27/3/2026

Γεωμετρική Άποψη της μεθόδου Simplex

ΠΓΠ σε κανονική μορφή:

$$z = \max c'x \qquad x \in \mathbb{R}^n$$
$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad m<n$$
$$x \geq 0 \qquad r(A) = m$$
$$(b \geq 0) \qquad c \in \mathbb{R}^n, \ b \in \mathbb{R}^m, \ b \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad A = (1, 1) \qquad r(A) = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 = 10$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}\right\} \text{αδύνατο}$$

---

a_i : i-γραμμή του A, $i = 1, \dots, m$

A_j : j-στήλη του A, $j = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \iff \begin{cases} a_1'x=b_1 \\ a_2'x=b_2 \\ \vdots \\ a_m'x=b_m \end{cases} \iff \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 A_1 + \cdots + x_n \cdot A_n$$

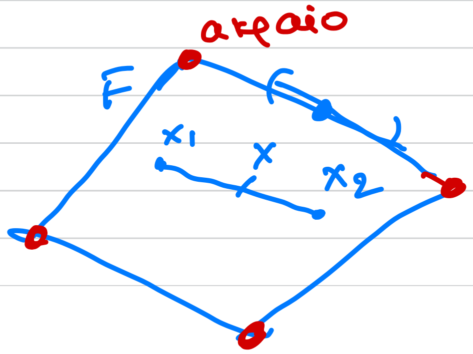
Ιδιότητες ΠΓΠ

Έστω $F = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax=b, \ x \geq 0 \}$

εφικτή περιοχή

1) F : κυρτό πολύεδρο (όχι αναγκαστικά φραγμένο)

2) Η F έχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών (ακραίων σημείων)



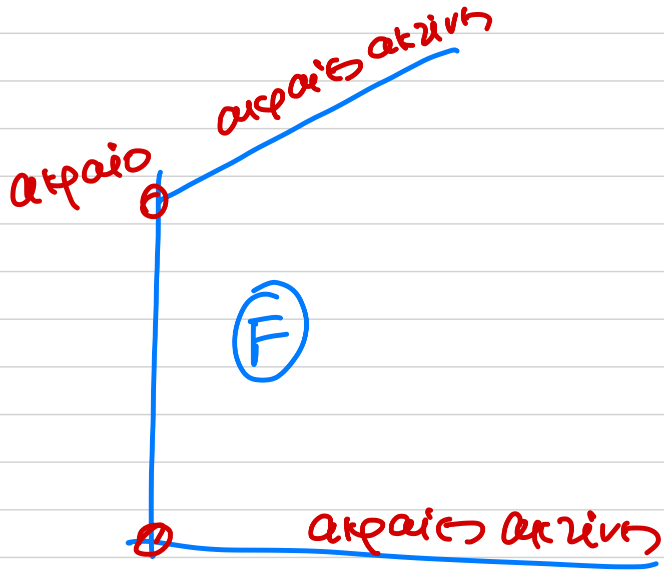
$x_1, x_2 \in F$

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

$\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow x \in F$

x° ακραίο σημείο : $\nexists\ x_1, x_2 \in F,\ x_1 \neq x_2$ κ' $\lambda \in [0,1]$: $x^\circ = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

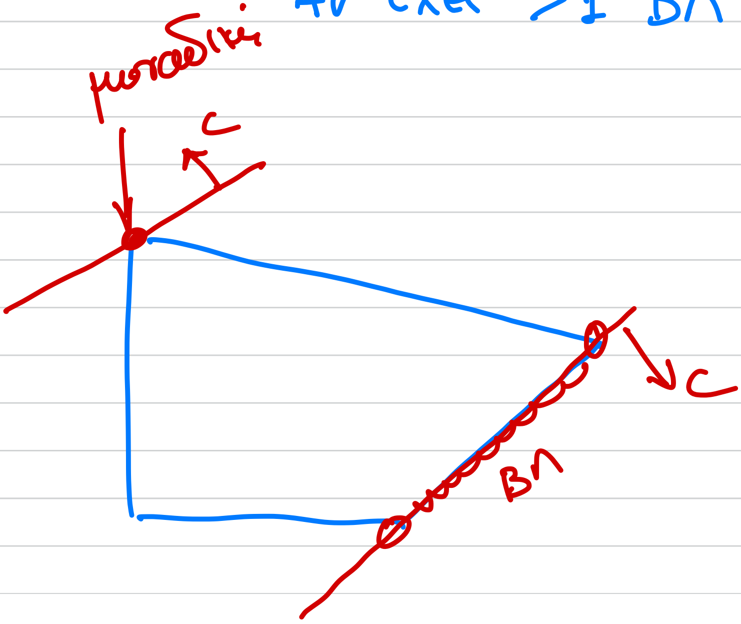


(3) Αν F φραγμένο ⇒ ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση

(4) Αν το ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή της F που είναι βέλτιστη λύση

⇐) Αν το ΠΓΠ έχει μοναδική ΒΛ ⇒ είναι κορυφή

Αν έχει >1 ΒΛ ⇒ $\exists$ τουλάχιστον 2 κορυφές ΒΛ κ' όλοι οι κυρτοί συνδυασμοί τους : ΒΛ



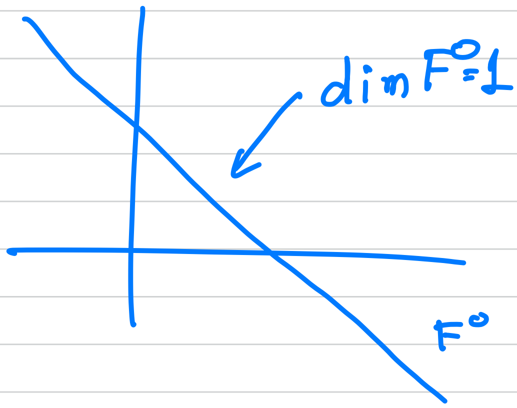
Επιπλέον ιδιότητες

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b , \ x \geq 0 \}$$

$$F^o = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \} \qquad (F \subset F^o)$$

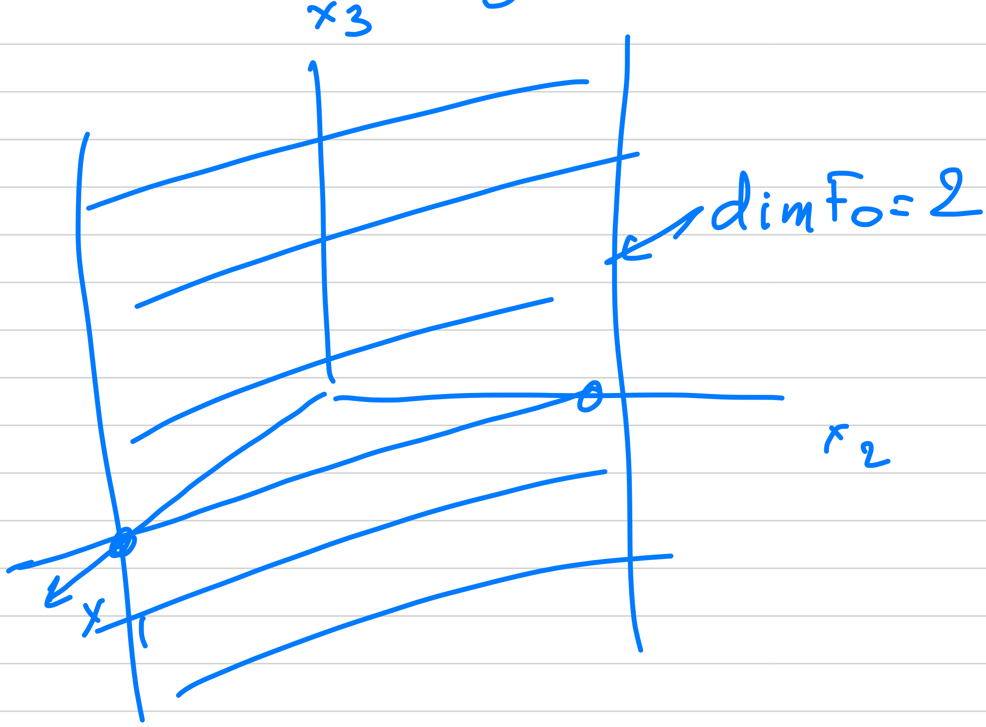
Πχ. $\overline{n=2,\ m=1}$

$F^o : \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1 \}$



$n=3, m=2$

$F^o : \{ x \in \mathbb{R}^3 : \underset{x_3}{\overset{x_1 + x_2 + 0x_3 = 1}{x_1 + x_2 = 1}} \}$

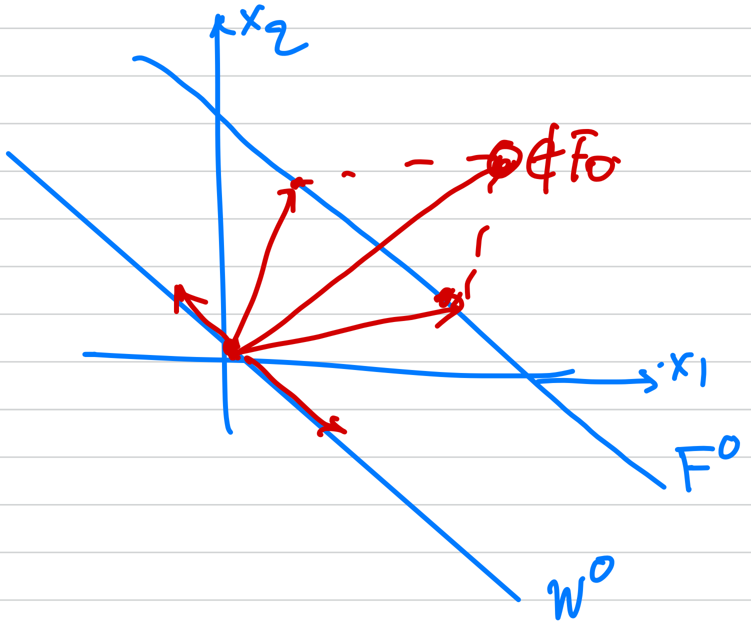


Γενικά $\dim F^o = n - m$, F^o : υπερεπίπεδο.

$$W^0 = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$F^0 : x_1 + x_2 = 1$

$W^0 : x_1 + x_2 = 0$



$\dim W^0 = n - m$: γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\forall \; x^1, x^2 \in W^0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in W^0$$

Εστω $x^1, x^2 \in W^0 \Rightarrow Ax^1 = 0$, $Ax^2 = 0$

$$\Rightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 : A \cdot (\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in W^0$$

$$W^0 = \ker(\gamma_A) \quad : \quad \gamma_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \gamma_A(x) = Ax$$

Εστω $x^0 \in F^0$: $Ax^0 = b$

Τότε $\forall \; x \in F^0 \quad \exists \; y \in W^0 : x = x^0 + y$

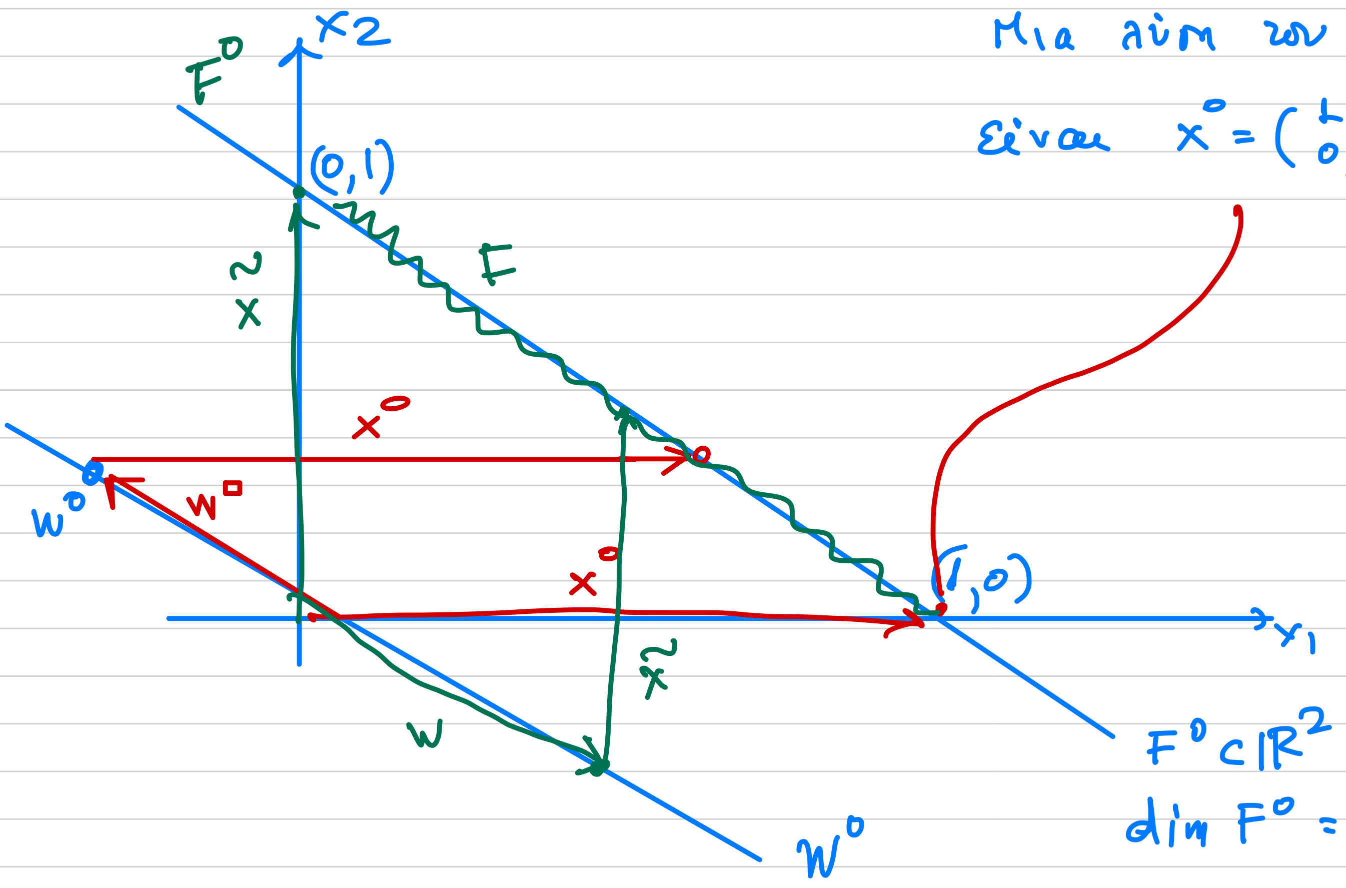
δηλαδή $F^0 = x^0 + W^0 \equiv \{ x^0 + w^0 : w^0 \in W^0 \}$

Παράδειγμα $x_1 + x_2 = 1$ $x \in \mathbb{R}^2$ $A = (1, 1)$

$F^0 : \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1 \}$

$W^0 : \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0 \}$

Μια λύση του $x_1 + x_2 = 1$ είναι $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$F^0 \subset \mathbb{R}^2$

$\dim F^0 = 1$

Έστω $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

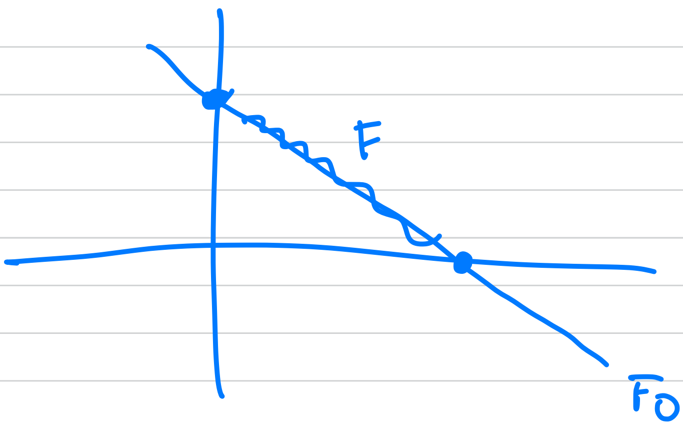
Επιστρέφουμε στην εφικτή περιοχή του ΠΓΠ

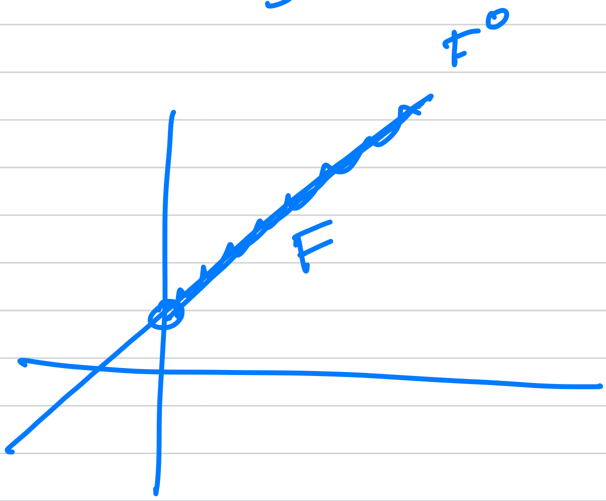
$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ x \geq 0\} = F^0 \cap \mathbb{R}^n_+$$

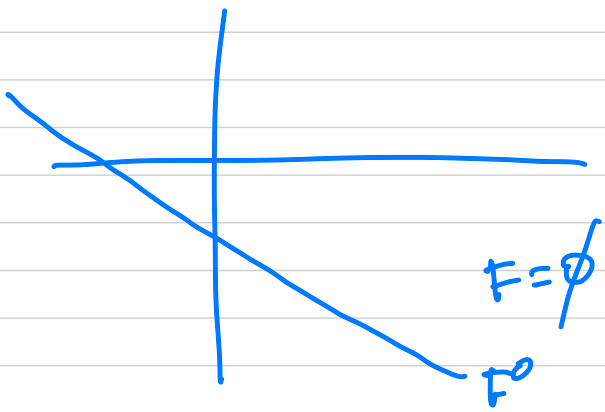
Οι κορυφές αντιστοιχούν στα σημεία τομής του F^0 με τους άξονες του $\mathbb{R}^n$

θετικός ημιάξονας j : $\{x \in \mathbb{R}^n : x_k = 0 \ \ k \neq j\} =$

$$= \left\{ \lambda \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \ \lambda \geq 0 \right\}$$







$F^0 \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \dim F^0 = n - m \Rightarrow F$: κυρτό πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-m$

Αν $n - m = 2 \Rightarrow F$ έχει γεωμ. αναπαράσταση στο επίπεδο

Παράδειγμα

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$n = 4$, $m = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2$, $b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

$F^0 = \{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b \} \leftarrow \dim F^0 = 2$

$F = F^0 \cap \mathbb{R}^4_+$

$W^0 = \{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0 \}$

Τρ. 1 $\quad$ Λύνω ως προς x_1, x_2:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 5 + x_1 - x_2 \end{array}$$

Θέτω : $x_1 = t_1$
$\quad x_2 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$x_3 = 10 - 2t_1 - 2t_2$$

$$x_4 = 5 + t_1 - t_2$$

$$\Rightarrow \forall x \in F \Rightarrow \quad x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}} + \underbrace{t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{W^0}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \in F \quad \Rightarrow \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + W^0$$

W^0 : γρ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τη βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

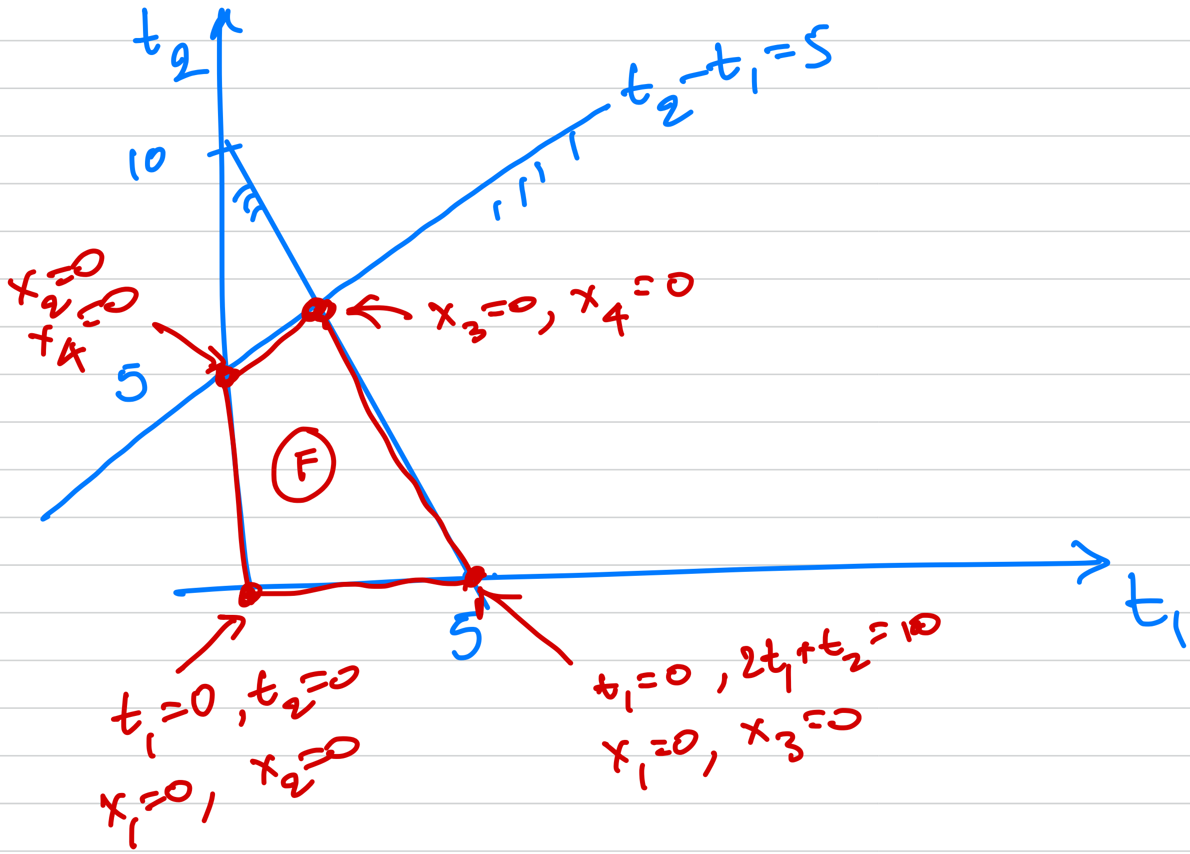
$F = F^0 \cap \mathbb{R}^4_+$:

$x_1 \geq 0 \iff t_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0 \iff t_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \iff 10 - 2t_1 - t_2 \geq 0 \iff 2t_1 + t_2 \leq 10$

$x_4 \geq 0 \iff 5 + t_1 - t_2 \geq 0 \iff t_2 - t_1 \leq 5$



<u>Παρ. 2</u> Εναλλακτικά αν λύσουμε ως προς x_1, x_2

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

$$x_2 = \frac{20}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

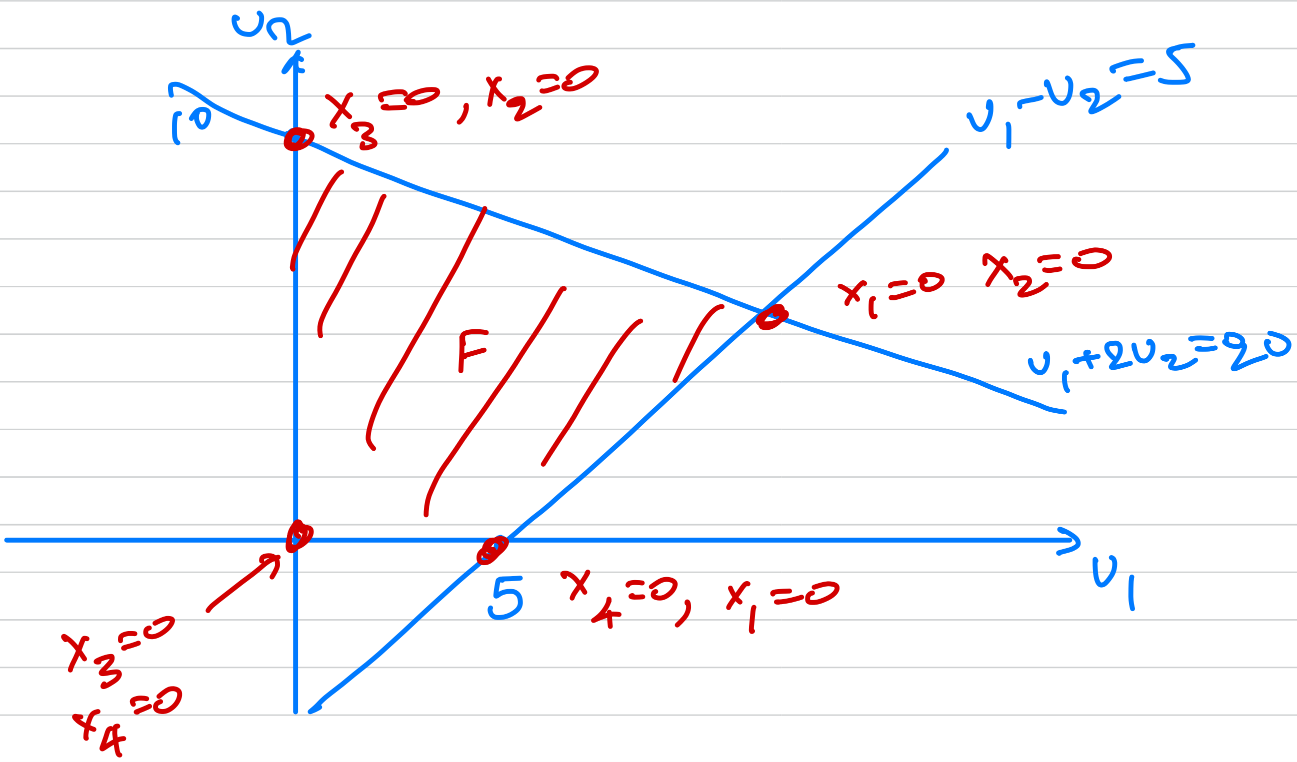
$$\underline{x} \in F : \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{v_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{W^0}$$

$x_1 \geq 0 \Rightarrow \quad u_1 - u_2 \leq 5$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow \quad u_1 + 2u_2 \leq 20$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow \quad u_3 \geq 0$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow \quad u_4 \geq 0$



Εναλλακτική Γεωμετρική Ερμηνεία.

$$Ax=b \iff \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

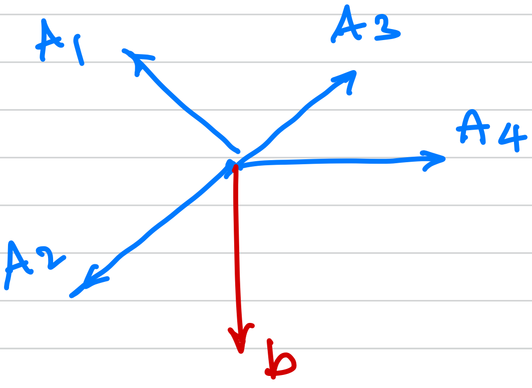
$x \iff$ έκφραση του b ως γραμμ. συνδ. των στηλών του A.

$A_{m\times n}$

Έχουμε υποθέσει $\quad \text{rank}(A) = m < n$

$b \in \mathbb{R}^m$

Έστω $m=2$ $\quad b \in \mathbb{R}^2$, $A_j \in \mathbb{R}^2$



$A = (A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4)$

$b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$

βάση $\mathbb{R}^2$

1) (A_2, A_4) $\quad b = x_2^1 A_2 + x_4^1 A_4$ τεσοσήμαντα.

μια λύση του $Ax=b$: $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^1 \\ 0 \\ x_4^1 \end{pmatrix} \geq 0 \in F$

2) (A_1, A_2) : $b = \underset{<0}{x_1^2} A_1 + \underset{>0}{x_2^2} A_2$, $\quad x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ngeq 0 \notin F$

3) $A_2 A_3$ δε γίνεται. $\quad$ ✗

$F = \{Ax = b, \; x \geq 0\}$