

27/2/2026

Παραγωγή ενός προϊόντος
σε πολλές περιόδους

Το προϊόν διατελείται σε αιώδεια

Ορίζοντας N περιόδων ($t=1, 2, \dots, N$)

d_t : ζήτηση περιόδου t

c_t : κόστος παραγωγής / μονάδα περιόδου t

h_t : κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα περιόδου t

h_N : κόστος τελικού ορίσματος, I_1 αρχικό απόθεμα

Δεν υπάρχουν περιορισμοί

Ελαχ. συνολικού κόστους

Αν $c_t = c \quad \forall t \Rightarrow$ βέλτιστη λύση:
Παραγωγή = ζήτηση $\forall t$.

1) Διαφοροποίηση κόστους $\Rightarrow$ "κίνητρο κερδοσκοπίας"

2) Περιορισμοί παραγωγής π.χ. $d_1 = 50, d_2 = 200$

Δυναμικότητα παραγ. 150 $\forall t$

Αναγκαστικά διατίθενται αποθ.

3) Σταθερό κόστος έναρξης παραγωγής:

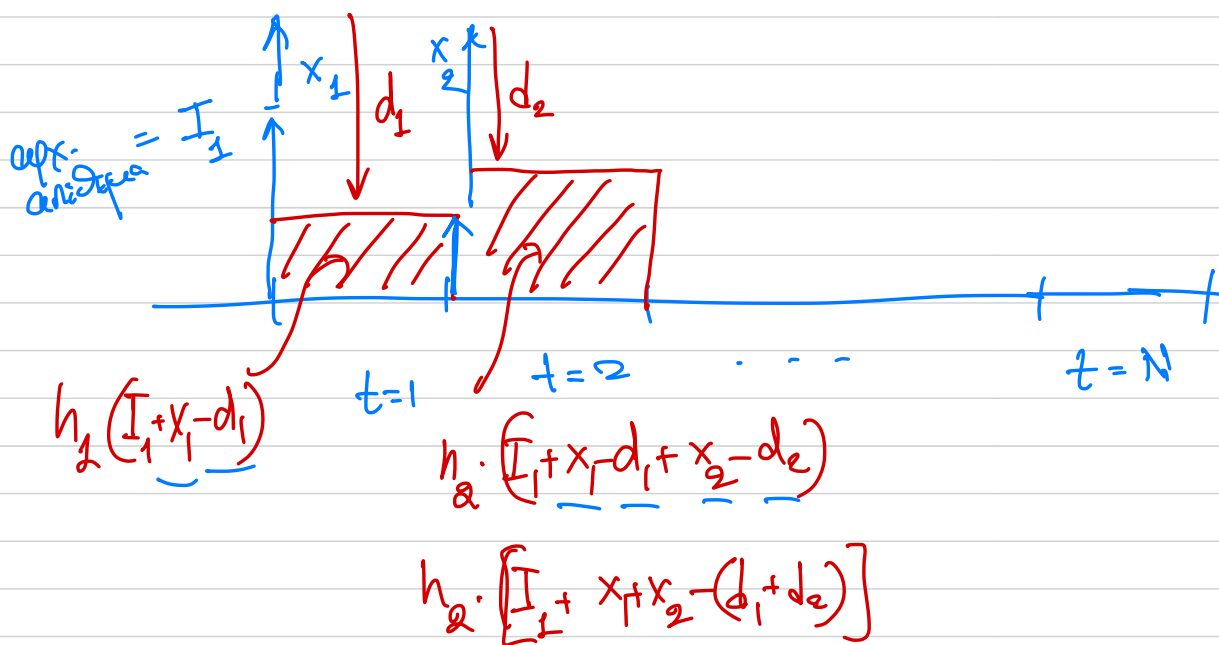
Εστω $C(Q)$ = κόστος παραγωγής ποσότητας Q

Εδώ υποθέτουμε $C(Q) = c_t Q \quad \forall t$

Εστω $C(Q) = \begin{cases} 0, & Q=0 \\ K+cQ, & Q>0 \end{cases}$ (οχι LP)

Αρχική Πρόβλημα ① x_t = ποσότητα παραγ. υπ. t .

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^N c_t x_t + \sum_{t=1}^N (\text{κόστος αποθ. υπ. } t) \right\}$$



υπ. t : κόστος αποθ. = $h_t \left(\underline{I_1 + \sum_{j=1}^t x_j} - \underline{\sum_{j=1}^t d_j} \right)$

συνολ.

Περιορισμοί

$t=1$: $I_1 + x_1 \geq d_1$

$t=2$: $I_1 + x_1 - d_1 + x_2 \geq d_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq -I_1 + d_1 + d_2$

$t=3$: $(I_1 + x_1 - d_1 + x_2 - d_2) + x_3 \geq d_3 \Rightarrow$

αρχ. αποθήκη

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq -I_1 + d_1 + d_2 + d_3$

$$\min \sum_{t=1}^N c_t x_t + \sum_{t=1}^N h_t \sum_{j=1}^t x_j + \sum_{t=1}^N h_t \left[I_1 - \sum_{j=1}^t d_j \right]$$

$$\sum_{j=1}^t x_j \geq -I_1 + \sum_{j=1}^t d_j, \quad t=1, \dots, N.$$

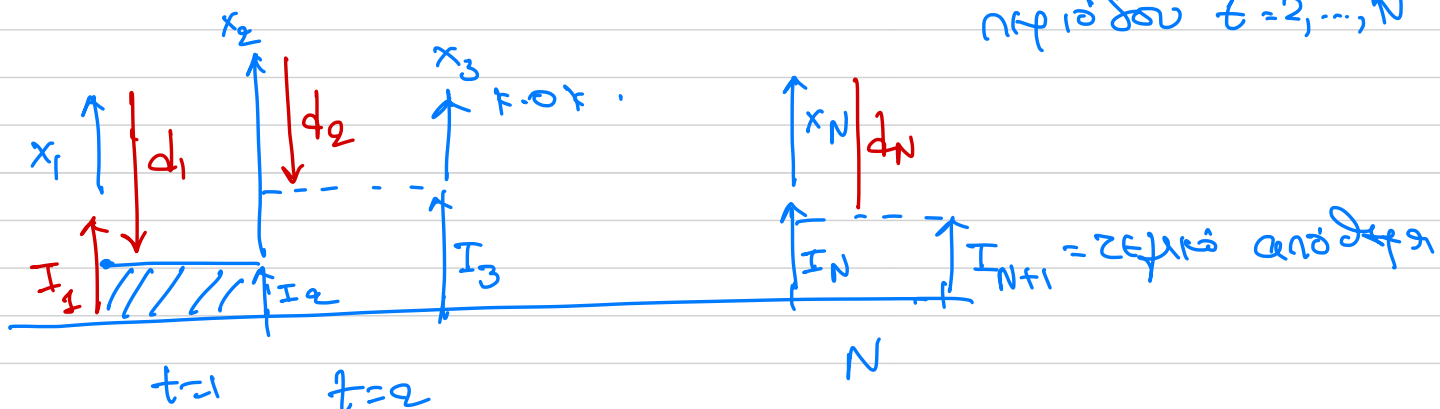
$$x_t \geq 0 \quad t=1, \dots, N.$$

$$\begin{aligned} & c_1 x_1 + h_1 x_1 + \\ & + c_2 x_2 + h_2 (x_1 + x_2) + \\ & + \quad \quad h_3 (x_1 + x_2 + x_3) + \\ & \vdots \\ & + c_N x_N + h_N (x_1 + x_2 + \dots + x_N) \end{aligned}$$

Εναλλακτική μορφοποίηση

Μεταβλητές: $x_1, \dots, x_N$

$I_2, \dots, I_{N+1}$ = αρχικό αποθεματικό
αποθέματος $t=2, \dots, N$



$$\min c_1 x_1 + \dots + c_N x_N + h_1 I_2 + h_2 I_3 + \dots + h_N I_{N+1}$$

$$I_2 = I_1 + x_1 - d_1$$

$$I_3 = I_2 + x_2 - d_2$$

$$I_{t+1} = I_t + x_t - d_t \quad t = 1, 2, \dots, N$$

$$x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, N$$

$$I_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, N$$

↔ ικανοποίηση
ζήτησης
σε κάθε περίοδο

"Οφνητικό ανάθεμα"

π.χ. $I_1 = 0, x_1 = 50, d_1 = 70$

η firm $x_1 = 50$ μμ εφικτή

αν επιτρέψουμε "backorders" ή "backlog"

$I_t < 0 \Rightarrow$ εκκρεμότητα προς πελάτες

αν $P_t =$ κόστος backlog / μωρ απόστολος απρ. t .

$$\min \sum c_t x_t + \sum_{t=1}^N g(I_t)$$

$$g(I_t) = \begin{cases} h_{t-1} I_t & I_t \geq 0 \\ P_{t-1} I_t & I_t < 0 \end{cases} \quad \} \textcircled{?}$$

Τεχνικὸν στὰ ἀγὰ ἀρθρῶτα

d_{it} = ἡμερᾶν ἀρ. i ἀρθρῶν t

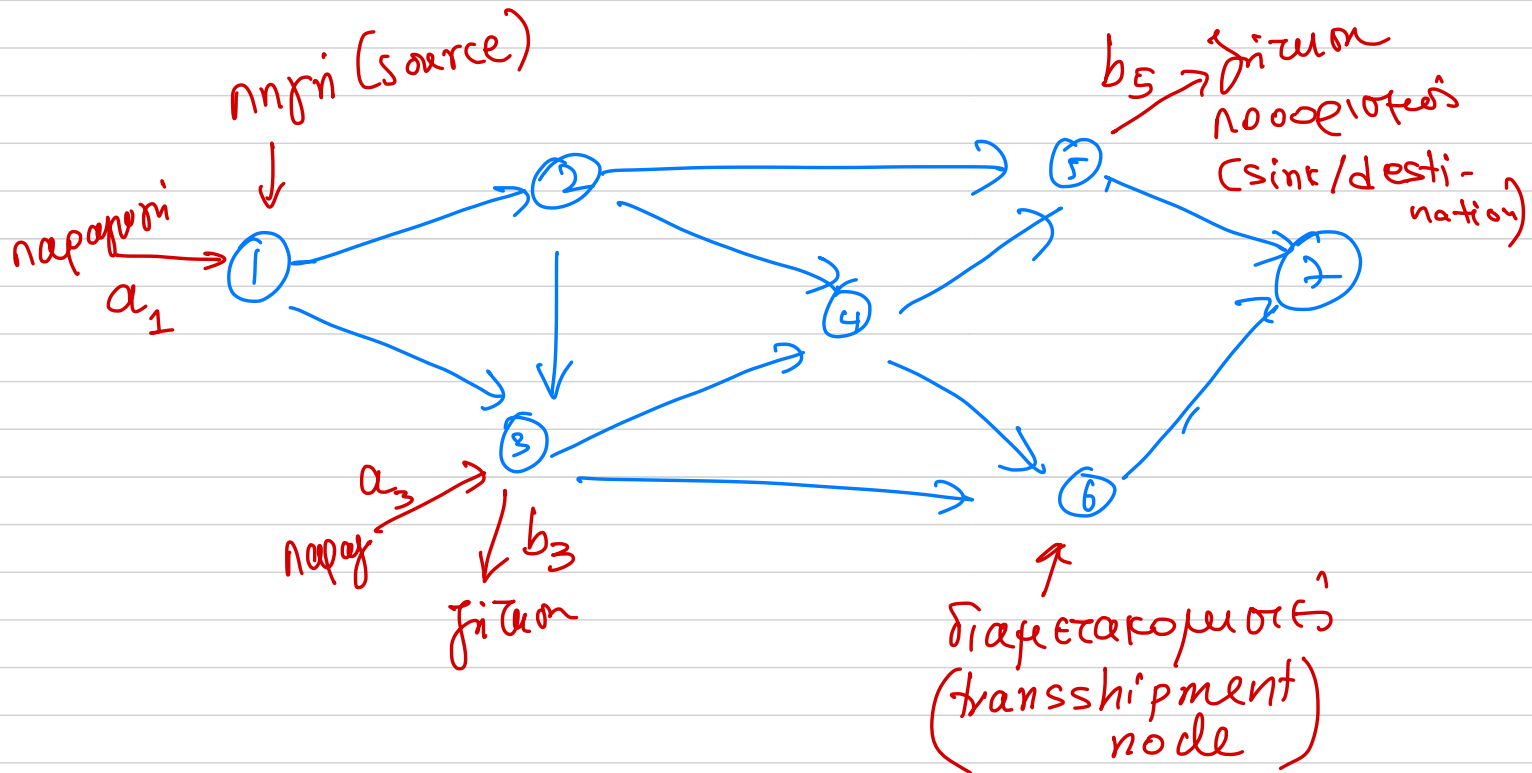
c_{it} : κόστος παρ.

h_{it} : κόστος ἀποθ.

$x_{it}, I_{it} \dots$

Προβλήματα ροής σε δίκτυα

Ένα προϊόν που διαρέμεται μέσω δικτύου εγκαταστάσεων



ακμή : δυνατότητα απευθείας μεταφοράς

$1 \rightarrow 2$: απευθείας

$1 \rightarrow 4$: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$
;

Γενικά V : σύνολο κορυφών $= \{1, \dots, N\}$
 E : σύνολο ακμών (προσανατολισμένες)

ακμή $= (i, j)$, $i, j \in V$, $i \neq j$ $(i) \rightarrow (j)$

$$E \subset V \times V$$

c_{ij} : κόστος / μισ προϊόντος που μεταφέρεται
συν ακμή (i, j)

v_{ij} : χωρητικότητα (i, j) [μέγιστη ποσότητα
μεταφοράς]

a_i : εισερχόμενη ποσότητα κορυφής i (διαθεσιμ)

b_i : εξερχόμενη (απαιτούμενη) ποσ. κορ. i

① Πρόβλημα διαμετακομίδης (capacitated
transshipment)

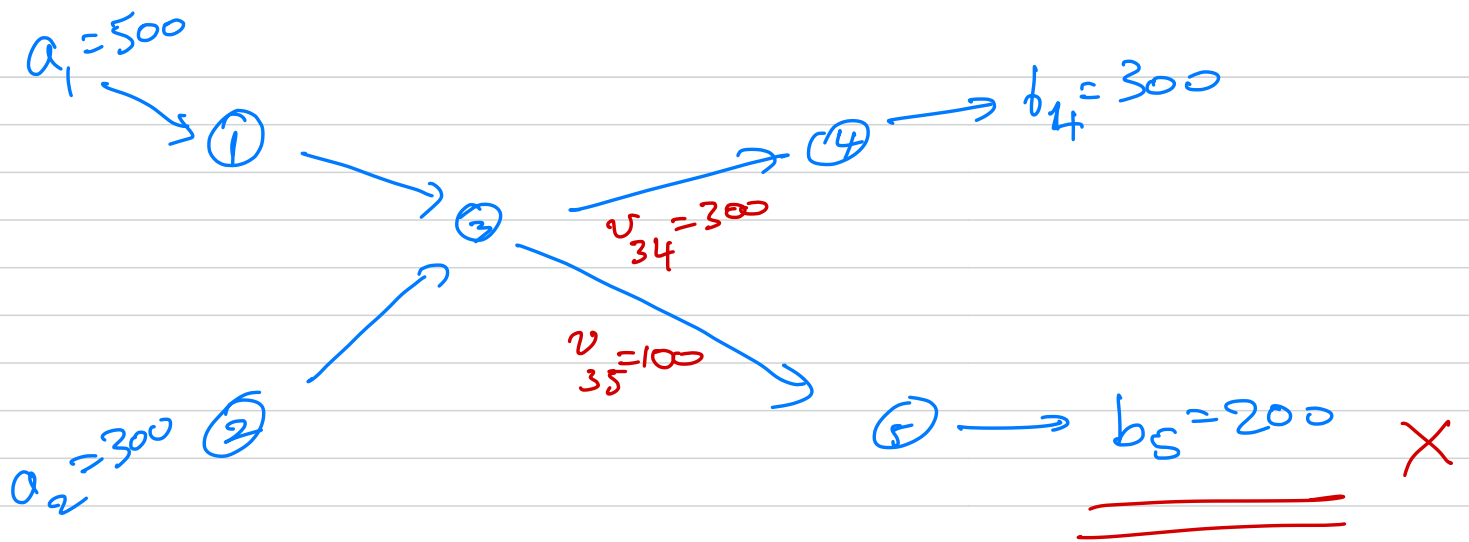
Να βρεθεί το σχέδιο μεταφοράς τ.ω.

να ικανοποιηθούν οι εξερχ. ποσότητες b_i

να + " οι ηερ. χωρητικότητες v_{ij}

να " " διαθεσιμότητας a_i

να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς

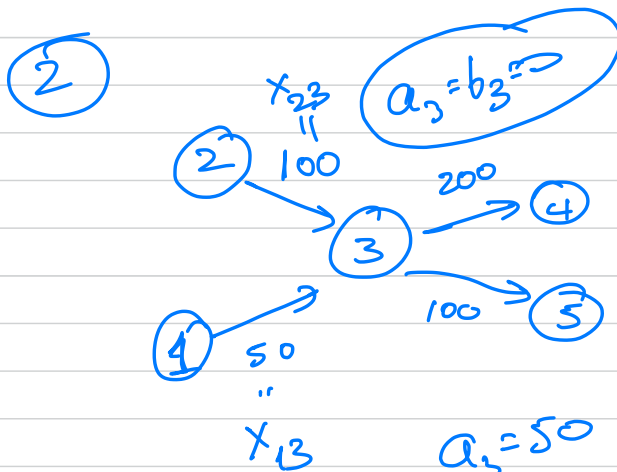


x_{ij} : ποσότητα που μεταφέρεται από ακμή $(i,j) \in E$

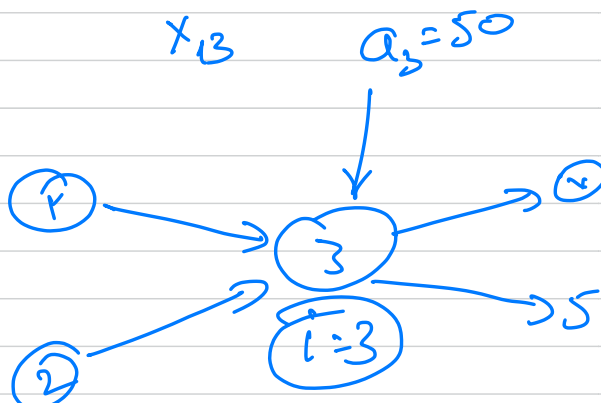
Αντικ. Συναρτηση : $\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

Περιορισμοί

① $x_{ij} \leq v_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$



$$x_{34} + x_{35} \leq x_{23} + x_{13}$$

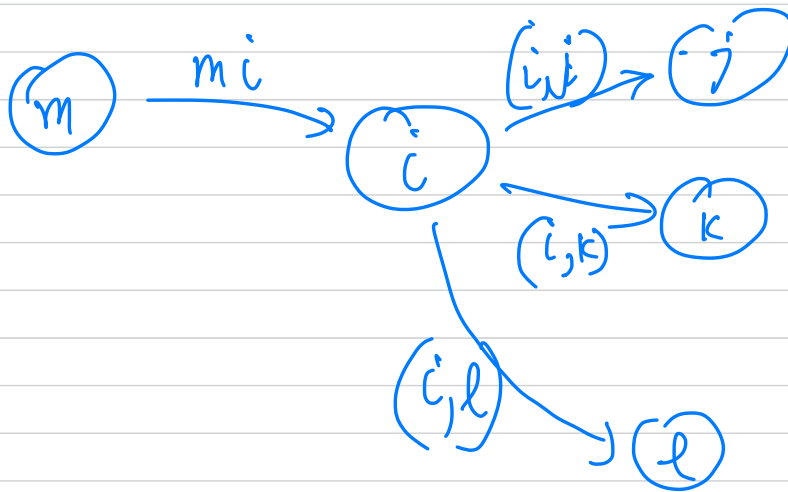


$$x_{34} + x_{35} \leq$$

$$a_3 + x_{13} + x_{23}$$

$$\text{Γενικά} \quad \sum_{j: (i,j) \in E} x_{ij} + b_i \leq \sum_{k: (k,i) \in E} x_{ki} + a_i$$

$$\forall i \in V$$



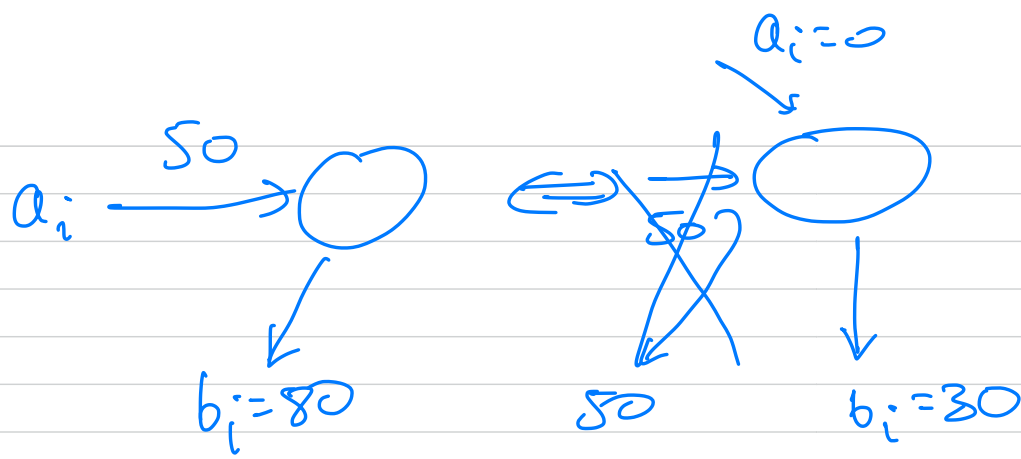
Ισοδύναμα

$$\sum_{j: (i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{k: (k,i) \in E} x_{ki} \leq a_i - b_i$$

$$\forall i \in V$$

περιορισμοί ποῖς
(flow-balance constraints)

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha & a_i = 50, \quad b_i = 80 \\ \eta & a_i = 10, \quad b_i = 40 \\ \eta & a_i = 0, \quad b_i = 30 \end{array} \right\} a_i - b_i = -30$$



x.b.y. υποδέχεται $a_i, b_i = 0$ $\begin{cases} a_i > 0, b_i = 0 & \text{source} \\ a_i = 0, b_i < 0 & \text{sink} \\ a_i = b_i = 0 & \text{transshipment} \end{cases}$

Ειδικές Περίπτώσεις

① Ποι ελάχιστων κόστους [$v_{ij} = +\infty$]

② Πρόβλημα μεταφορών (Transportation)

$$v_{ij} = \infty \quad \forall (i,j) \in E$$

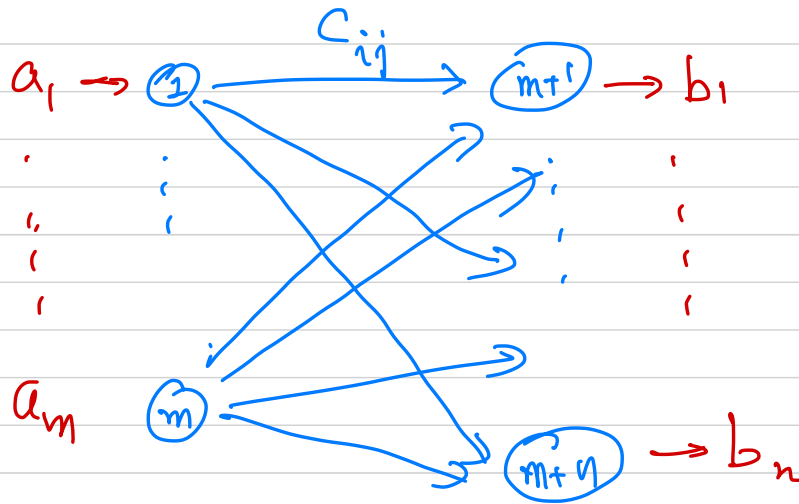
$$V_s = \{i : a_i > 0\} \quad \text{sources}$$

$$V_d = \{i : b_i > 0\} \quad \text{destinations}$$

$$V_t = \{i : a_i = b_i = 0\} \quad \text{transshipment}$$

$$Unod: \quad V_t = \phi \quad V = V_s \cup V_d$$

$$E_{flow} \quad E = V_s \times V_d$$



transportation problem

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in V_d} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in V_s$$

$$\sum_{i \in V_s} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in V_d$$

$$x_{ij} \geq 0$$

[.] εφικτή λύση αν $\sum a_i \geq \sum b_j$

Απόδ : ① " $\Rightarrow$ "

$$\sum_j b_j \leq \sum_j \sum_i x_{ij} \leq \sum_i a_i$$

②

" $\Leftarrow$ "

Εστω

$$\sum_i a_i \geq \sum_j b_j \Rightarrow$$

Κατασκευάζουμε
τον λήξιον
μια Εφικτή λύση
 $\{x_{ij}, (i,j) \in E\}$

Ισορροπημένο πρόβλημα : $\sum_{i \in V_S} a_i = \sum_{j \in V_d} b_j$

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = a_i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$