

20/4/2026

$$\max c'x$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax=b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} F$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m < n \quad r(A) = m$$

Βασική εφικτή λύση $\Leftrightarrow$ κορυφή (F)

Βασικός πίνακας $B_{m \times m} \quad \det(B) \neq 0$

$$B \Rightarrow \begin{array}{l} x_B = B^{-1}b \\ \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Βασικός} \\ \text{μη βασικός} \\ \underline{x}_N = 0 \end{array} \right.$$

$A \underline{x} = b$: βασική λύση

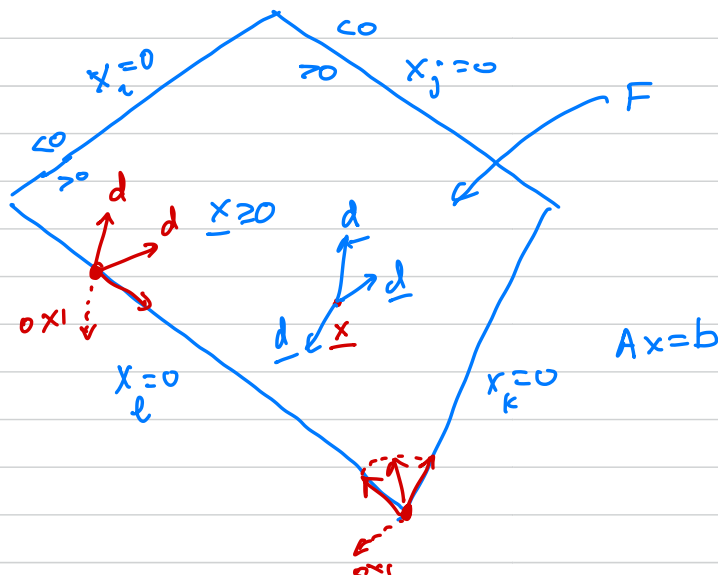
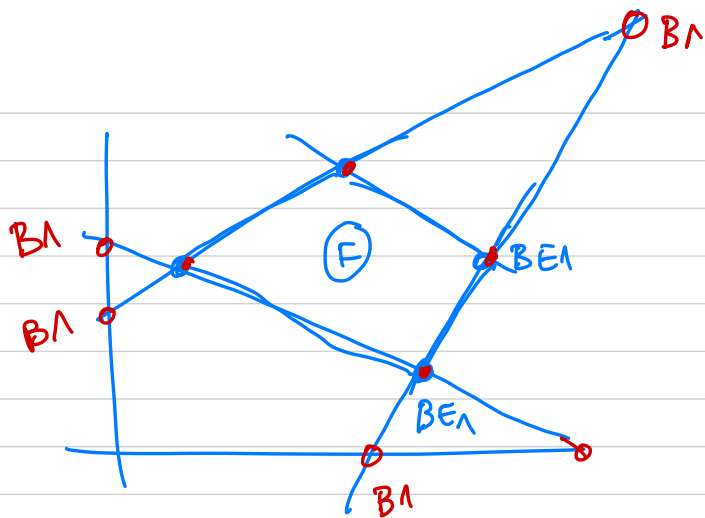
$\text{Αν } \underline{x} \geq 0 \Rightarrow \text{βασική εφικτή λύση} \Rightarrow \text{κορυφή της } F$

$$Ax=b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow$$

$$A = \left(\underbrace{B}_{\substack{\text{πίνακας} \\ m \times m}} \quad \underbrace{N}_{m \times (n-m)} \right) \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ αυθαίρετο}$$

Θέτουμε $x_N = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ 0 \end{pmatrix}$ βασική λύση
αποτελ. από B



Εάν $\underline{x} \in F$: $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται διεύθυνση από το $\underline{x}$
 αν $\exists \theta > 0 : \underline{x} + \theta \underline{d} \in F$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} \in F \Rightarrow A\underline{x} = b \\ \text{Εφόσον } \underline{x} + \theta \underline{d} \in F \Rightarrow A\underline{x} + \theta A\underline{d} = b \end{array} \right\} \Rightarrow A\underline{d} = 0$$

αναγκαστικά συνδυάζει

$$\Rightarrow d \in W^0 = \{x: Ax=0\}$$

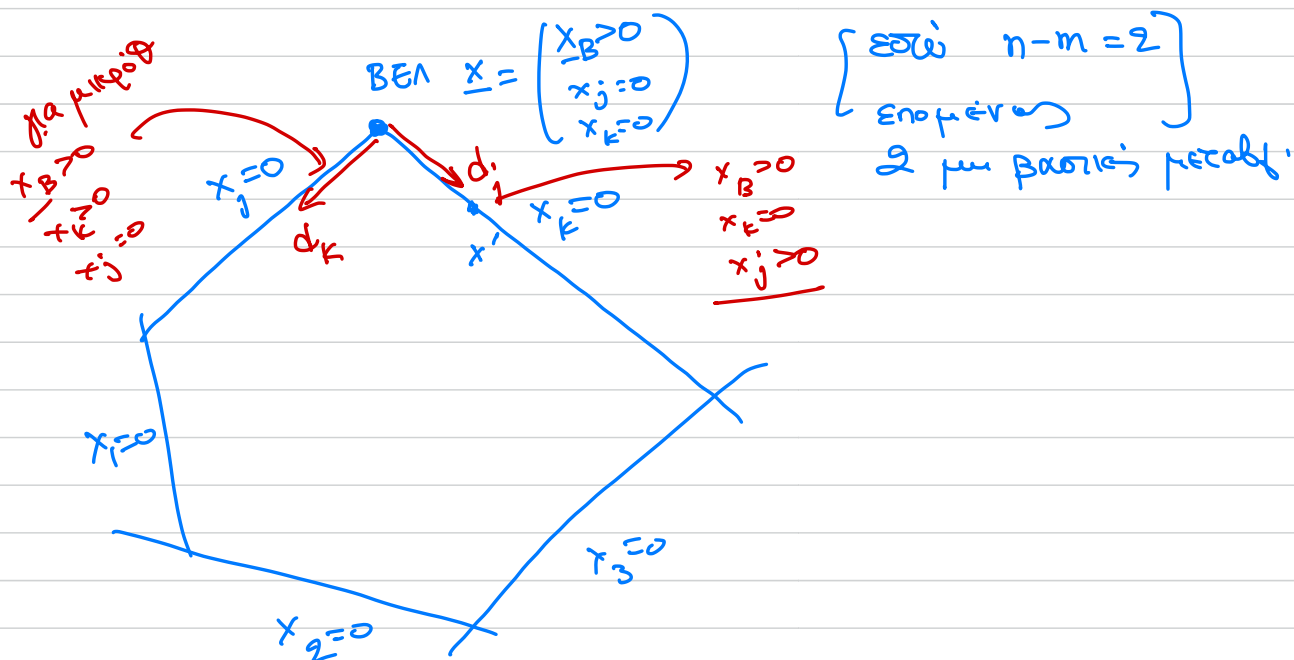
ΒΕΛ κ' εφικτές κατασκευές

Έστω ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B (με εφικτή-
σφαιρική $\Rightarrow$
 B μοναδικός)

Τότε $x_i > 0$ για $i = B(1), \dots, B(m)$ [βασικές συνιστώσες]

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \dots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

$x_j = 0$ για $j \neq B(1), \dots, B(m)$ [μη βασικές συνιστώσες]



$d_j = ?$

$$d_j \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} d_{jB} \\ d_{ji} \\ d_{jk} \end{pmatrix}$$

$\exists \theta > 0$ $A d_j = 0$

Ενισχύ $\underline{x}' = \underline{x} + \theta d_j = \begin{pmatrix} x_B + \theta d_{jB} \\ 0 + \theta d_{ji} \\ 0 + \theta d_{jk} \end{pmatrix}$

$x'_j > 0 \Rightarrow d_{ji} > 0$
 $x'_k = 0 \Rightarrow d_{jk} = 0$

$x \in \gamma$ θεωρώ $d_{ij} = 1 \Rightarrow \underline{d}_j = \begin{pmatrix} d_B \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow B \\ \leftarrow j \\ \leftarrow k \text{ variables} \\ \text{με βασικές} \end{matrix}$

$A \underline{d}_j = 0 \Rightarrow B d_B + A_j \overset{1}{d_{jj}} = 0 \Rightarrow B d_B + A_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d_B = -B^{-1} A_j}$

$\Rightarrow \underline{d}_j = \begin{pmatrix} -B^{-1} A_j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_{jj}=1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (m \times m \times m \times 1)$

(αποτελείται από με βασική με zero $x_j = 0$)

Έστω ότι κινούμαστε στην κατεύθυνση $\underline{d}_j \Rightarrow \underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d}_j \quad (\theta > 0)$

$\underline{c}' \underline{x}' = \underline{c}' \underline{x} + \theta \underbrace{(\underline{c}' \cdot \underline{d}_j)}_{> 0} \begin{matrix} > 0? \\ < 0? \end{matrix}$

