Ντετερμινιστικά Μοντέλα Επιχειρησιακής Έρευνας
Τελικό Διαγώνισμα 1 Αυγούστου 2014

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Έστω

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i^{'}\mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$$

και

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_i^{'}\mathbf{x} \leq e_i, i = 1, \ldots, k\}$$

όπου $a_1, \ldots, a_m, d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}^n$, και $b_1, \ldots, b_m, e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{R}$.
Περιγράψτε μια αλγοριθμική διαδικασία για να ελεγχθεί αν $P \subseteq Q$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & f_1x_1 & + & \cdots & + & f_nx_n & + & h_1y_1 & + & \cdots & + & h_my_m & & \\
\text{υ.π.} & a_1x_1 & + & \cdots & + & a_nx_n & & & & & & & = & b \\
 & x_1 & + & \cdots & + & x_n & + & y_1 & + & \cdots & + & y_m & = & 1 \\
 & x_1 & , & \cdots & , & x_n & , & y_1 & , & \cdots & , & y_m & \geq & 0
\end{array}$$

όπου $f_j, a_j, j = 1, \ldots, n$, $h_k, k = 1, \ldots, m$ και b θετικές σταθερές με $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
(α) Σχηματίστε το δυϊκό πρόβλημα.
(β) Δείξτε ότι ένας βασικός πίνακας του πρωτεύοντος μπορεί να είναι είτε της μορφής 1: $B = \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
είτε της μορφής 2: $B = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(γ) Για κάθε μια από τις περιπτώσεις 1 και 2 του (α), βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η αντίστοιχη βασική λύση του πρωτεύοντος να είναι εφικτή.
(δ) Για κάθε μια από τις περιπτώσεις 1, 2 μιας βασικής εφικτής λύσης, βρείτε την αντίστοιχη λύση του δυικού προβλήματος και μέσω αυτής μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η λύση του πρωτεύοντος να είναι βέλτιστη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. (α) Σε ένα στρογγυλό τραπέζι υπάρχουν 9 καθίσματα τοποθετημένα κυκλικά. Σε κάθε κάθισμα μπορεί να καθίσει ένα άτομο, αλλά κάθε άτομο δε μπορεί να καθίσει σε απόσταση ενός ή δύο καθισμάτων από κάποιο άλλο άτομο (δηλαδή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ατόμων πρέπει να μεσολαβούν τουλάχιστον δύο κενά καθίσματα). Αν ένα άτομο καθίσει στο κάθισμα j υπάρχει κέρδος ίσο με $b_j, j = 1, \ldots, n$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα τρόπο να καθίσουν άτομα στα καθίσματα έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος.
Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω ως πρόβλημα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού.
(β) Θεωρήστε το πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{υ.π.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

(β1) Να βρεθεί η άριστη λύση γραφικά.
(β2) Να λυθεί το πρόβλημα χαλάρωσης γραμμικού προγραμματισμού.
(β3) Με βάση την απάντηση στο (β2) να βρεθεί μια τομή Gomory για το πρόβλημα του ακέραιου προγραμματισμού και να παρασταθεί γραφικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Να αποδείξετε την ανισότητα γεωμετρικού μέσου-αριθμητικού μέσου

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \geq 0$, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα μη γραμμικού προγραμματισμού.
Υπόδειξη:

1. Δείξε ότι είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι

$$\max\left\{\prod_{i=1}^{n} x_i : \sum_{i=1}^{n} x_i = b, x_i \geq 0\right\} \leq \left(\frac{b}{n}\right)^n,$$

   για κάθε $n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}$.

2. Αποδείξτε την παραπάνω σχέση βρίσκοντας τη βέλτιστη λύση του πμγπ μέσω των συνθηκών KKT.

3. Για να βρείτε τη βέλτιστη λύση του πμγπ μπορείτε να αντικαταστήσετε την αντικειμενική συνάρτηση με το λογάριθμό της.