30-3-2026

Βασικές Εφικτές Λύσεις

$$F = \{ Ax = b \ , \ x \geq 0 \} \qquad \left(A_{m\times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n \right)$$

Ορισμός Έστω $x \in \mathbb{R}^n$

$$I^+(x) = \{ j : x_j > 0 \}$$

$$I^-(x) = \{ j : x_j < 0 \}$$

$$I^0(x) = \{ j : x_j = 0 \}$$

$$I^+(x) \cup I^-(x) \cup I^0(x) = \{1, \ldots, n\}$$

(διαμέριση)

Για $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

έστω $A_I = (A_j \ , \ j \in I)_{m \times |I|}$

$n=7$

Πχ. $I = \{2,3,4\}$ $\quad A_I = (A_2 \ A_3 \ A_4)$

$$A = \Big(\underset{A_1}{} \quad \underbrace{[\ ]\ [\ ]\ [\ ]}_{A_I} \quad \underset{A_n}{} \Big)$$

Ορισμός 1 $x \in \mathbb{R}^n$ Βασική Λύση αν:

1) $Ax = b$

2) $A_{I^+(x) \cup I^-(x)}$: έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες

Δηλ. οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες του x είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ορισμός 2 $x \in \mathbb{R}^n$ Βασική Εφικτή Λύση αν x Βασική Λύση και $x \geq 0$

Παρατηρήσεις ① Έστω x Βασική Λύση

Τότε $|I^+(x) \cup I^-(x)| = k \leq m = r(A)$

② Έστω $I^+(x) \cup I^-(x) = \{B(1), \ldots, B(k)\}$

$x_j \neq 0 \quad j = B(1), \ldots, B(k)$

$x_j = 0$ διαφορετικά

③ Οι στήλες $A_{B(1)}, \dots, A_{B(k)}$: γραμ. ανεξάρτητες

Αν $k = m \Rightarrow \left(A_{B(1)} \dots A_{B(m)}\right)_{m\times m}$ αντιστρέψιμος

$A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$: βάση του $\mathbb{R}^m$

Τότε ο $B = \left(\overbrace{A_{B(1)} \dots A_{B(m)}}^{x_j \neq 0}\right)$: βασικός πίνακας

Αν $k < m$ $\quad \overbrace{A_{B(1)}, \dots, A_{B(k)}}^{\text{γρ. ανεξ.}}$

(από θ. συμπλήρωσης βάσης)

$\exists$ επιπλέον $m-k$ στήλες του A

$B(k+1) \dots B(m)$ τέτοιες ώστε

$$B = \left(\overbrace{A_{B(1)} \dots A_{B(k)}}^{x_j \neq 0} \; \overbrace{A_{B(k+1)} \dots A_{B(m)}}^{x_j = 0}\right)$$

είναι βασικός πίνακας

Πρόταση $x \in \mathbb{R}^n$ βασική λύση αν

1) $Ax = b$

2) $\exists$ δείκτες $\{B(1), \dots, B(m)\}$ τ.ω

$A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$: γραμμ. ανεξάρτητες

και $I^+(x) \cup I^-(x) \subseteq \{B(1), \dots, B(m)\}$

Έστω $B = (A_{B(1)} \; \dots \; A_{B(m)})$ βασικός πίνακας (βάση)

Βασική λύση

$$x = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \\ x_{B(m+1)} = 0 \\ \vdots \\ x_{B(n)} = 0 \end{pmatrix}$$

βασικές συνιστώσες του x που αντιστ. στη B

μη βασικές $(=0)$

Έστω B βάση του A

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Τότε $\quad Ax = Bx_B + Nx_N$ $\quad$ (δείξτε το!!)

$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow$

$\Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b + B^{-1}Nx_N$

Θέτοντας $\quad x_N = 0 \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1}b$

η ΒΛ είναι η $= \underline{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \\ \Big\}\, n-m \\ \end{matrix}$

Επομένως κάθε βασικός πίνακας προσδιορίζει μονοσήμαντα μια βασική λύση

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά το μονοσήμαντα.

<u>Ορισμός</u> Μια ΒΛ x είναι <u>μη-εκφυλισμένη</u> (non-degenerate)

αν $\quad |I^+(x) \cup I^-(x)| = m$

διαφορετικά $|I^+(x) \cup I^-(x)| < m \Rightarrow$ <u>εκφυλισμένη</u>

Εστω x μια εκφυλισμένη ΒΛ $\qquad x_j$

με $I^+(x) \cup I^-(x) = \{B(1), \dots, B(m)\}$ $\quad (\neq 0)$

τότε $B = (A_{B(1)} \dots A_{B(m)})$ βασικός

και $\quad x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Τότε ο B προσδιορίζεται μοναδικά

Αν η x εκφυλισμένη $I^+(x) \cup I^-(x) = \{B(1), \dots, B(k)\}$

$k < m$

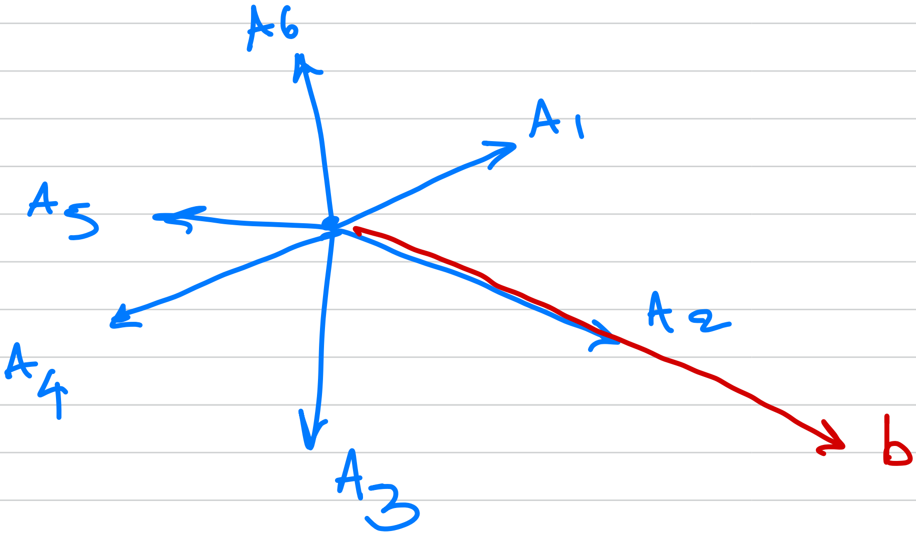
τότε έστω μια συμπλήρωση βάσης

$$B = (\underbrace{B(1) \dots B(k)}_{A_{I^+(x) \cup I^-(x)}} \; \underbrace{B(k+1) \dots B(m)}_{\text{συμπλήρωση}})$$

$$Ax = b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} {}^{k} \neq 0 \\ {}_{m-k} = 0 \end{matrix}\right\} \text{βασικές} \\ \left.\begin{matrix} = 0 \end{matrix}\right\} \text{μη βασικές} \end{matrix}$$

Παράδειγμα 1

$n=6$, $m=2$



$$A = (A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6)_{2\times 6} \qquad r(A)=2$$

(1) $B = (A_1, A_5)$ βάση $\Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} \neq 0$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \neq 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

μη εκφυλισμένη

ΒΛ $\Leftrightarrow$ B μη εφικτή $x_1, x_5 < 0$

(2) $B = (A_1, A_3) \Rightarrow$ ΒΕΛ $x = \begin{pmatrix} x_1 > 0 \\ 0 \\ x_3 > 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ μη εκφυλισμένη

③ Παρατηρώ $b = \lambda A_2$

Επομένως η $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι λύση $Ax = b$

είναι βασική $I^+(x) \cup I^-(x) = \{2\}$

η x : εκφυλισμένη $k=1$, $m=2$.

$$A_{B(2)} = (A_2)$$

<u>Συμπληρώσεις</u>

$$B^1 = (A_2 \ A_3) \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_B$$

$$B^1 x = b \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Αν $B^2 = (A_2 \ A_4)$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\lambda} \\ 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_B

Στη ΒΛ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ αντιστοιχούν >1 βασικοί πίνακες

Θεώρημα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ΒΕΛ ανν:

x είναι κορυφή της F

Παράδειγμα

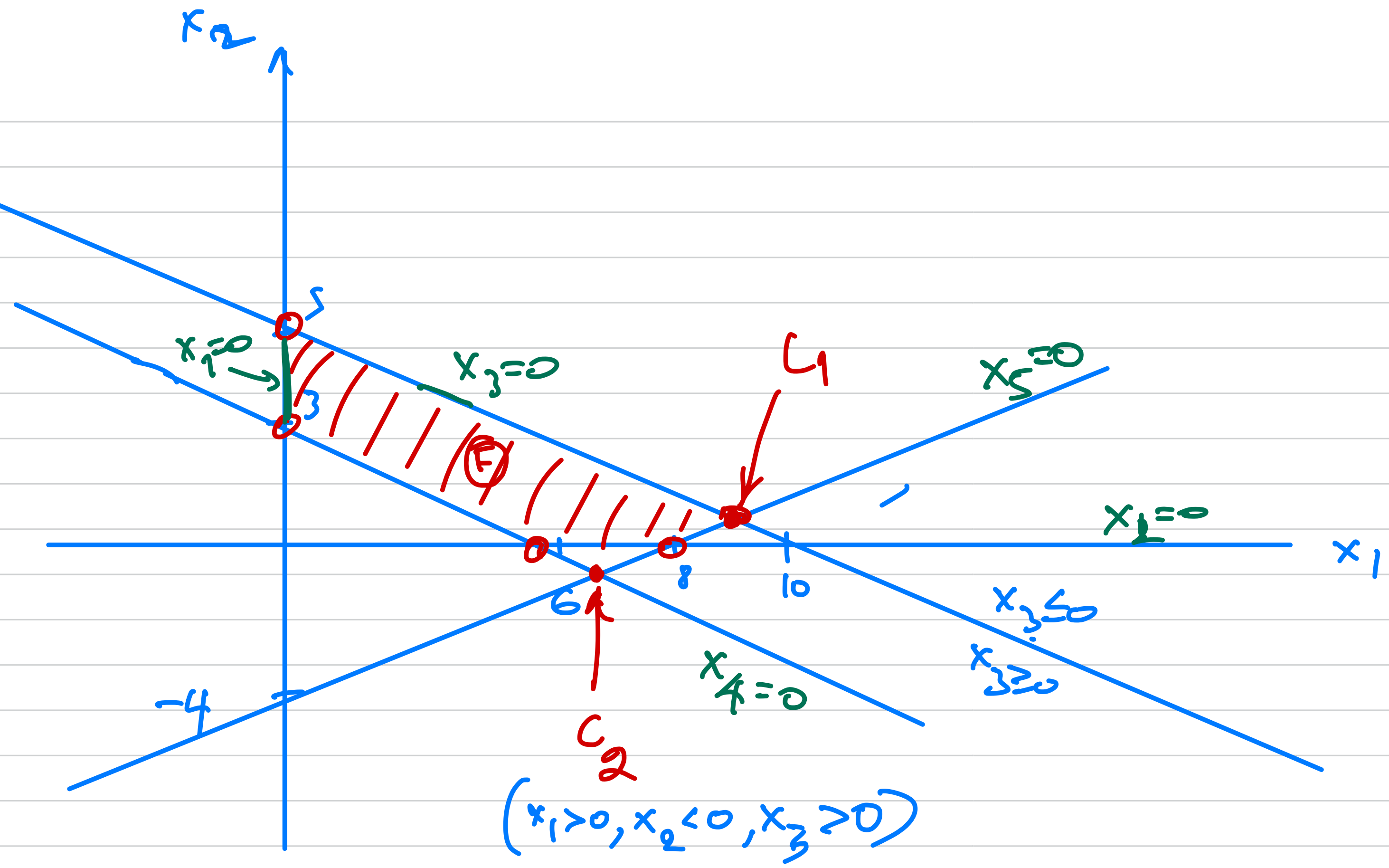
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 12 \\ x_1 - 2x_2 &\le 8 \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

ΚΜ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 \quad\quad - x_4 \quad &= 12 \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad\quad + x_5 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 5} \qquad \begin{aligned} m&=3 \\ n&=5 \end{aligned}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{5}{3} = 10$$



C_1 : κορυφή : $\left.\begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$ μη βασικές μεταβλητές

$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_4 > 0$

Επομένως η $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι <u>ΒΕΛ</u> μη εκφυλ.

ακριβώς 3 $\neq 0$

$$B = (A_1 \; A_2 \; A_4) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$ βάση

$\exists B^{-1}$

$\det(B) \neq 0$.

Πόσες ΒΕΛ υπάρχουν; (άνω φράγμα;)

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m < n$$
$$x \geq 0 \qquad r(A) = m$$
$$b \geq 0$$

$$|\{BE\Lambda\}| \leq |\{B\Lambda\}| \leq |\{B : \text{βασικός πίνακας}\}|$$

$$\leq \{|\, m\times m \text{ υποπιν. του } A|\} = \binom{n}{m}$$

$$= \binom{n}{n-m}$$

Παραδ. $B = (A_1\ A_2\ A_3) \iff \underbrace{x_4 = x_5 = 0}_{\text{μη βασικές}}$

? Βασικός ?

Η λύση $Bx_B = b$ αντιστοιχεί στο σημείο τομής των ευθειών $\left.\begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{σημείο } C_2}$

$|B| \neq 0$

Η C_2 είναι ΒΕΛ? <u>όχι</u>

Στο παράδειγμα υπάρχουν 9 σημεία τομής 2 ευθειών άρα 9 ΒΛ

Οι $x_3=0$, $x_4=0$ παράμετρες

Δηλ. αν θέσουμε $x_3=0$, $x_4=0$ το σύστημα των $\underbrace{x_1, x_2, x_5}$ δεν έχει λύση

Αυτός αντιστοιχεί στον πίνακα

$$B=(A_1, A_2, A_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B|=0 \quad (A_2 = 2A_1 + 4A_5)$$

Αν μια ΒΛ είναι μη εκφυλισμένη

$x_B \neq 0$ (όλες οι μη ορισμένες)

οι μόνες $x_j=0 \Leftrightarrow$ μη βασικές μεταβλητές

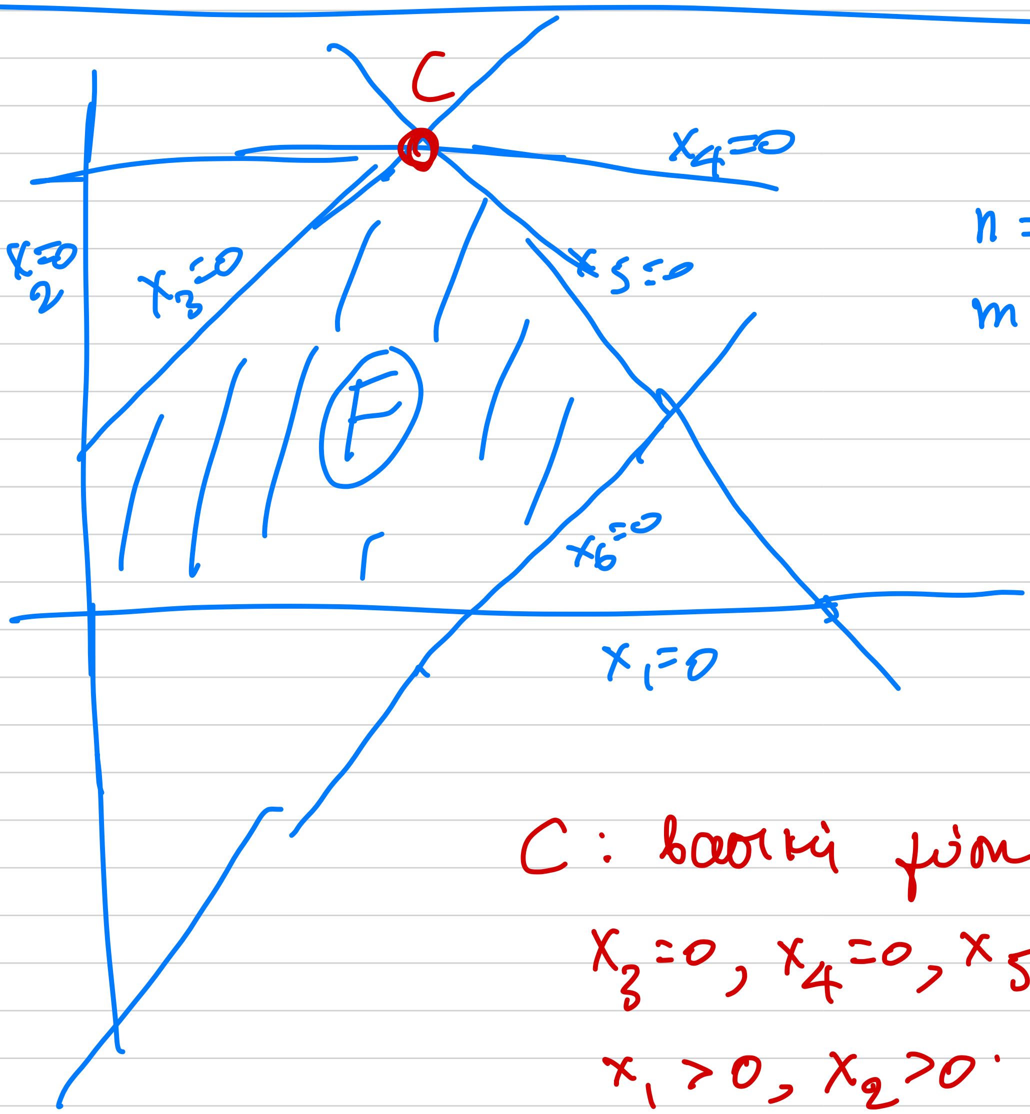
$\Downarrow$

Εδώ $n=5$, $m=3$ μόνο 2 μεταβλ. μηδενίζονται

Άρα μια ΒΛ είναι μη εκφυλισμένη

αν μόνο 2 μεταβλητές $x_j=0,\ x_k=0$

$\Leftrightarrow$ στο αντίστοιχο σημείο τέμνονται ακριβώς 2 ευθείες



$n=6$

$m=4$

C : βασική λύση

$x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=0$

$x_1>0,\ x_2>0$.

$B_1=(A_1\ A_2\ A_3) \to$ βασικός

$(x_4=x_5=0)$ μη βασικές $\Rightarrow B_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b$ έχει μοναδική λύση. (C)

$(x_3 = x_5 = 0) \Rightarrow B_2 = (A_1 \quad A_2 \quad A_4)$
μη βασικές

$B_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = b$ έχει μοναδική λύση (C)

Μέθοδος Simplex – αλλαγή βάσης

Βασικό Θεώρημα ΓΠ

Αν ένα ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση τότε
∃ τουλάχιστον μια ΒΕΛ που είναι βέλτιστη.

Θεωρούμε την περίπτωση:

1) $F = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ φραγμένο σύνολο
2) όλες οι ΒΕΛ είναι εκφυλισμένες

1) ⇒ ΠΓΠ έχει λύση

2) αρ. ΒΕΛ $\leq \binom{n}{m}$

έστω $K(F) = \{ΒΕΛ\}$

ΒΕΛ ⇒ μοναδικός βασικός πίνακας B

Βασικός πίνακας $B \Rightarrow$ μοναδική βασική λύση

Αλγόριθμος απαρίθμησης

0) $S = \{ \}$

1) Επιλέγουμε $B_{m \times m}$ υποπ. του A

2) Αν $|B| = 0$ επιστρ. στο 1

3) Αν $|B| \neq 0 \Rightarrow x_B = B^{-1} b$

- αν $x_B \geq 0$ $\Rightarrow S = S \cup \{x_B\}$
  (ΒΕΛ)
  επιστρ στο 1

- αν $x_B \ngeq 0$ $\Rightarrow$ επιστρ. στο 1

Στο τέλος $S = K(F)$, $|S| < \infty$

Έστω $Z = \max\{cx : x \in S\}$ $\leftarrow$ βέλτιστη λύση του ΓΠΠ.

Πεπερασμένος αλγόριθμος
μη ρεαλιστικός
(εκθετική πολυπλοκότητα)

$|S| \approx \binom{n}{m}$

Simplex : Συστηματικός αλγόριθμος αναζήτησης κορυφών

(αλγόρ. πεπερασμένης βελτίωσης)

· Για κάθε ΒΕΛ :

① Κριτήριο βελτιστότητας

Ελεγχος αν η ΒΕΛ είναι βέλτιστη χρησιμοποιώντας πληροφορία μόνο από αυτή τη λύση (B, x_B)

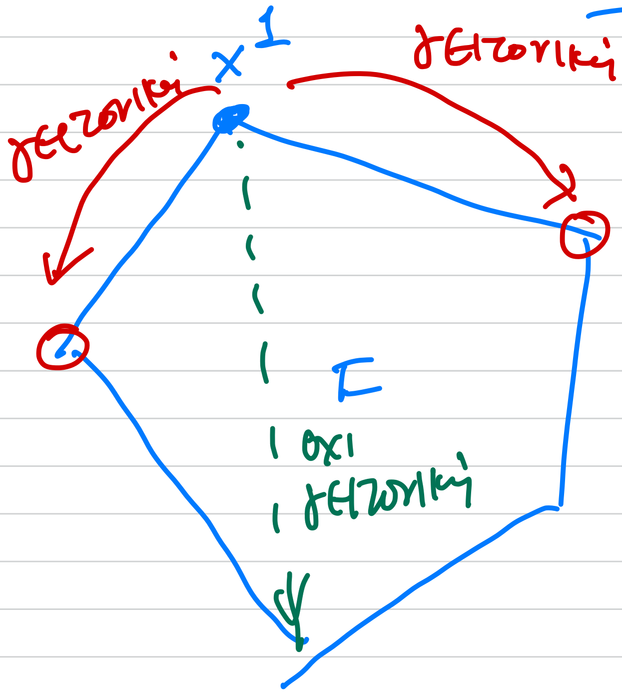
② Μέθοδος βελτίωσης

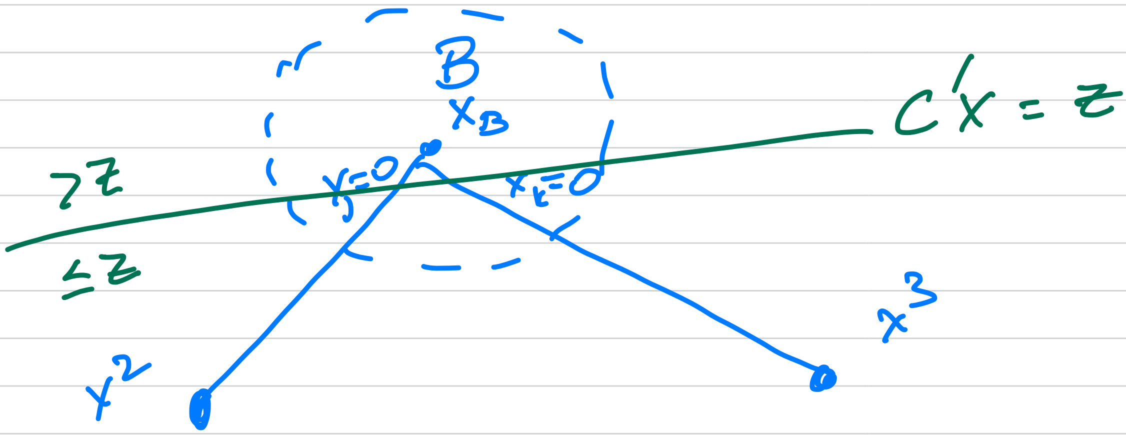
Αν η x_B δεν είναι βέλτιστη $\exists$ τρόπος μετάβασης σε μια νέα $x_{B'}$ τέτοια ώστε $c'x_{B'} > c'x_B$

Αφού F φραγμένο $(|K(F)| < \infty)$

ο παραπάνω αλγόριθμός βρίσκει βέλτιστη λύση σε $< \infty$ αρ. βημάτων

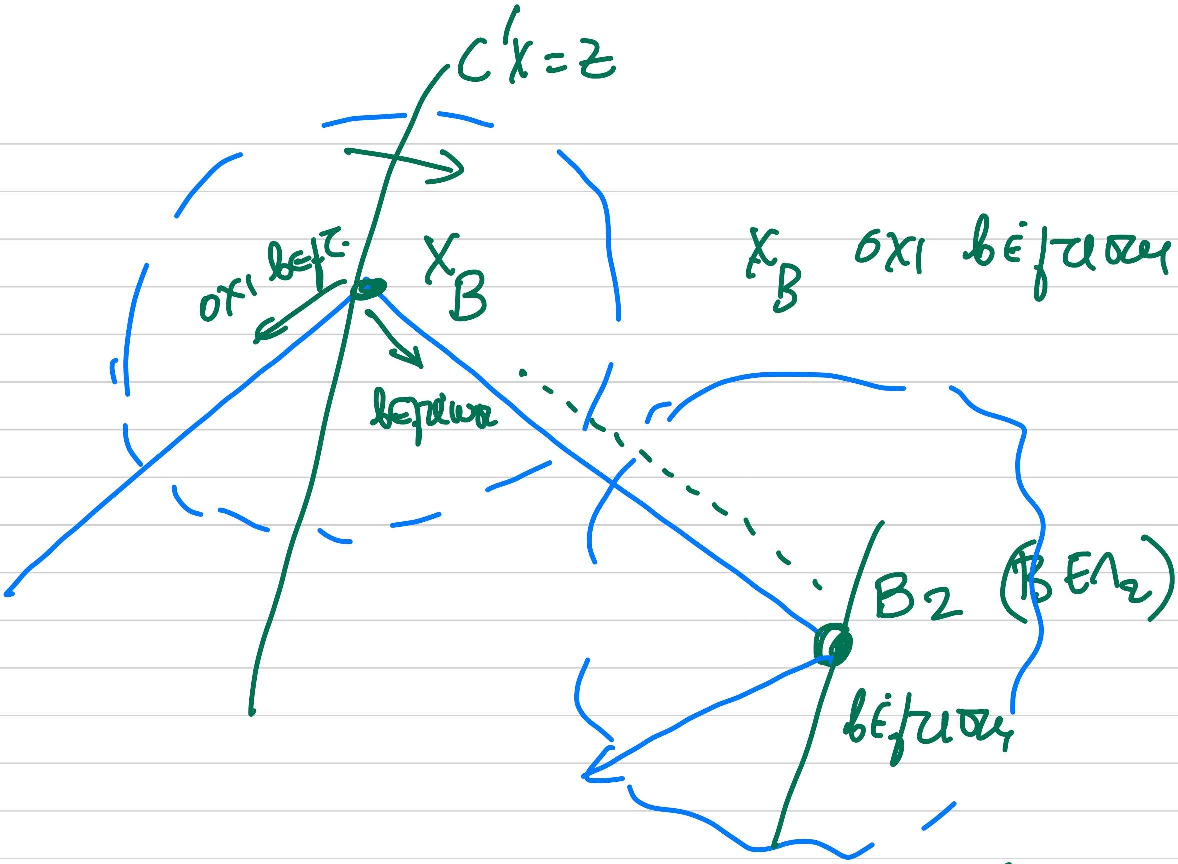
Simplex : περίπατος μεταξύ γειτονικών κορυφών



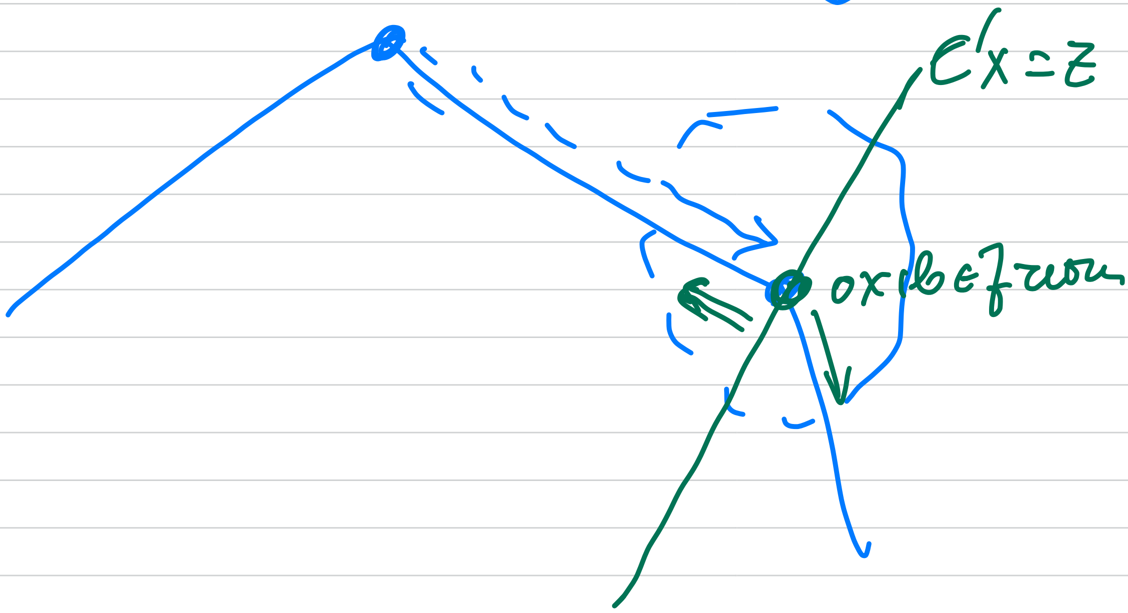


Αν μπορώ να δείξω ότι

$$\left.\begin{aligned} c'x_B &\geq c'x^2 \\ c'x_B &\geq c'x^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_B \text{ βέλτιστη}$$



C'x=z
όχι δέχ.
X_B
δέχεται
X_B όχι δέχεται
B_2 (B∈Λ_2)
δέχεται



C'x=z
όχι δέχεται