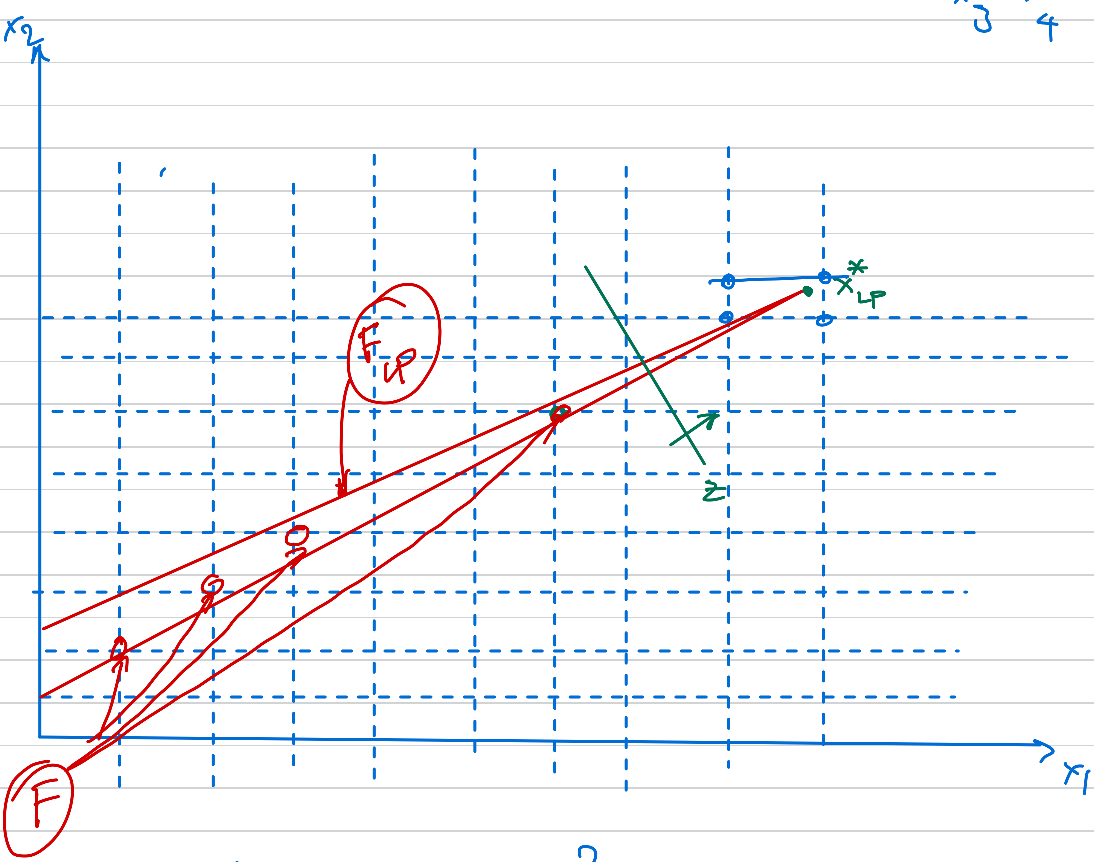
Ακέραιος (Γραμμικός) Προγραμματισμός

(Διακριτή Βελτιστοποίηση)

Η εφικτή περιοχή <u>διακριτό σύνολο</u>

$z = \max c'x$ $Ax = b$ $x \geq 0$ $x \in \mathbb{Z}^n$	$z_{LP} = \max c'x$ $Ax = b$ $x \geq 0$ <u>LP- relaxation</u>	π.χ. $x_1 = \frac{3}{4}$ $x_2 = 5$ $x_3 = \frac{7}{4}$

π.χ.



Χρειάζεται η <u>"ακεραιότητα"</u> ?

π.χ. Πρόβλημα Παραγωγής: x_j = ποσότητα προϊόντων σε ένα χρονικό διάστημα

αν $x_j = 2.5$ ημέρα // ⇒ <u>5 / 2 ημέρες</u> (average)

Γενικό πρόβλημα

$$z = \max c'x + h'y$$
$$Ax + Gy = b \qquad b \in \mathbb{R}^m$$
$$x \in \mathbb{Z}_+^n \qquad y \in \mathbb{R}_+^p$$

μεικτός προγραμματισμός (mixed integer programming)

(1) $n=0 \Rightarrow$ LP

(2) $p=0 \Rightarrow$ IP integer programming

(3) Αν $x_j \in \{0,1\} \ \forall j \iff \begin{cases} x_j \le 1 \\ x_j \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$ | 0-1 programming

Παρατηρήσεις

(1) Ένα πρόβλημα IP δεν μπορεί γενικά να μετασχηματιστεί σε IP σε κανονική μορφή.

(π.χ.) (α) $x_1 + x_2 \le 7$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

$$\Updownarrow$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

(β) $\frac{3}{2}x_1 + x_2 \le 5 \iff 3x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

(γ) $\sqrt{2}x_1 + x_2 \le 5 \iff ?$ $\sqrt{2}x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

$x_3 \notin \mathbb{Z}$

② Υπόθεση

Όλοι οι συντελεστές των A, G είναι ρητοί αριθμοί

$\Updownarrow$

Μπορούμε (χβγ) να υποθέσουμε ότι είναι και ακέραιοι

Εφαρμογές Ακέραιου Προγραμματισμού

Βασική ιδέα: Χρήση 0-1 μεταβλητών για να μοντελοποιήσουμε αποφάσεις τύπου ναι-όχι

Γενικά έστω μια απόφαση j τύπου ναι-όχι

$\Updownarrow$

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν ληφθεί η απόφαση } j \\ 1, & \text{αν ληφθεί} \end{cases}$$

$$= 1(\text{απόφαση-}j)$$

Γενικοί Κανόνες Μοντελοποίησης

Έστω σύνολο από δυνατές αποφάσεις/επιλογές $\{1, \dots, n\}$ τύπου ναι-όχι

αντίστοιχες δείκτριες $x_j = 1(\text{απόφαση-}j)$, $j = 1, \dots, n$

(i) Μπορούμε να ενεργοποιήσουμε το πολύ K από αυτές

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}_{\text{αρ αποφάσεων που θα ληφθούν}} \leq K$$

ii) $\boxed{x_i \le x_j} \iff \left.\begin{array}{l} \text{αν } x_i = 1 \Rightarrow x_j = 1 \\ \text{αν } x_j = 0 \Rightarrow x_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\iff$ Η απόφαση i συνεπάγεται την j

$\iff$ Η j είναι αναγκαία συνθήκη για την i

---

iii) $\underline{x_{ij}} = \begin{cases} 1, & \text{αν i και j ληφθούν ταυτόχρονα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

<u>Ερώτημα</u> Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο χωρίς την x_{ij}? μόνο μέσω των x_i, x_j ?

"Προφανής" λύση (Boole) $x_{ij} = x_i x_j$ (όχι γραμμική)!!

Λύση μέσω περιορισμών

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \le x_i \\ x_{ij} \le x_j \\ x_{ij} \ge x_i + x_j - 1 \end{array}\right\} \iff x_{ij} = x_i x_j$$

$x_{ij}, x_i, x_j \in \{0,1\}$

① Τοποθέτηση σταθμών παραγωγής (facility location)

n δυνατές τοποθεσίες για σταθμούς παραγωγής

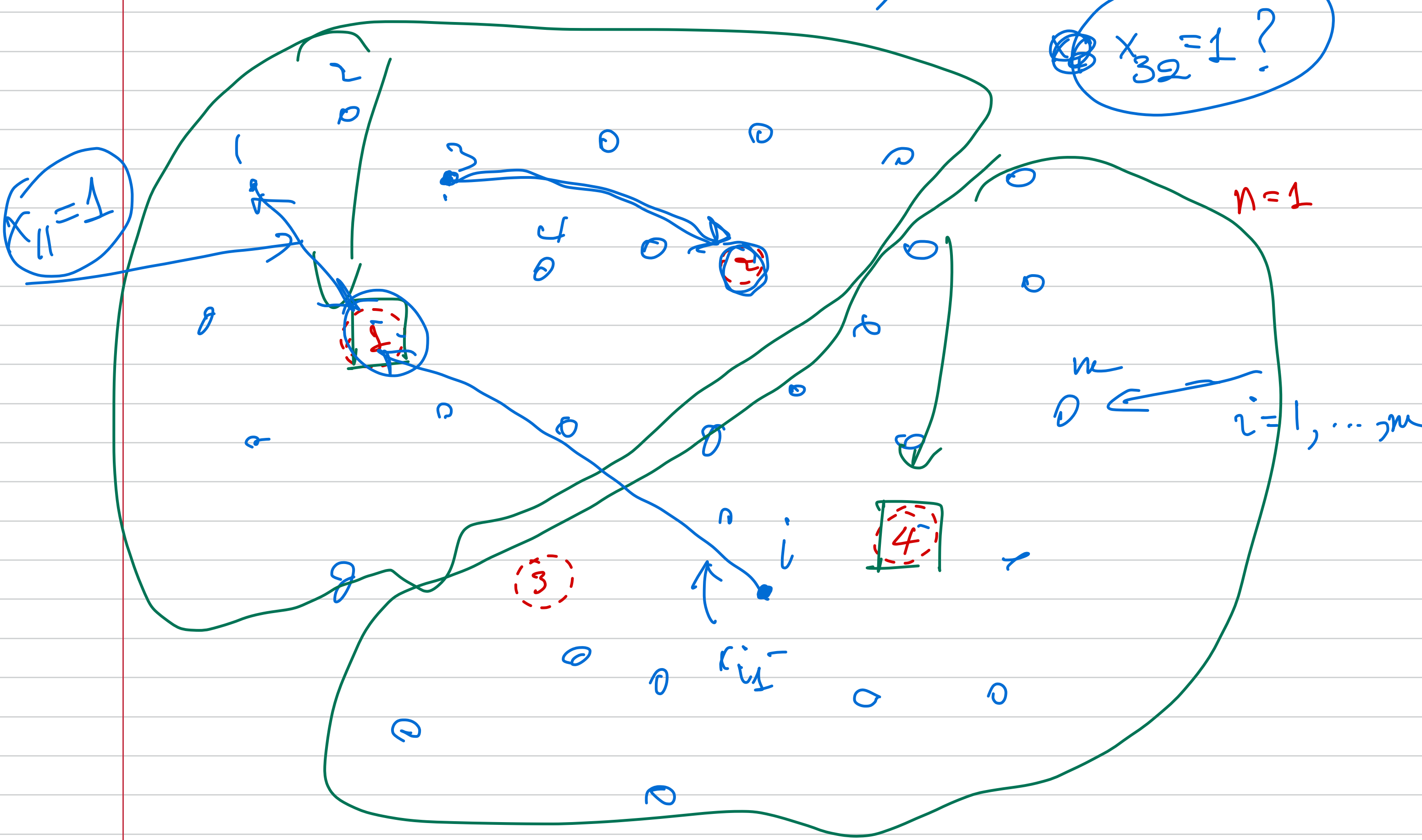
m πελάτες

Κόστος c_j αν τοποθετηθεί σταθμός στη θέση j

" h_{ij} αν ο πελάτης i εξυπηρετηθεί από σταθμό στη θέση j

Να βρεθεί { πού πρέπει να ανοίξουν σταθμοί
κατανομή πελατών στους σταθμούς

min (συνολικό κόστος)



Μοντελοποίηση

$x_j = 1$ (ανοίγει σταθμός στη θέση j) , $j = 1, \dots, n$

$x_{ij} = 1$ (πελάτης i εξυπηρετείται από σταθμό στη θέση j) $\quad i = 1, \dots, m$, $\; j = 1, \dots, n$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_{ij}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}_{\text{αρ. σταθμών για πελάτη } i} = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$m = 4$
$n = 2$

πελ \ σταθμός		
	x_{11} 1	x_{12} 0
	x_{21} 0	x_{22} 1
	x_{31} 1	x_{32} 0
	x_{41} 0	x_{42} 1

$x_{11} + x_{12} = 1$

$x_1 = x_2 = 0$

Γενικός (λογικός) περιορ.

Αν ο $i \to$ θέση $j \Rightarrow x_j = 1$

$$x_{ij} \le x_j \qquad \forall i, \forall j$$

$m \times n$

Συνολικά

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_{ij}$$

$$x_{ij} \le x_j \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_{ij}, x_j \in \{0,1\}$$

π.χ. επιπλέον

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 30 \qquad \forall j \right)$$