2024 - 5 - 16

Μοντέλο 2 Τοποθέτηση σταθμών παραγωγής - οργάνωση παραγωγής

Εταιρεία παράγει προϊόν, ζήτηση $= d$ / μον. χρόνου

Μπορούν να τοποθετηθούν σταθμοί παραγωγής σε οποιεσδήποτε από n δυνατές τοποθεσίες

Στη θέση j : δυναμικότητα $= M_j$ / μον. χρόνου
κόστος παραγωγής $= h_j$ / μον. προϊόντος

[υπολογισμένο με απόσβεση/μον.χρ.] κόστος εγκατάστασης σταθμού $= K_j$

Να βρεθεί { πού πρέπει να ανοίξουν σταθμοί / ποσότητες παραγωγής / μον. χρόνου

έτσι ώστε ικανοποιείται η ζήτηση με ελάχιστο κόστος

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{υπάρχει σταθμός στη θέση } j \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} \qquad x_j \in B = \{0,1\}$$

$$y_j = \text{ποσ. παραγωγής στη θέση } j \qquad (y_j \geq 0)$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} K_j x_j + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \geq d$$

$$y_j \leq M_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad \Big| \; y_j \leq \begin{cases} M_j & x_j = 1 \\ 0, & x_j = 0 \end{cases} = M_j x_j$$

$\boxed{\text{Αν } x_j = 0 \Rightarrow y_j = 0} \Longrightarrow$

$$\min \sum_{j=1}^{n} K_j x_j + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \geq d$$

$$y_j \leq M_j x_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$y_j \geq 0,\ x_j \in B$$

Μοντέλο 3 Πρόβλημα μαθ. προγρ. με διαζευκτικούς περιορισμούς.

① Λx. πχπ.

$$\max\ z = cx$$

$$F \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

② $\max\ z = c'x$

$x_1 + 2x_2 \geq 2$

ή

$2x_1 + x_2 \geq 2$ ή και τα δύο,

$x_1, x_2 \geq 0$

Μοντέλο μεικτού 0-1 προγρ.

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2y \\ x_1 + 2x_2 \geq 2(1-y) \\ 0 \leq y \leq 1 \quad y \in \mathbb{B}, \; x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} F'$$

$$F' = \{(x,y) \in F : y = 0\} \cup \{(x,y) \in F : y = 1\}$$

$$= \left\{(x,y) \in F : \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \cup \left\{(x,y) \in F : \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Γενικά (y_j) $a_j x \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$

απαιτείται να ικανοπ. τουλάχιστον k $(k \leq n)$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν απαιτείται να ισχύει ο } a_j x \leq b_j \text{ ικανοποιείται} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \geq k$$

$$a_j x \leq b_j y_j \Rightarrow \begin{array}{ll} a_j x \leq b_j & \text{όταν } y_j = 1 \\ a_j x \leq 0, & y_j = 0 \end{array}$$

$$a_j x \leq b_j y_j + M(1 - y_j),$$

M μεγάλος αριθμός

$$F \approx \left\{ \begin{array}{l} a_j x \le b_j y_j + M_j (1-y_j) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \ge k \\ y_j \in B, \quad x_j \ge 0. \end{array} \right.$$

Μηχ. 4 Μεταβλητές με πεπερ. σύνολο τιμών.

$$x_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

π.χ. $x_j \in \{2, 3, 4, 5\} \iff \begin{array}{l} 2 \le x_j \le 5 \\ x_j \in \mathbb{Z} \end{array}$

$x_j \in \{\frac{1}{2}, 2, 5, -2\} \iff ?$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } x_j = a_i \\ 0 & \text{διαφορ.} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, k.$$

$$x_j \in \{a_1, \dots, a_k\} \iff \begin{array}{l} x_j = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k \\ y_1 + \dots + y_k = 1 \end{array}$$

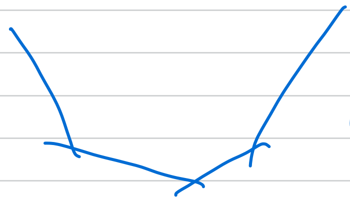
Μοντέλο 5 Τμηματικά Γραμμική Συνεχής Αντικ. Συνάρτηση

Έχουμε δει

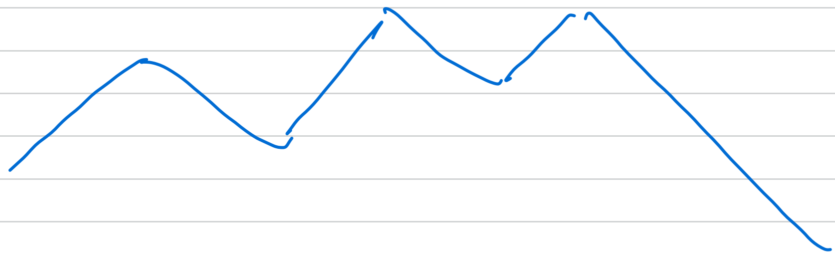
min (τμ. γραμμική συνεχής κυρτή) → minimax ΠΓΠ

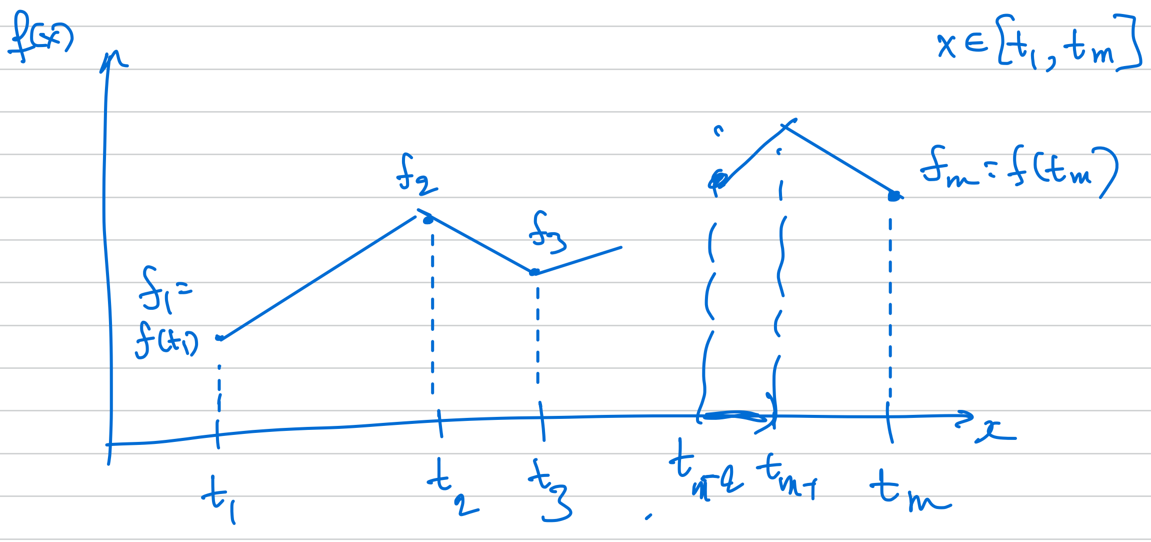
max (" " " κοίλη) → maximin ΠΓΠ

κοίλη



κυρτή



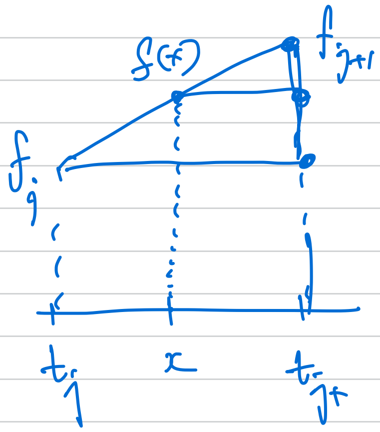


$$f(x) = \begin{cases} f_1 + \dfrac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}\cdot(x - t_1), & x \in [t_1, t_2] \\ f_2 + \dfrac{f_3 - f_2}{t_3 - t_2}\cdot(x - t_2), & x \in [t_2, t_3] \\ \vdots & \end{cases}$$

$$z = \min\{f(x) : x \in [t_1, t_m], \ldots\}$$

$$y_1 = 1\left(x \in [t_1, t_2)\right)$$
$$y_2 = 1\left(x \in [t_2, t_3)\right)$$
$$\vdots$$
$$y_{m-2} = 1\left(x \in [t_{m-2}, t_{m-1})\right)$$
$$y_{m-1} = 1\left(x \in [t_{m-1}, t_m]\right)$$

$$\boxed{y_1 + \dots + y_m = 1}$$



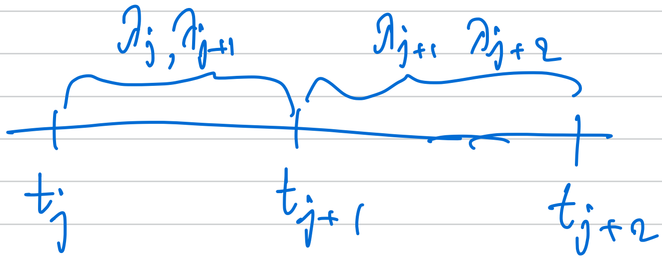
Αν $y_j = 1$

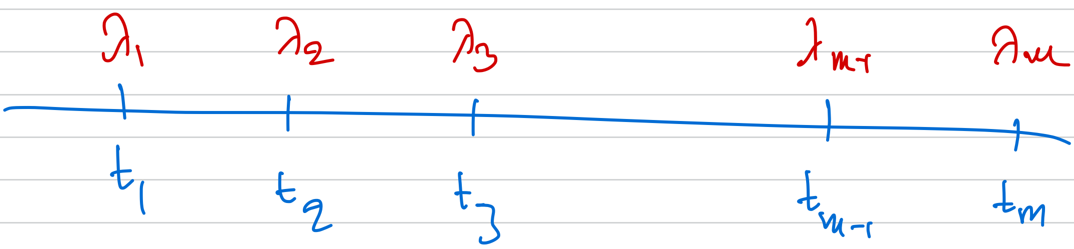
τότε $x = \lambda_j t_j + \lambda_{j+1} t_{j+1}$

$\lambda_j + \lambda_{j+1} = 1$

$\lambda_j, \lambda_{j+1} \geq 0$

Επίσης τότε $f(x) = \lambda_j f_j + \lambda_{j+1} f_{j+1}$





$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$

το πολύ δύο θετικά → συνεχόμενα

$\lambda_1 > 0 \Rightarrow y_1 = 1$

$\lambda_2 > 0 \Rightarrow y_1 = 1$ ή $y_2 = 1$

$$x = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_m t_m$$

$$f(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

$$\lambda_1 \le y_1$$

$$\lambda_2 \le y_1 + y_2$$

$$\vdots$$

$$\lambda_m \le y_{m-1}$$

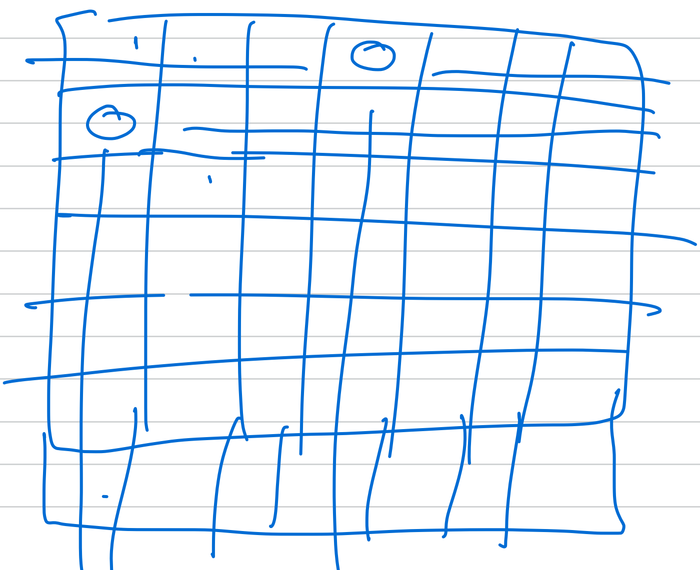
Μοντέλο 6 : Πρόβλημα Ανάθεσης (Assignment)

n αντικείμενα

n θέσεις

Κάθε αντικ. σε μία θέση (διαφορετικές)

c_{ij} = κόστος αν i πάει στη θέση j.



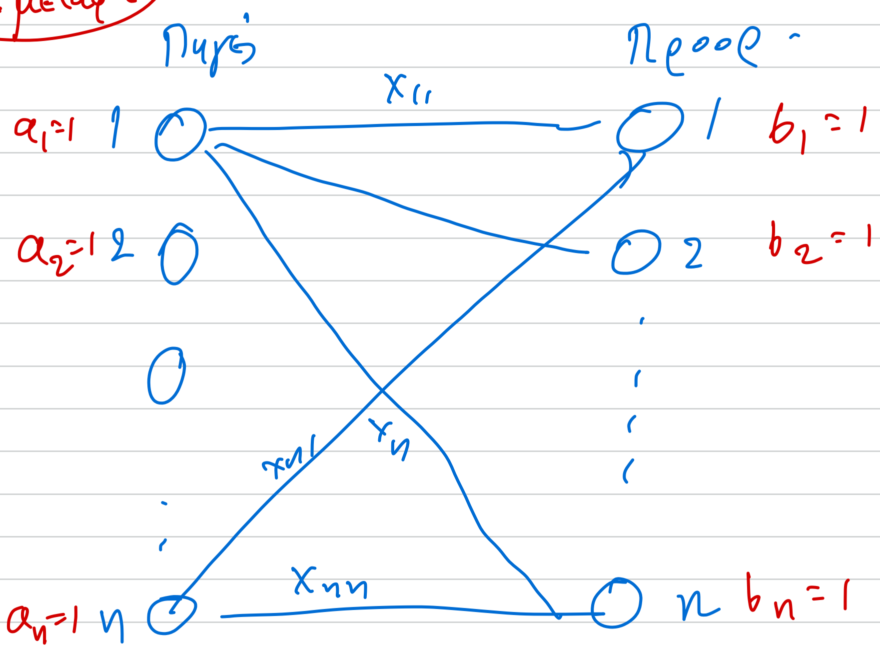
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ανατ. } i \to \text{θέση } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

LP relaxation

$$\boxed{\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad , \ j = 1, \dots, n \end{aligned}}$$

$$x_{ij} \in B$$

Ισορρ. πρ. μεταφοράς



Ξέρουμε ότι ένα πρ. μεταφοράς

με $a_i, b_j \in \mathbb{Z} \ \forall i,j \Rightarrow x^* \in \mathbb{Z}^{n^2}$

Επομένως μπορεί να λυθεί με ΓΠ.

Ουγγρικός αλγόριθμος πιο εύκολος από ΓΠ.

Επίλυση ΑΠ

$$z = \max c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

<u>Γραμμική χαλάρωση</u> : $F_{LP} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$

$$F = F_{LP} \cap \mathbb{Z}^n$$

$$z_{LP} = \max\{c'x : x \in F_{LP}\}$$ LP-relaxation

$$F \subseteq F_{LP}$$

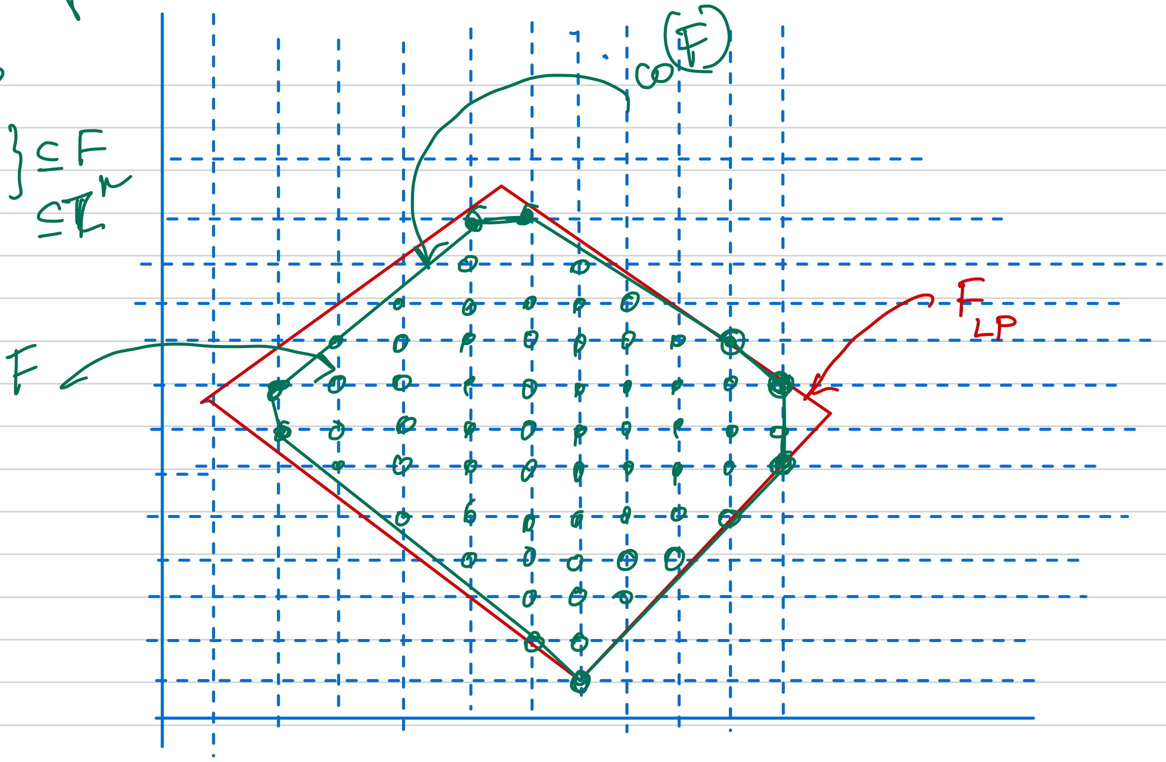
$$z \leq z_{LP}$$

$$z = z_{LP} \Leftrightarrow x^*_{LP} \in \mathbb{Z}^n$$

co(F) κυρτό πολ.

co(F) ⊆ F_{LP}

{κορυφές co(F)} ⊆ F ⊆ $\mathbb{Z}^n$



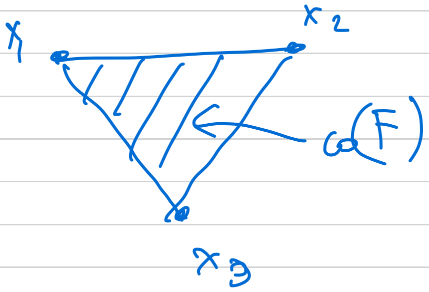
$F = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

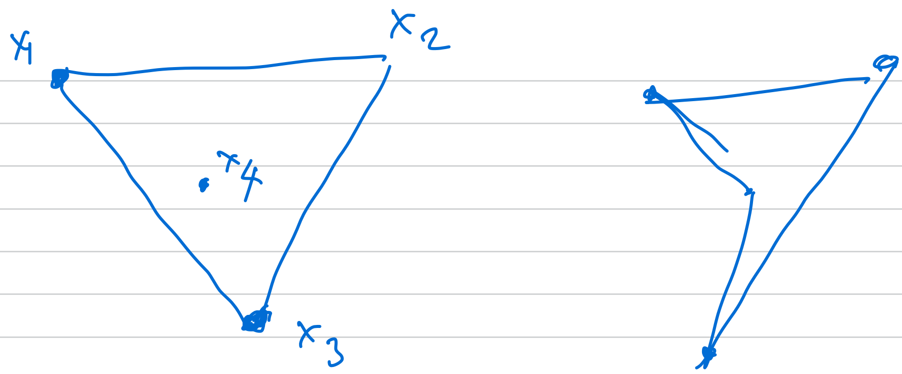
Εστω F_{LP} <u>φραγμένο</u> ⟹ $|F| < \infty$

co(F) : convex hull of F
κυρτή θήκη του F

co(F) = μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το F

$F = \{x_1, x_2\}$





$|F| < \infty \Rightarrow co(F)$ κυρτό πολύεδρο με $\{$σύνολο κορυφών$\} \subseteq F$

Έστω $z_{co} = \max\limits_{x \in co(F)} c'x$ LP $\Rightarrow$

$x^*_{co} \in \mathbb{Z}^n$

$$\boxed{z^*_{co} = z^*}$$