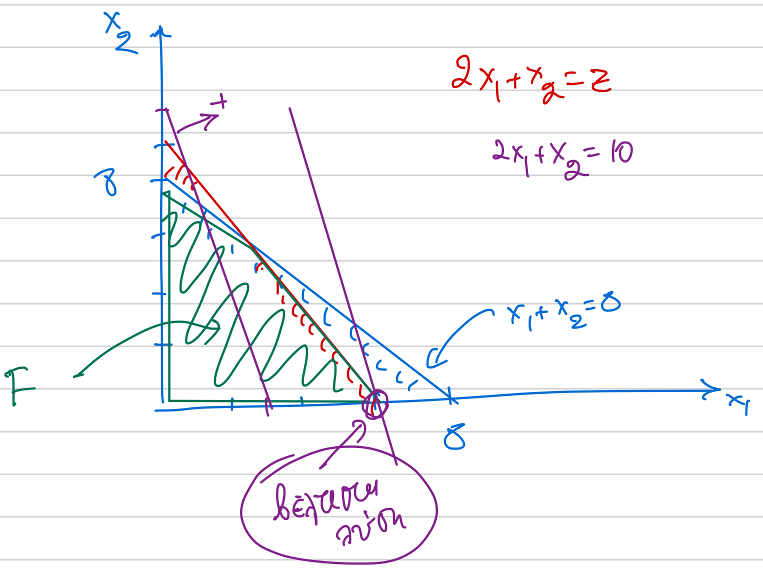
2024-03-13

Βασικές Ιδιότητες Γραμμικού Προγραμματισμού

Παράδειγμα γραφικής επίλυσης ΠΓΠ.

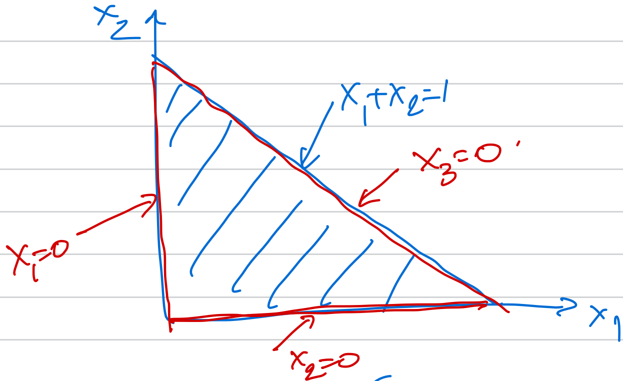
$$
\max \; 2x_1 + 3x_2
$$

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 8 \\
3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}\right\} F \leftarrow \text{γραφική παράσταση}
$$



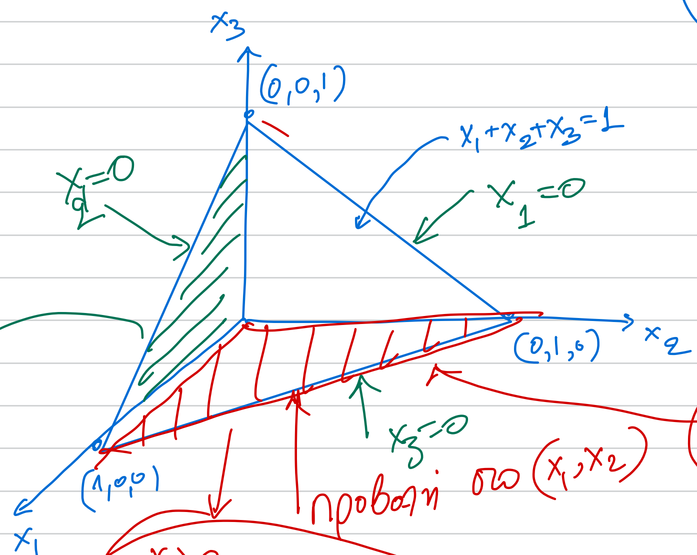
Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων (F)

(1) $F = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$



κανονική μορφή
$$F = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

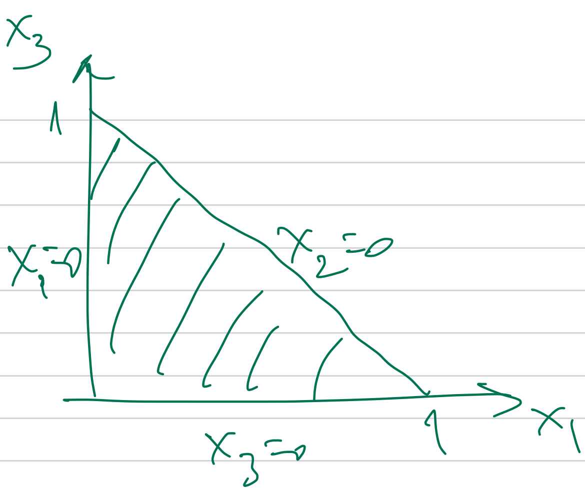
$\dim = 2$



$x_1 + x_2 = 1$
$x_3 = 0$

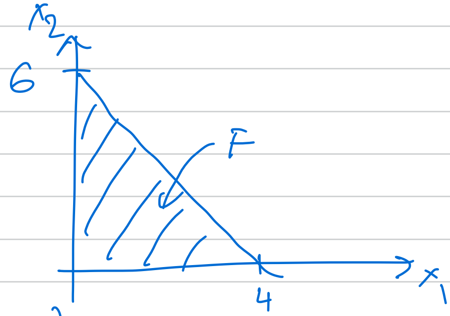
προβολή στο (x_1, x_2)

$x_1 \geq 0$ $\quad x_1 + x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 0$ $\quad x_3 = 0$
$\Longleftrightarrow F$

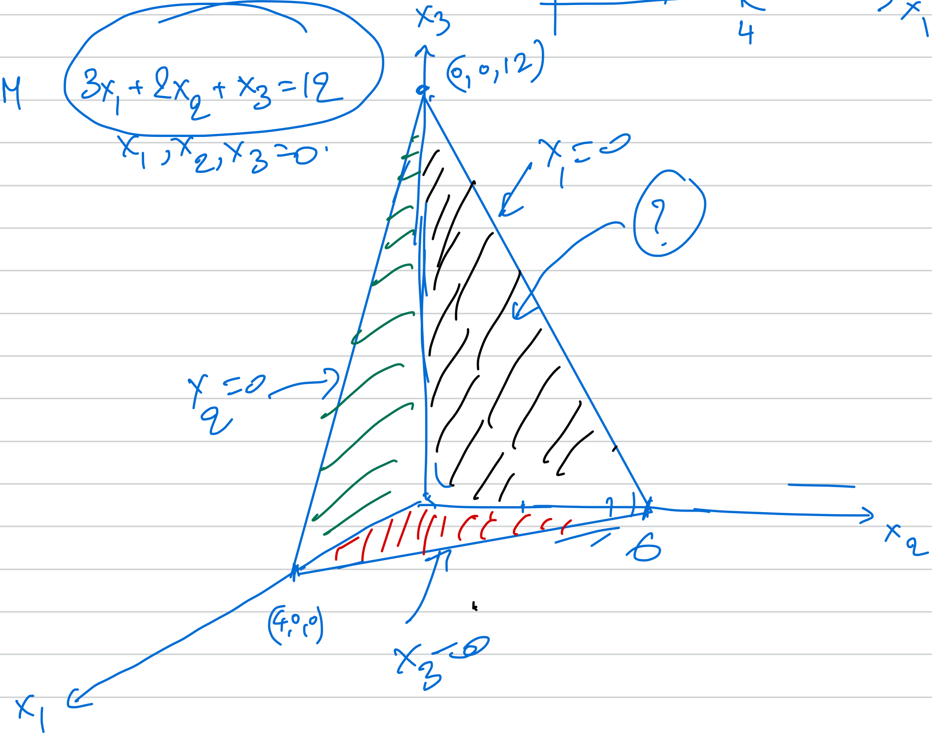


Παρ. 2

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



ΚΜ $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$



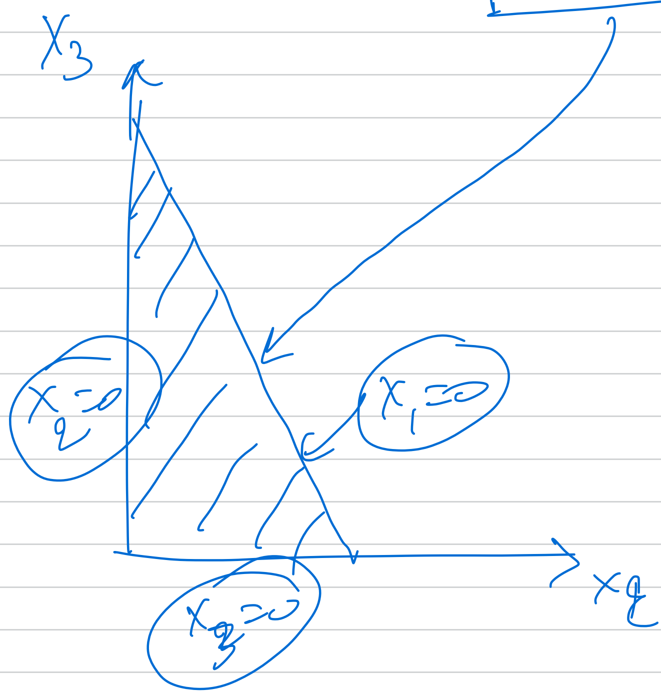
Προβολή στο (x_2, x_3) : $x_1 \geq 0$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{12 - 2x_2 - x_3}{3} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{x_3}{3} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 4}$$



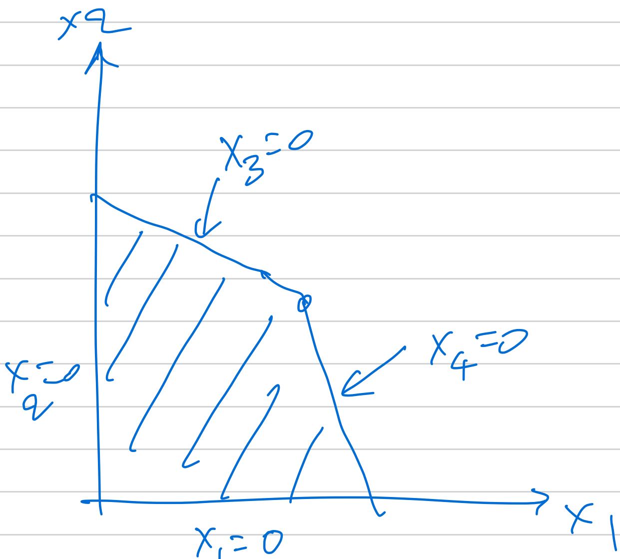
Παρ3

$$F = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ \hline x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ΚΜ

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ \hline x_1, \dots, x_4 \ge 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

dim = 2



$x_3 = 8 - x_1 - x_2$

$x_4 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \iff x_1 + x_2 \leq 8$

$x_4 \geq 0 \iff 3x_1 + 2x_2 \leq 18$

Προβολή στο επίπεδο (x_1, x_4)

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 8 - x_1 \\ 2x_2 &= 18 - 3x_1 - x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

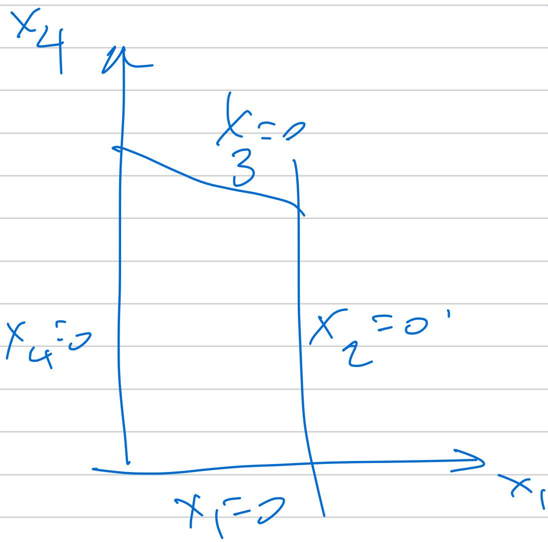
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 9 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= 8 - x_1 - 9 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ &= -1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0$

$x_4 \geq 0$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \leq 9$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \leq 1$



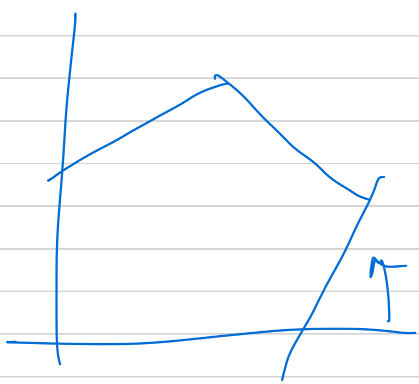
Пар3.

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_2 + 2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 24 \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$\subseteq \mathbb{R}^5$

$\dim = 2$

Σε όλα τα παραδείγματα $n - m = 2$

$n =$ αρ. μετ.

$m =$ αρ. περιορ.

ΠΓΠ σε κανονική μορφή:

$$z = \max_{x} c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\operatorname{rank}(A) = m \leq n$

(οι γραμμές του A γραμμικά ανεξάρτητες)

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} \qquad a_i' = \text{γραμμή } i \text{ του } A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} = (A_1 \ \ldots \ A_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A_1 a_1'

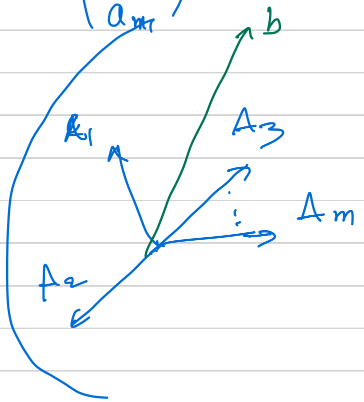
$$Ax = b \iff a_i'x = b_i \ , \ i = 1, \ldots, m$$

(m γραμμικές εξισώσεις)

$$\iff \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

$$\left[Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j \right] = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

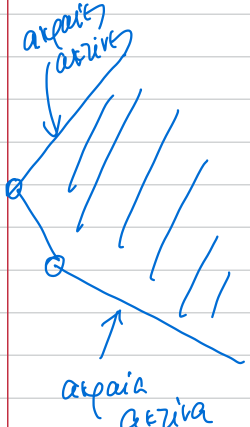


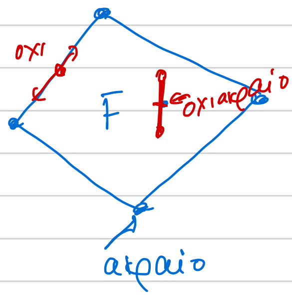
Γεωμετρικές Ιδιότητες

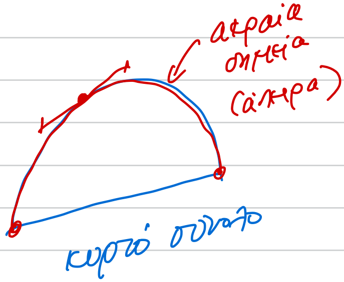
$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ x \geq 0 \}$$

① F κυρτό πολύεδρο (όχι αναγκαστικά φραγμένο)

② (κυρτό σύνολο με πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων)







3) Αν F φραγμένο σύνολο $\Rightarrow$ $\exists$ βέλτιστη λύση ΠΓΠ

4) Αν ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε $\exists$ τουλάχιστον μια κορυφή (ακραίο σημείο) του F που αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση. (βασικό θεώρημα του ΓΠ)

Πρόσθετες Ιδιότητες

$$F = \left\{ \begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \qquad r(A) = m$$

Έστω $F^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : Ax = b \}$

$$\boxed{Ax = b} \quad \begin{cases} \text{αν } n = m \Rightarrow \text{μοναδική λύση} \\ \text{αν } n > m \Rightarrow \text{άπειρες λύσεις} \end{cases}$$

F^0 : υπερεπίπεδο διάστασης $n-m$

Έστω $W^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$ $(n \geq m)$

$\dim(W^0) = n - m$ $\qquad$ W^0 : γραμμικός υπόχωρος

(υπερεπίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων)

Επίσης $W^0 = \ker(\gamma_n)$: $\gamma_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\gamma_n(x) = Ax$

Από θεωρία γραμμικών συστημάτων

Έστω x_0 οποιαδήποτε λύση του $Ax = b$

τότε $F^0 = \underline{x^0} + W^0 \equiv \{ x^0 + w : w \in W^0 \}$

F^0 : παράλληλη μετατόπιση του υπερεπ. W^0 κατά x^0

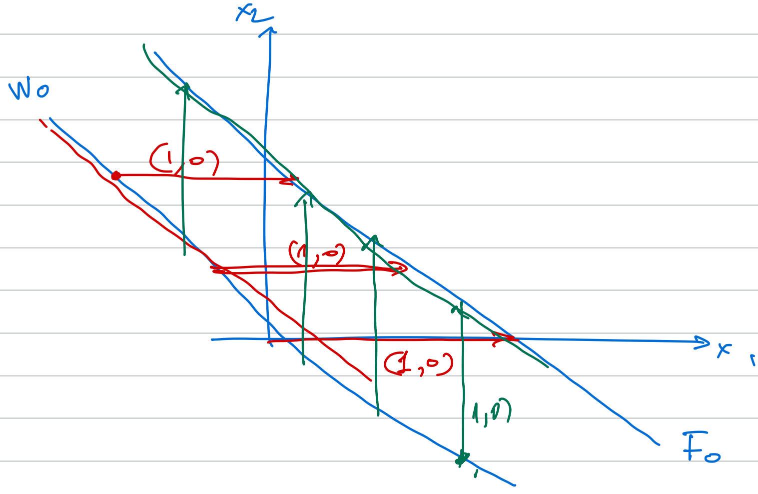
όταν $b \neq 0$ δεν διέρχεται από την αρχή.

Παράδειγμα

$n = 2$, $m = 1$, $A = (1 \ \ 1)$, $b = 1$

$F = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1 \}$

$W^0 = \{ x : x_1 + x_2 = 0 \}$



π.χ. μετά λύση x^0 : $x = (1,0)$

$F^0 = (1,0) + W^0$

αλλη λύση x^1 $x = (0,1)$

$F^0 = (0,1) + W^0$

F^0 δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ (για $b \neq 0$)

(δεν περιέχει τό $\underline{0}$)

$\boxed{F_0 : \text{υπερεπίπεδο διαστ. } n-m}$

F^0 : συσχετισμένος υπόχωρος (affine subspace)

$f(x) = ax$ γραμμική

$f(x) = ax+b$ όχι γραμμική - αφφινική

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ x \geq 0\}$$

$$F = \underbrace{F^0}_{\text{προσανατολισμός του } F} \cap \underbrace{\{x : x \geq 0\}}_{\text{σύνορο του } F}$$

Όλες οι πλευρές του F αντιστοιχούν σε εξισ. $x_j = 0$