

4-5-2026

δυσκό

Δυσκό

$$\begin{aligned} z_p &= \max C^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_D &= \min w^T b \\ w^T A &\geq C^T \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

δυσκό

Απόδειξη θ. δυνάμειας $z_p = z_D$

(P)

(D)

$$\max C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

$$w_1 \quad a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$w_2 \quad \vdots$$

$$w_m \quad a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{δυνάμειοι (P)}} \geq 0$$

$$\min b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$$

$$x_1 \quad a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m \geq C_1$$

$$\vdots$$

$$x_n \quad a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m \geq C_n$$

$$\underbrace{w_1, \dots, w_m}_{\text{δυνάμειοι (D)}} \geq 0$$

Εάν στο (P)

$$a_i x \geq b_i$$

$\updownarrow$

$$-a_i x \leq -b_i$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\max \quad c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$w_1 \quad -a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1$$

$$w_2 \quad \vdots$$

$$w_m \quad a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$\underbrace{\quad}_{\text{DUAL'S}} \\ \text{CON(P)}$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$\min \quad -b_1w_1 - \dots - b_mw_m$$

$$x_1 \quad -a_{11}w_1 - \dots - a_{m1}w_m \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$x_n \quad -a_{1n}w_1 - \dots - a_{mn}w_m \geq c_n$$

$\underbrace{\quad}_{\text{DUAL'S}} \\ \text{CON(D)}$

$$w_1, \dots, w_m \geq 0$$

$$\Updownarrow \quad w'_1 = -w_1$$

$$\min \quad b_1w'_1 + \dots + b_mw_m$$

$$a_{11}w'_1 - \dots \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}w'_1 + \dots + \geq c_n$$

$$\boxed{w'_1 \leq 0}, w_2, \dots, w_m \geq 0$$

$$\text{QW} \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ -a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1 \end{cases}$$

D

(P)

$$\max \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$w_1 \quad a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$w'_1 \quad -a_{11} x_1 - \dots - a_{1n} x_n \leq -b_1$$

$$w_2 \quad :$$

$$w_m \quad a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$x_1, \dots, x_n \geq 0$

$\delta uik\acute{e}s$
των (P)

(D)

$$\min \quad b_1 w_1 - b'_1 w'_1 + \dots + b_m w_m$$

$$x_1 \quad a_{11} w_1 + a_{1n} w'_1 + \dots + a_{m1} w_m \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$x_n \quad a_{1n} w_1 - a_{1n} w'_1 + \dots + a_{mn} w_m \geq c_n$$

$$w_1, w'_1, \dots, w_m \geq 0$$

$\delta uik\acute{e}s$
των (D)

$$\updownarrow \quad \tilde{w}_1 = w_1 - w'_1$$

$$\min \quad b_1 \tilde{w}_1 + \dots + b_m w_m$$

$$a_{11} \tilde{w}_1 + \dots + \dots \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} \tilde{w}_1 + \dots + \dots \geq c_n$$

$$\tilde{w}_1 \in \mathbb{R} \quad w_2, \dots, w_m \geq 0$$

Παράσταση	max	min	Διεύκ
$(\leq \text{πρόβλ. φόρμ})$ Περιορισμοί $a_i x \leq b_i$ $i=1, \dots, m$	$\leq b_i$ (πρόβλ.) $\geq b_i$ (αντίθετη πρόβλ.) $= b_i$ (ισότητα)	≥ 0 ≤ 0 $\in \mathbb{R}$	$(\geq \text{πρόβλ. φόρμ})$ Μεταβλητές (w_i) $i=1, \dots, m$
Μεταβλητές (x_j) $j=1, \dots, n$	≥ 0 ≤ 0 $\in \mathbb{R}$	$(\text{πρόβλ. φόρμ}) \geq c_j$ $(\text{αντίθ}) \leq c_j$ $(\text{ισότητα}) = c_j$	Περιορισμοί $w_j^T A_j \geq c_j$ $j=1, \dots, n$

Ισχυρό Θεώρημα Δuality

$$F_P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$F_D = \{w \in \mathbb{R}^m : w'A \geq C, w \geq 0\}$$

Αν $x \in F_P$, $w \in F_D$ τότε

$$C'x \leq z_P \leq z_D \leq w'b$$

Λήμμα: Αν $x \in F_P$, $w \in F_D$ και $C'x = w'b$

τότε x : βέλτιστη στο P και $z_P = z_D$
 w " στο D

Θεώρημα Αν ένα από τα z_P, z_D έχει βέλτιστη λύση, τότε έχει κ' το άλλο κ' $z_P = z_D$

Απόδειξη Έστω P έχει βέλτιστη λύση
κ' P : σε ΚΜ συφ.

$$z_P = \max \left. \begin{array}{l} C'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} F_P$$

($b \geq 0$)

$$z_D = \min \left. \begin{array}{l} w'b \\ w'A \geq C \\ w \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} F_D$$

Έστω x : βέλτιστη λύση στο P , (ΒΕΛ με πίνακα B)

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_B = \bar{B}^{-1} b, \quad z_P = c'x = c_B' x_B = \underline{c_B' \bar{B}^{-1} b}.$$

$$x : \text{βέλτιστη} \Leftrightarrow \bar{C}^T = C^T - C_B^T \bar{B}^{-1} A \leq 0 \quad (\text{αντ. βέλτ. Simplex})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{C_B^T \bar{B}^{-1} A}_w \geq C^T$$

$$\text{Εστω } w^T = C_B^T \bar{B}^{-1} \Leftrightarrow w^T A \geq C^T \Leftrightarrow w \in F_D \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } w^T b = \underline{C_B^T \bar{B}^{-1} b} = C^T x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Επομένως } x \in F_P \\ w = c_B' \bar{B}^{-1} \in F_D \\ c'x = w'b = c_B' \bar{B}^{-1} b \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{Λήμμα}) \\ w \text{ βέλτιστη στο } F_D \\ \text{και } z_P = z_D \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x^* = \bar{B}^{-1} b & : \text{βέλτιστη του } P \\ w^* = c_B' \bar{B}^{-1} & : \text{ " " του } D \end{array} \quad z_P = z_D = c_B^T \bar{B}^{-1} b$$

$$\text{Εστω } P \text{ μη γραμμένο } z_P = \sup \{ c'x : Ax \leq b, x \geq 0 \} = +\infty$$

$$\text{Εστω ότι } F_D \neq \emptyset \Rightarrow \forall w \in F_D : w'b < \infty$$

$$\text{Εστω } w \in F_D \Rightarrow w'b \geq z_D \geq z_P = +\infty \quad \underline{\text{αδύνατο}}$$

$$\Rightarrow F_D = \emptyset \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ορίζεται τε ο πρόβλημα} \\ \max \phi = -\infty \\ \min \phi = +\infty \end{array} \right.$$

Αν ένα από τα P, D είναι μη γραμμικό τότε
το άλλο πρόβλημα είναι ανέλκτο

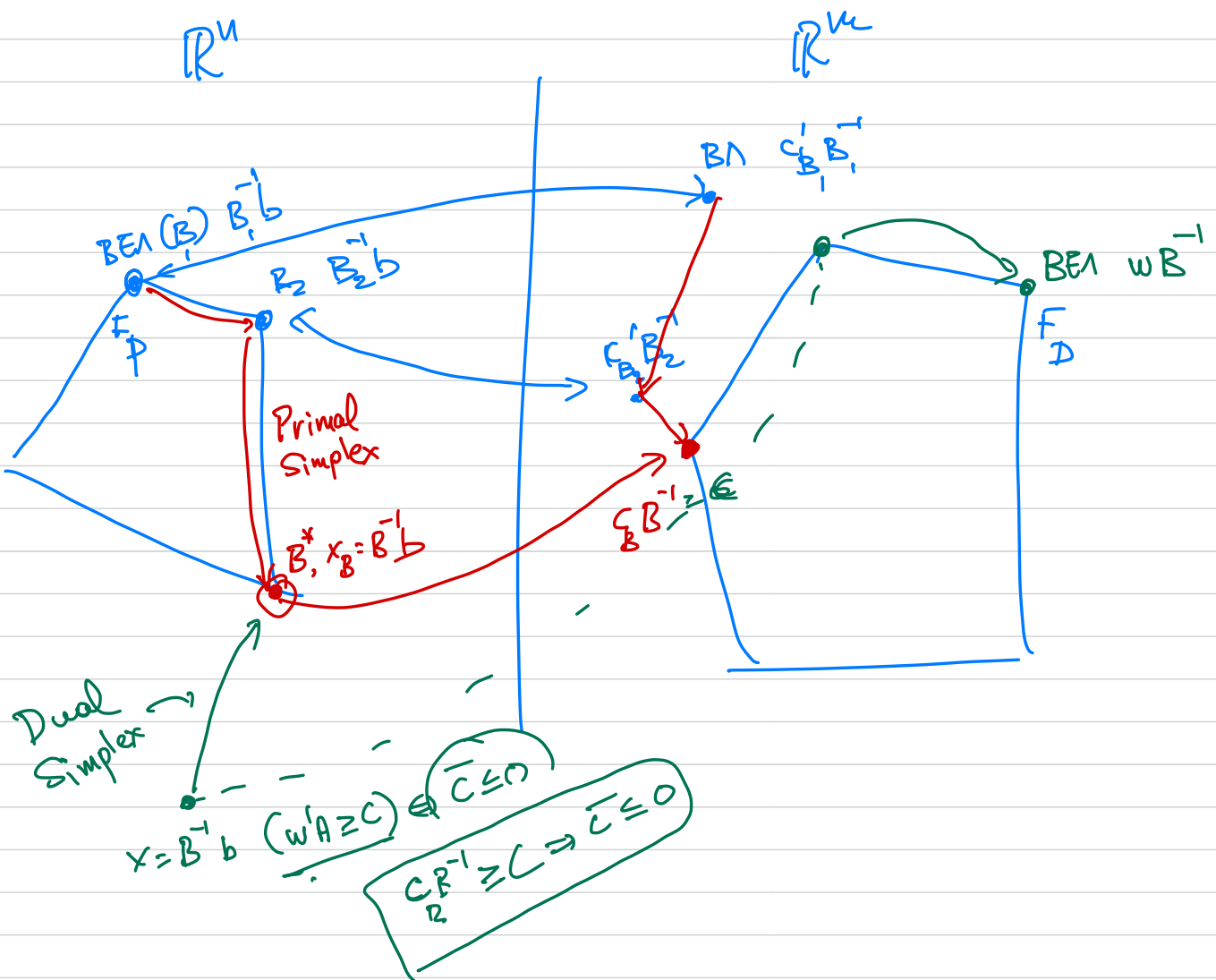
Αν ένα από τα P, D είναι ανέλκτο τότε το άλλο
είναι είτε μη γραμμικό είτε ανέλκτο

$$B \rightarrow B$$

$$M \emptyset \rightarrow A \in \mathcal{Q}$$

$$A \in \mathcal{Q} \rightarrow M \neq \emptyset$$

$$A \in \mathcal{Q} \rightarrow A \in \mathcal{Q}$$



$B :$ $\rightarrow$ or $Bx_B \leq b$ primal feasible
 $\rightarrow$ or $w_B \geq c$ dual feasible.
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\updownarrow} \bar{c} \leq 0.$