# Ντετερμινιστικά Μοντέλα Επιχειρησιακής Έρευνας
# Τελικό Διαγώνισμα – 20 Ιανουαρίου 2016

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.** Μια εταιρεία παράγει ένα προϊόν σε $n$ διαφορετικά χρώματα. Αν $Q$ είναι η συνολική ποσότητα του προϊόντος που παράγεται σε μια περίοδο (ανεξάρτητα από χρώμα), το κόστος παραγωγής είναι ίσο με

$$C(Q) = \begin{cases} c_1 Q, & \text{αν } Q \le M \\ c_1 M + c_2(Q-M), & \text{αν } Q > M \end{cases},$$

όπου $c_1, c_2, M$ θετικές σταθερές και $c_1 < c_2$. Για κάθε χρώμα $i = 1, \ldots, n$ ισχύουν τα παρακάτω: (α) το κόστος βαφής ανά μονάδα προϊόντος που βάφεται σε χρώμα $i$ είναι ίσο με $p_i$, (β) η τιμή λιανικής πώλησης ανά μονάδα προϊόντος χρώματος $i$ είναι ίση με $r_i$ και (γ) λόγω περιορισμού πρώτων υλών η ποσότητα προϊόντος που μπορεί να βαφεί σε χρώμα $i$ δε μπορεί να υπερβαίνει ένα άνω φράγμα $U_i$.
Υποθέτουμε ότι όλα τα προϊόντα που θα παραχθούν μπορούν να πωληθούν στις αντίστοιχες τιμές λιανικής.
Ο διευθυντής παραγωγής θέλει να προσδιορίσει το σχέδιο παραγωγής μιας περιόδου που μεγιστοποιεί το συνολικό καθαρό κέρδος.
Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.** Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{lllllllllll} \max & 5x_1 & +7x_2 & +2x_3 & +6x_4 & +9x_5 & +x_6 & +12x_7 & +15x_8 & \\ & 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & & & =15 \\ & & & & & 3x_5 & +x_6 & +4x_7 & +6x_8 & =24 \\ & & & & x_j \ge 0, j = 1, \ldots, 8 & & & & & \end{array}$$

Να βρεθούν **όλες** οι βέλτιστες λύσεις.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Μια εταιρεία μεταφορών έχει $K$ φορτηγά και $N$ πελάτες. Μια συγκεκριμένη μέρα πρέπει να μεταφέρει $M$ πακέτα για τα οποία ισχύει ότι το πακέτο $m$ προορίζεται για τον πελάτη $f_m, m = 1, \ldots, M$. Κάθε πακέτο πρέπει να φορτωθεί σε ένα φορτηγό. Ο όγκος του πακέτου $m$ είναι ίσος με $V_m, m = 1, \ldots, M$. Η συνολική χωρητικότητα (όγκος) του φορτηγού $k$ είναι ίση με $C_k, k = 1, \ldots, K$.
Κάθε φορτηγό θα πρέπει να πάει για παράδοση σε όλους τους πελάτες για τους οποίους μεταφέρει πακέτα. Αν το φορτηγό $k$ κάνει παράδοση στον πελάτη $n$ υπάρχει ένα κόστος ίσο με $h_{kn}, k = 1, \ldots, K,\ n = 1, \ldots, N$.
Ο διευθυντής της εταιρείας θέλει να προσδιορίσει ένα τρόπο φόρτωσης και παραδόσεων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.
Να διατυπωθεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.** Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή $X$ με τιμές στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p$ τέτοια ώστε $p_j = P(X = j) > 0, j = 1, \ldots, n$. Ένα μέτρο της αβεβαιότητας που σχετίζεται με αυτή την κατανομή είναι η συνάρτηση εντροπίας $H(p) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$.
**(α)** Να βρεθεί η κατανομή $p^*$ της $X$ για την οποία μεγιστοποιείται η εντροπία ανάμεσα σε όλες τις διακριτές κατανομές με τιμές στο $\{1, 2, \ldots, n\}$.
**(β)** Ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ δύο κατανομών $p$ και $q$ στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι η πληροφορία Kullback-Leibler που ορίζεται ως

$$I(p,q) = \sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{q_j}.$$

Να δείξετε ότι για δοσμένη $p > 0$, η πληροφορία Kullback-Leibler ικανοποιεί τη σχέση $I(p,q) \ge 0$ για κάθε κατανομή $q$, με ισότητα αν και μόνο αν $q = p$.
**(γ) (Προαιρετικό, επιπλέον 10 μονάδες /100)** Για δοσμένη κατανομή $p > 0$ βρείτε εκείνη την κατανομή $q$ που ελαχιστοποιεί την πληροφορία πληροφορία Kullback-Leibler $I(p,q)$, υπό τον επιπλέον περιορισμό ότι $q_1 < a$, για θετική σταθερά $a < p_1$.

Ντετερμινιστικά Μοντέλα Επιχ. Έρευνας – Απαντήσεις Διαγ. 20/1/2016

**Πρόβλημα 1** Παίρνουμε ως μεταβλητή απόφασης
$x_i$ = ποσότητα παραγωγής χρώματος $i$, $i=1,2$.

Η συνολική ποσότητα παραγωγής είναι $x_1+x_2$ κ' το κόστος παραγωγής

$$C(x_1+x_2)=\max\left\{c_1(x_1+x_2),\ (c_1-c_2)M+c_2(x_1+x_2)\right\}.$$

Το κόστος βαφής είναι $p_1x_1+p_2x_2$, ενώ τα έσοδα από τις πωλήσεις $r_1x_1+r_2x_2$. Επομένως η αντικ. συνάρτηση είναι το καθαρό κέρδος:

$$\Pi(x_1,x_2)=(r_1+p_1)x_1+(r_2+p_2)x_2-\max\left\{c_1(x_1+x_2),\ (c_1-c_2)M+c_2(x_1+x_2)\right\}=$$

$$=\min\left\{(r_1+p_1-c_1)x_1+(r_2+p_2-c_1)x_2,\ (c_2-c_1)M+(r_1+p_1-c_2)x_1+(r_2+p_2-c_2)x_2\right\}$$

η οποία είναι τμηματικά γραμμική και κοίλη. Επομένως το πρόβλημα μοντελοποιείται μέσω ΓΠ ως πρόβλημα maximin:

$$\begin{aligned}
\max_{x_1,x_2,z}\quad & z\\
\text{υ.π.}\quad & z\le (r_1+p_1-c_1)x_1+(r_2+p_2-c_2)x_2\\
& z\le (r_1+p_1-c_2)x_1+(r_2+c_2-c_2)x_2+(c_2-c_1)M\\
& 0\le x_1\le u_1\\
& 0\le x_2\le u_2
\end{aligned}$$

---

**Πρόβλημα 2** Επειδή οι δύο περιορισμοί περιέχουν διαφορετικά σύνολα μεταβλητών, το πρόβλημα μπορεί να διασπαστεί σε δύο επιμέρους προβλήματα ως εξής:

$$z=z_1+z_2,\quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned}
z_1=\max\ & 5x_1+7x_2+2x_3+6x_4\\
& 3x_1+3x_2+x_3+2x_4=15\\
& x_i\ge 0
\end{aligned}$$

$$z_2 = \max\ 9x_5 + x_6 + 12x_7 + 15x_8$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 24$$
$$x_i \geq 0.$$

Καθένα από τα προβλήματα αυτά είναι απλό πρόβλημα φόρτωσης σακιδίου, κ' η λύση τους προκύπτει συγκρίνοντας τους λόγους $c_j/a_j$:

Για τό $z_1$ οι λόγοι είναι $c_1/a_1 = 5/3$, $c_2/a_2 = 7/3$, $c_3/a_3 = 2$, $c_4/a_4 = 3$

Ο μέγιστος λόγος αντιστοιχεί στο $c_4/a_4$, επομένως $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ και $2x_4 = 15 \Rightarrow x_4 = 15/2$.

Για το $z_2$ οι λόγοι είναι $\frac{c_5}{a_5} = 3$, $\frac{c_6}{a_6} = 1$, $\frac{c_7}{a_7} = 3$, $\frac{c_8}{a_8} = \frac{15}{6}$.

Ο μέγιστος λόγος αντιστοιχεί στα $\frac{c_5}{a_5}, \frac{c_7}{a_7}$, επομένως $x_6 = x_8 = 0$, κ' οποιαδήποτε λύση με $4x_7 + 6x_8 = 24$ είναι βέλτιστη. Οι δύο βέλτιστες ΒΕΛ είναι: $x_6 = x_7 = x_8 = 0$, $x_5 = 8$, $x_5 = x_6 = x_8 = 0$, $x_7 = 6$. Επομένως τό σύνολο των βέλτιστων λύσεων του αρχικού προβλήματος είναι:

$$x^* = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 8\lambda \\ 0 \\ 6(1-\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

---

**Πρόβλημα 3** Θεωρούμε τις εξής μεταβλητές απόφασης:

$x_{mk} = 1$ (πακέτο $m$ φορτώνεται στο φορτηγό $k$), $m = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, K$

$y_{kn} = 1$ (φορτηγό $k$ κάνει διανομή στον πελάτη $n$), $k = 1, \dots, K$, $n = 1, \dots, N$.

Με βάση αυτές τις μεταβλητές το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N} h_{kn} y_{kn}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{km} = 1, \qquad m = 1, \dots, M$$

$$\sum_{m=1}^{M} V_m x_{km} \le U_k, \qquad k = 1, \dots, K$$

$$x_{km} \le y_{k, f_m} \qquad m = 1, \dots, M, \; k = 1, \dots, K.$$

Η πρώτη ομάδα περιορισμών εξασφαλίζει ότι κάθε πακέτο φορτώνεται οπωσδήποτε σε ένα φορτηγό. Η δεύτερη αναφέρεται στη χωρητικότητα κάθε φορτηγού.
Η τρίτη ομάδα σημαίνει ότι αν ένα πακέτο φορτωθεί σε ένα φορτηγό, τότε το φορτηγό θα πρέπει να κάνει διανομή στην πόλη για την οποία προορίζεται το πακέτο.

---

Πρόβλημα 4 (a) $H(p) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$.

Έχουμε το πρόβλημα μγπ:

$$\max \; -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

$$p_j \ge 0, \; j = 1, \dots, n.$$

Οι (τροποποιημένες) συνθήκες KKT προκύπτουν ως εξής:
Έστω $u$ ο πολ/στής Lagrange του περιορισμού ($u \in \mathbb{R}$).
Επίσης $\partial H / \partial p_j = -\ln p_j - 1$, $j = 1, \dots, n$.

Συνθήκες KKT:

$$-\ln p_j - 1 - u_j \le 0 \qquad j=1,\dots,n$$
$$p_j(-\ln p_j - 1 - u_j) = 0 \qquad j=1,\dots,n$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$
$$p_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n.$$

Επειδή για οποιοδήποτε $p_j=0$ ισχύει $-\ln p_j = +\infty$ κ' επομένως η πρώτη συνθήκη παραβιάζεται για κάθε $u\in\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι πρέπει $p_j>0$, $j=1,\dots,n$. Επομένως από τη δεύτερη συνθήκη προκύπτει ότι $\ln p_j = -u-1$, $j=1,\dots,n \Rightarrow$

$\Rightarrow p_j = e^{-u-1}$, $j=1,\dots,n$. Από την τρίτη συνθήκη παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = ne^{-u-1} = 1 \Rightarrow e^{-u-1} = 1/n \Rightarrow p_j = \frac{1}{n},\ j=1,\dots,n$$

Επομένως η εντροπία μεγιστοποιείται από τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1,2,\dots,n\}$, κ' η μέγιστη τιμή της είναι $H^* = -n\ln(1/n) = n\ln n$.

(β) Έστω $p>0$ δοσμένη διακριτή κατανομή στο $\{1,\dots,n\}$, δηλαδή $p_j>0$, $j=1,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Θεωρούμε το πρόβλημα μγπ.

$$\begin{array}{ll} \min & I(p,q) \\ & \sum q_j = 1, \\ & q_j \ge 0,\ j=1,\dots,n. \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ll} -\max & \{-I(p,q)\} \\ & \sum q_j = 1 \\ & q_j \ge 0,\ j=1,\dots,n \end{array}$$

Έχουμε $I(p,q) = \sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{q_j}$.

Επειδή $\frac{\partial(-I)}{\partial q_j} = \frac{p_j}{q_j}$, $\frac{\partial^2(-I)}{q_j^2} = -\frac{p_j}{q_j^2} > 0$, κ' $\frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial q_j} = 0$, $i \neq j$,

η $-I$ είναι κοίλη συνάρτηση του $q$, κ' επειδή το σύνολο

$\sum q_j = 1$, $q_j \geq 0$ είναι κυρτό, οι ΚΚΤ είναι αναγκαίες

και ικανές για την ύπαρξη μεγίστου.

Δεδομένου ότι ο περιορισμός είναι ισότητα, οι ΚΚΤ

παίρνουν τη μορφή

$$\frac{p_j}{q_j} - u \leq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$q_j\left(-\frac{p_j}{q_j} - u\right) = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Με ένα επιχείρημα αντίστοιχο με αυτό του (α), προκύπτει ότι

$q_j > 0 \ \forall j$, επομένως $\frac{p_j}{q_j} = -u \Rightarrow q_j = -\frac{p_j}{u}$, $j=1,\dots,n$

Από τον $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ προκύπτει $-\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \Rightarrow u = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_j = p_j$, $j=1,\dots,n$.

Επομένως η (μοναδική) βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι

η $q=p$. Για $q=p$ προκύπτει $I(p,p)=0$, επομένως

$I(p,q) > 0 \ \forall \ q \neq p$, $I(p,q) = 0$ για $q=p$.

(γ) Θεωρούμε το πρόβλημα ΜΓΠ

$$\min_{\substack{\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ q_1 \le a \\ q_j \ge 0,\ j=1,\dots,n}} I(p,q) \quad = \quad - \max_{\substack{\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ q_1 \le a \\ q_j \le 0.}} I(p,q)$$

Όπως κ' στο (β), οι ΚΚΤ είναι αναγκαίες κ' ικανές για βέλτιστη λύση.
Έστω $u, v$ οι πολ/στές Lagrange των δύο περιορισμών.
Ισχύει $u \in \mathbb{R}$, $v \ge 0$.
Ο πρώτος περιορισμός είναι $g_1(q) = \sum q_j = 1$,
κ' ο δεύτερος $g_2(q) = q_1 \le a$.
Επομένως $\dfrac{\partial g_1}{\partial q_j} = 1$, $j = 1, \dots, n$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial q_j} = \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & j=2,\dots,n \end{cases}$

Με βάση τα παραπάνω οι ΚΚΤ εκφράζονται ως εξής

(1) $\dfrac{p_1}{q_1} - u - v \le 0$

(2) $q_1 \left( \dfrac{p_1}{q_1} - u - v \right) = 0$

(3) $\dfrac{p_j}{q_j} - u \le 0 \qquad j = 2, \dots, n$

(4) $q_j \left( \dfrac{p_j}{q_j} - u \right) = 0 \qquad j = 2, \dots, n$

(5) $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

(6) $q_1 \le a$

(7) $v(a - q_1) = 0$

(8) $q_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$
$v \ge 0$.

Όμως κ' στο (b) αν $q_j=0$ για κάποιο $j$, οι (1) η (3) παραβιάζονται για οποιαδήποτε $u, v$, επομένως πρέπει $q_j>0 \ \forall j=1,\dots,n$, συνεπώς από τις (2) κ' (4)

$$q_1 = \frac{p_1}{u+v}, \qquad q_j = \frac{p_j}{u}, \ j=2,\dots,n.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $v=0$. Τότε έχουμε $q_j=\frac{p_j}{u}$, $j=1,\dots,n$ δηλαδή παίρνουμε τη λύση του (b): $q_j=p_j$, $j=1,\dots,n$. Όμως η λύση αυτή δεν είναι εφικτή επειδή $p_1>\alpha$, δηλαδή παραβιάζει την (6). Συνεπώς πρέπει $v>0$ κ' από την (7) παίρνουμε $q_1=a$.

Τέλος από την (5): $a+\sum_{j=2}^{n} q_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=2}^{n} q_j = 1-\alpha$

$$\Rightarrow \sum_{j=2}^{n} \frac{p_j}{u} = 1-\alpha \Rightarrow \frac{1}{u}(1-p_1) = (1-\alpha) \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1-\alpha}{1-p_1},$$

κ' τέλος βρίσκουμε $q_j = p_j \frac{1-\alpha}{1-p_1} = (1-\alpha)\frac{p_j}{p_2+\dots+p_n}$

Επομένως η κατανομή που ελαχιστοποιεί την πληροφορία Kullback κάτω από τον περιορισμό $q_1 \le \alpha$ είναι

$$\boxed{q_1=\alpha, \quad q_j=(1-\alpha)\frac{q_j}{p_2+\dots+p_j}, \ j=2,\dots,n}$$

δηλαδή η κατανομή πού δίνει τη μέγιστη δυνατή μάζα στο $\alpha$, κ' κατανέμει την υπόλοιπη μάζα στα $\{2,\dots,n\}$ αναλογικά με τις πιθανότητες $p_2,\dots,p_n$.