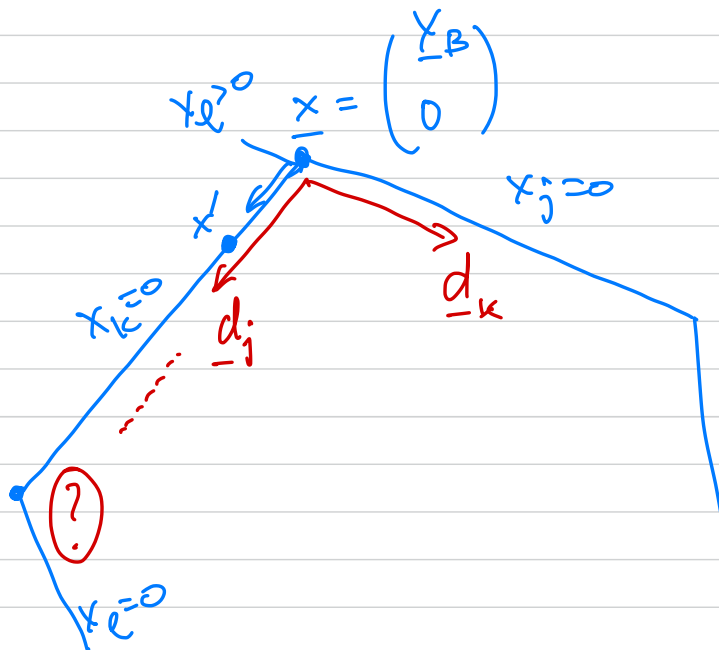
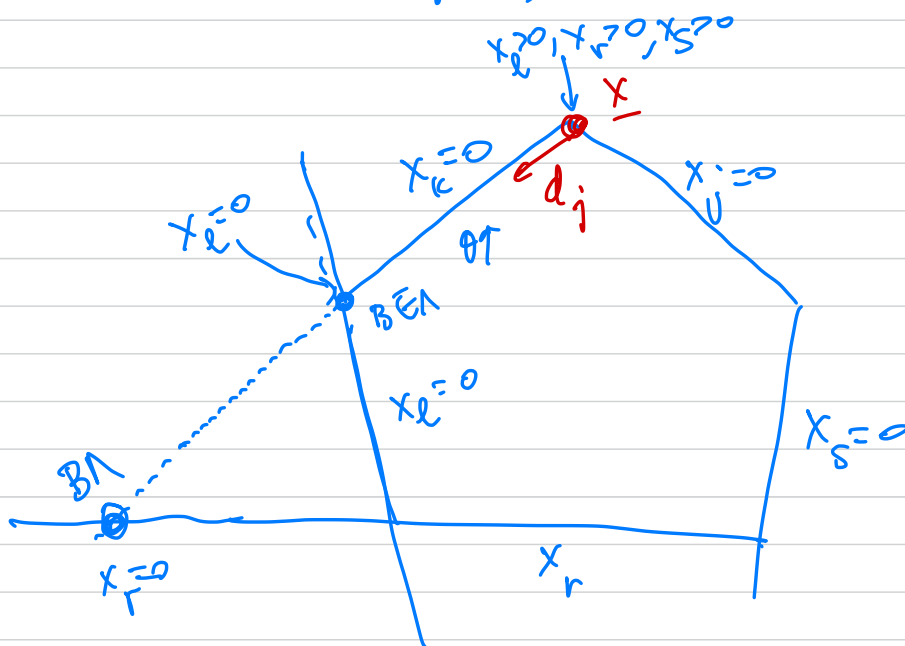


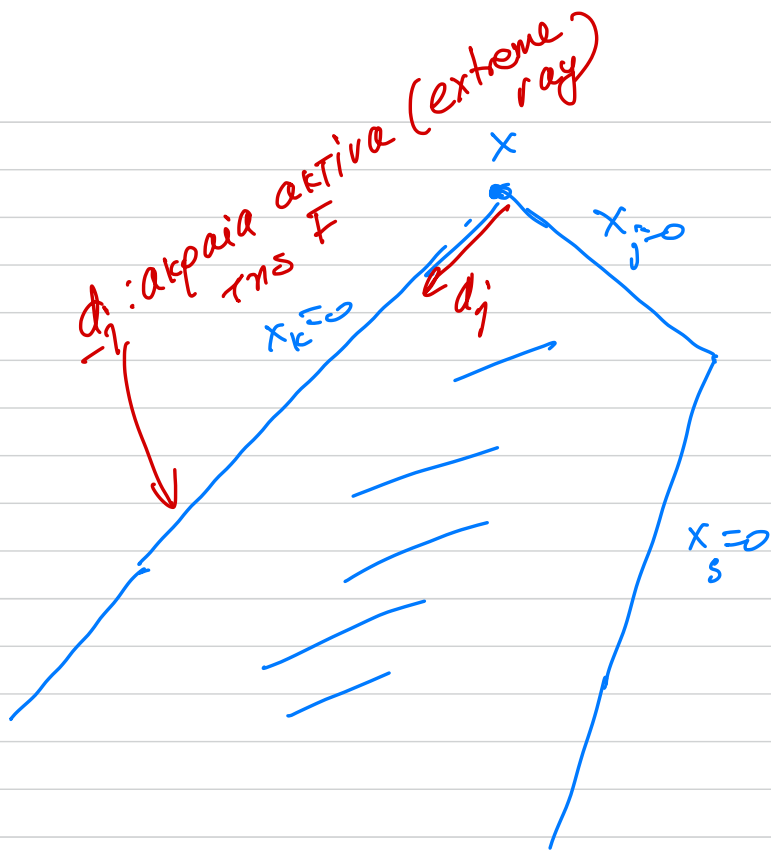
24-4-2026



Εστω ότι κοιτάμε την ταρτίδουρα $\underline{d}_j$

$$\underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d}_j, \quad \theta > 0$$





$$\underline{x}_j = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d}_j \quad (\text{npence } \underline{x}' \geq 0)$$

$$B = A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$$

$$\underline{d}_j = \left(\begin{matrix} B^{-1} A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right) \leftarrow j = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ \vdots \\ d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}'(\theta) = \begin{pmatrix} x_{B(1)} + \theta d_{jB(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} + \theta d_{jB(m)} \\ \vdots \\ 0 \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta > 0$$

$$i) \quad \Gamma_{ia} \quad i \in \{B(1), \dots, B(m)\}$$

$$\text{or } d_{iB(i)} \geq 0 \Rightarrow x'_i \geq 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$ii) \quad \text{or } d_{iB(i)} < 0$$

$$x'_i = x_{B(i)} + \theta d_{iB(i)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\theta d_{iB(i)} \geq -x_{B(i)} \Leftrightarrow$$

$$\theta \leq -\frac{x_{B(i)}}{d_{iB(i)}}$$

Για να παραμείνουμε στα F πρέπει

$$\theta \leq \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{iB(i)}} : i=1, \dots, m, d_{iB(i)} < 0 \right\} = \theta_{\min}$$

Εστω l κάποιος δείκτης που επιτυγχάνει το ελάχιστο.

$$\theta_{\min} = -\frac{x_{B(l)}}{d_{lB(l)}}$$

$$\text{Παίρνουμε τη νέα λύση} \quad \underline{x}'(\theta_{\min}) = \underline{x} + \theta_{\min} \underline{d}_i$$

H $x'(\theta_{min})$ είναι $BE\Lambda$ για τα οποία $x_j > 0$
 $x_\ell = 0$

$$B' = (A_{B(1)} \ A_{B(2)} \ \dots \ A_{B(\ell)} \ \dots \ A_{B(m)})$$

↑
v-α
βασις

↑
d

αρκεί $B = (A_{B(1)} \ A_{B(2)} \ \dots \ A_{B(\ell)} \ \dots \ A_{B(m)})$

↓
φύγει
από τα βάρη

iii) Αν $d_{jB(i)} \geq 0 \quad \forall i \in \{B(1), \dots, B(m)\}$

$\Rightarrow x'_i > 0 \quad \forall i \Rightarrow$ υπάρχει νέα κορυφή
 που κατεύθυνση $\underline{d}_i$

Επομένως $\underline{d}_i$ ακραία ακτίνα της $F \Leftrightarrow d_{jB(i)} \geq 0 \quad \forall i$

$\Leftrightarrow d_B = -B^T A_j \geq 0$

$$Ax=b$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} \right.$$

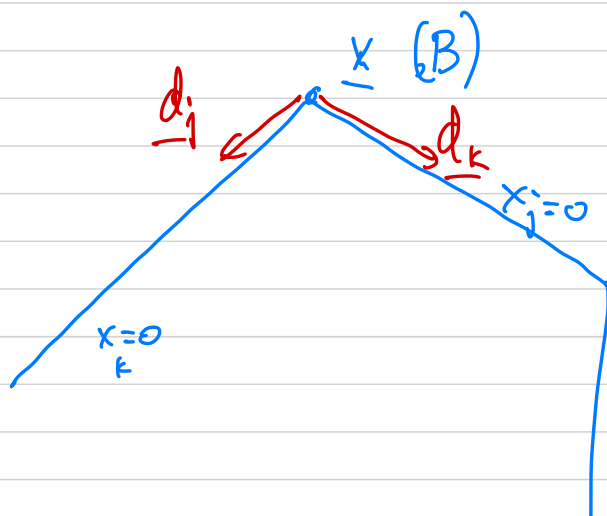
$$\underline{x}_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}_j = \begin{pmatrix} \underline{d}_{jB} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m \\ \leftarrow j \end{array} \right.$$

$$\underline{d}_{jB} = -B^{-1}A_j = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ \vdots \\ d_{B(m)} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d}_j = \begin{pmatrix} x_{B(1)} + \theta d_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} + \theta d_{B(m)} \\ 0 + \theta \cdot 0 \\ \vdots \\ 0 + \theta \cdot 1 \\ \vdots \\ 0 + \theta \cdot 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

Κριτήριο Βελτιότητας



$$\underline{d}_j = \begin{pmatrix} -1 \\ -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

Συν κατεύθυνση $\underline{d}_j$:

$$\underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d}_j \quad (\theta > 0)$$

$$\Rightarrow \underline{c}^T \underline{x}' = \underbrace{\underline{c}^T \underline{x}}_{f(\underline{x})} + \theta \cdot \underline{c}^T \underline{d}_j$$

$$f(\underline{x}') = f(\underline{x}) + \theta \underline{c}^T \underline{d}_j$$

$$\text{Αν } \underline{c}^T \underline{d}_j > 0 \Rightarrow f(\underline{x}') > f(\underline{x}), \quad \theta > 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}' \text{ καλύτερη λύση από τη } \underline{x}$$

$$\Rightarrow \underline{x} \text{ όχι βέλτη}$$

Ικανή συνθήκη για να μην είναι η $\underline{x}$ βέλτη: $\underline{c}^T \underline{d}_j > 0$
 για κάποια j
 μη βασική

$$\underline{C}^T \cdot \underline{d}_j = \begin{pmatrix} \underline{C}_B^T & \underline{C}_N^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\underline{B}^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\underline{C}_B^T \underline{B}^{-1} A_j + \underline{C}_j = \underline{C}_j - \underline{C}_B^T \underline{B}^{-1} A_j = \bar{C}_j \quad \left(\begin{array}{c} \text{reduced} \\ \text{cost} \end{array} \right)_{x_j}$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}') = f(\underline{x}) + \theta \cdot \bar{C}_j$$

$\bar{C}_j$: αριθμός μεταβολής της $f(\underline{x})$ ανά μονάδα απόστασης από τη $\underline{x}$ στην κατεύθυνση $\underline{d}_j$

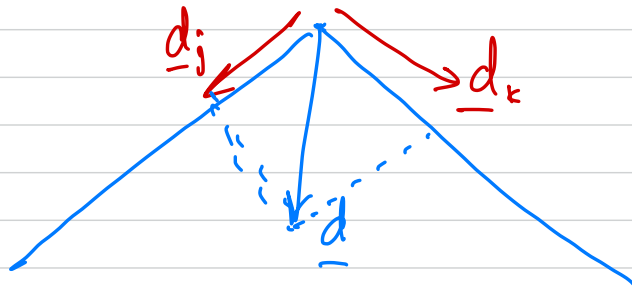
Αν $\bar{C}_j > 0 \Rightarrow$ ① αν κερνθούμε στη $\underline{d}_j$ η νέα ΒΕΛ θα είναι αυστηρά καλύτερη από $\underline{x}$ (αν υπάρχει νέα ΒΕΛ)

② Αν η $\underline{d}_j$: άκραία ακτίνα

τότε $f(\underline{x}') \rightarrow \infty$ όταν $\theta \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ το πρόβλημα μη φραγμένο

Εάν $\underline{c}^T \underline{d}_j \leq 0 \quad \forall$ εφικτί κατασκευάσων από το $\underline{x}$



$$\underline{d} = \lambda_j \underline{d}_j + \lambda_k \underline{d}_k \quad \lambda_j, \lambda_k \geq 0$$

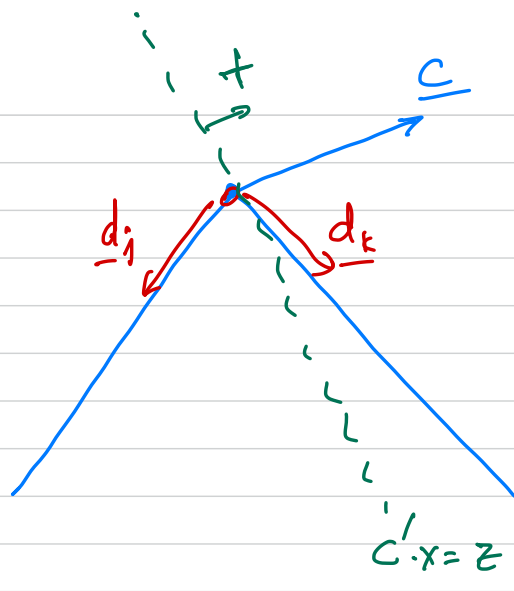
Μημέ κάθε εφικτί κατασκευάσων $\underline{d}$ από το $\underline{x}$ } κίνος
των
 $\underline{d}_j, \underline{d}_k$
 παράγεται ως $\sum_j \lambda_j \underline{d}_j$, οπου $\lambda_j \geq 0$

$\Rightarrow$ Συν κατασκευάσων $\underline{d}$

$$\underline{x}' = \underline{x} + \theta \underline{d} = \underline{x} + \theta \cdot \sum_j \lambda_j \underline{d}_j =$$

$$\Rightarrow \underline{c}^T \underline{x}' = \underbrace{\underline{c}^T \underline{x}}_{>0} + \theta \cdot \sum_j \lambda_j \underbrace{\underline{c}^T \underline{d}_j}_{\geq 0 \leq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}') \leq f(\underline{x}) \quad \forall \quad \theta > 0$$



$$\underline{c}' \underline{d}_j \leq 0$$

$$\underline{c}' \underline{d}_k > 0$$

$$c'x = z \text{ constant}$$



$$\underline{a}' \underline{b} > 0$$

Simplex (Μη εκφυλιστικές $B \in \Lambda$)

1) Έστω $B \in \Lambda$ $\underline{x}$ με πίνακα B

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_B = B^{-1}b$$

$$\underline{c}^T = (\underline{c}_B, \underline{c}_N)$$

2) $\bar{c}_j = c_j - e_B^T \cdot B^{-1} A_j$ για j μη βασικός

Αν $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \Rightarrow \underline{x}$ βέλτεση

Διαφορετικά επιλέγουμε $j : \bar{c}_j > 0$

$$3) \underline{d}_j = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αν $\underline{d}_j \geq 0 \Rightarrow$ μη φραγμένο.

4) Διαφορετικά $\theta_{\min} = \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}, i=1, \dots, m, d_{B(i)} < 0 \right\}$

$$\text{νέο } B \in \Lambda = \underline{x}' = \underline{x} + \theta_{\min} \underline{d}_j$$

Τι μπορεί να συμβεί αν $\exists$ εκφυλισμένες ΒΕΛ

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \} n-m \end{matrix}$$

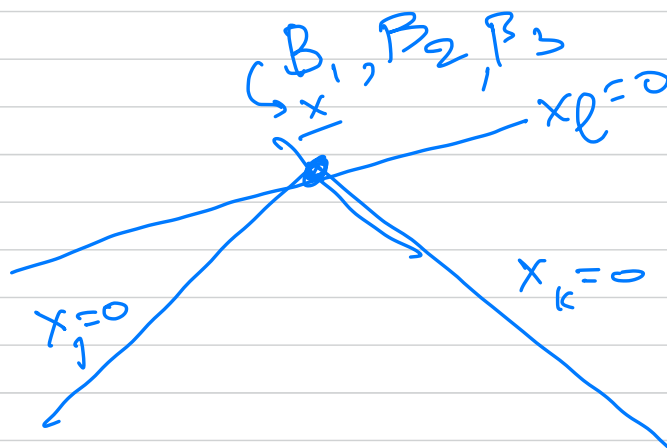
$$x_{B_i} = 0 \text{ για κάποια } i=1, \dots, m$$

Εστω $n-m=2$ (γεωμ. αναπαράσταση)

Αν $\underline{x}$ εκφυλισμένη ΒΕΛ, σε αυτήν

υπάρχουν τουλάχιστον 3 μηδενικές συνιστώσες

(Οι $n-m=2$: οι βασικές + τουλάχιστον 1 βασική)



j, k : μη
βασικές

$$x_L = 0$$

B_1 : μη βασικές A_j, A_k

$$A \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline A_L & A_j & & & A_k \\ \hline \downarrow & \downarrow & & & \\ x_L=0 & x_j=0 & & & x_k=0 \end{array} \right]$$

Έστω B_2 με z_{ij} στο ∂ του A_e
 2. ω. B_2 αυτοσυστημής (βασις)

Cycling

Έστω σε μια επανάληψη ο πίνακας $B = B_1$

① $\bar{c}_l$ ή $\underline{x}$ όχι βέλτεστο

② $\bar{c}_l > 0 \Rightarrow$ στο $\text{κατεύθυνση } \underline{d}_l$ αύξηση $\text{της } f(x)$

Τότε $\theta_{\min} = 0$ παραμένουμε στο ίδιο ταρύρι
 (αλλάζοντας μόνο τον B)

Διόρθωση

1) λεξικοπαφική

$$Ax = b$$

$$(x_{l-\varepsilon})$$

α. $\theta_{\text{όρθωση}}$

$$b' = \begin{pmatrix} b_1 + \varepsilon \\ b_2 + \varepsilon^2 \\ \vdots \\ b_m + \varepsilon^m \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \approx 0$$

2) Bland's rule

Όταν $\bar{c}_j > 0$ για περισσότερο από ένα j

κ' θ_{min} επιλεγούμε για περισσότερο από ένα i

επιλέγουμε πάλι λεξικογραφικά
(το μικρότερο δείκτη)

