβαίνει το κόστος παραγ. c_t

$w_2 \leq w_1 + h_1$;

Αν $w_2 > w_1 + h_1$

π.χ. $h_1 = 5$
$w_1 = 7$

$w_2 = 20$

$w_3 \geq -h_3$;

h_3 : κόστος τελικού αποθέματος (μπορεί $h_3 < 0$)

Αν $h_3 \geq 0 \Rightarrow w_3 \geq -h_3$

Αν $h_3 < 0 \Rightarrow w_3 \geq -h_3$