ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΧΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις βασικές αρχές από τη θεωρία βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς από τις οποίες προκύπτει η έννοια του δυικού προβλήματος και γενικότερα η θεωρία δυικότητας.

Η βασική ιδέα της δυικότητας είναι ότι για κάθε π.γ.π ορίζεται μονοσήμαντα ένα άλλο π.γ.π., που ονομάζουμε δυϊκό του αρχικού προβλήματος. Τα δύο προβλήματα είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους με μια σειρά από ιδιότητες, που αποτελούν τη θεωρία της δυϊκότητας.

Η μελέτη της δυικότητας είναι χρήσιμη τόσο από θεωρητική άποψη, καθώς επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση της δομής του γραμμικού προγραμματισμού, όσο και από άποψη εφαρμογών, καθώς επιτρέπει κάποιες επιπλέον ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες. Τέλος από υπολογιστική σκοπιά οδηγεί σε εναλλακτικές μορφές της μεθόδου Simplex πού σε ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων είναι πιο αποτελεσματικές.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας δυικότητας είναι χρήσιμο να εκφράσουμε ένα π.γ.π. σε ημικανονική μορφή αντί της κανονικής που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1 (Ενότητα 1.1), η ημικανονική μορφή ορίζεται ως πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς της μορφής $\leq$ και μη αρνητικές μεταβλητές. Γνωρίζουμε επίσης ότι οποιοδήποτε π.γ.π μπορεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα σε ημικανονική μορφή. Επομένως ο περιορισμός σε προβλήματα ημικανονικής μορφής είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Για λόγους συμμετρίας που θα γίνουν φανεροί παρακάτω, είναι βολικό να ορίσουμε την ημικανονική μορφή με κάπως γενικότερο τρόπο. Συγκεκριμένα·

<u>Ορισμός 3.1</u> Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται σε <u>ημικανονική μορφή (HK)</u> αν έχει εκφραστεί με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους:

$$\begin{array}{lll} z = \max \underline{c}'\underline{x} & & z = \min \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υ.π. } \underline{A}\,\underline{x} \leq \underline{b} & \text{ή} & \text{υ.π. } \underline{A}\,\underline{x} \geq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 & & \underline{x} \geq 0 \end{array} \qquad (3.1)$$

όπου $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, A πίνακας $m \times n$ και το διάνυσμα μεταβλητών απόφασης $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Για την πρώτη περίπτωση λέμε ότι το πρόβλημα εκφράζεται στην <u>ημικανονική μορφή μεγιστοποίησης</u> (HK-max) ενώ για τη δεύτερη στην <u>ημικανονική μορφή ελαχιστοποίησης</u> (HK-min).

Βλέπουμε από τον Ορισμό 3.1 ότι ένα πρόβλημα σε ΗΚ-μορφή μπορεί να είναι πρόβλημα είτε μεγιστοποίησης είτε ελαχιστοποίησης. Στην πρώτη περίπτωση όλοι οι περιορισμοί είναι $\leq$ ενώ στη δεύτερη $\geq$. Ορίζουμε επομένως την προβλεπόμενη φορά των περιορισμών ως τη φορά $\leq$ για προβλήματα max και τη φορά $\geq$ για προβλήματα min. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι ένα π.γ.π. είναι γενικά σε ΗΚ-μορφή αν όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες της προβλεπόμενης φοράς και όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ένα π.γ.π. σε ΗΚ-μορφή ορίζεται μονοσήμαντα από μια εξάδα της μορφής

$$P = HK(\rho, A, \underline{b}, \underline{c}) \tag{3.2}$$

όπου $\rho \in \{0,1\}$ ($\rho=0$ για min και $\rho=1$ για max) αντιστοιχεί στο κριτήριο βελτιστοποίησης,

A ο $m \times n$ πίνακας των περιορισμών, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ το δεξιό μέρος των περιορισμών και $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης (προφανώς το διάνυσμα μεταβλητών μπορεί να συμβολιστεί με οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα και δεν είναι μέρος των δεδομένων του προβλήματος αλλά απλώς μια βοηθητική μεταβλητή).

Για παράδειγμα το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

γράφεται συνοπτικά ως $P = HK(1, A, b, c)$,

με $A = (1,1)$, $b = 5$, $c = \binom{1}{2}$.

Παρατήρηση: Στο συμβολισμό της εξίσωσης (3.2) χρησιμοποιούμε και την έκφραση HK που υποδηλώνει ότι το πρόβλημα είναι σε HK-μορφή. Αυτό βοηθάει στο να αποφεύγονται συγχύσεις, καθώς με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσε να οριστεί αντίστοιχος συμβολισμός για προβλήματα σε κανονική μορφή, όπου για παράδειγμα

$$P = KM(A, \underline{b}, \underline{c}) \tag{3.3}$$

υποδηλώνει το πρόβλημα της εξίσωσης (2.1), κεφ. 2.

Αν δεν υπήρχε η διάκριση HK, KM θα μπορούσε να δημιουργηθεί σύγχυση σχετικά με το ποιο πρόβλημα εννοούμε κάθε φορά.

3.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΘΕΝΗΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

Συνήθως στη βιβλιογραφία δίνεται ο ορισμός του δυϊκού προβλήματος για ένα δοσμένο π.γ.π. και αναφέρονται οι ιδιότητές του. Είναι όμως προτιμότερο να γίνει πρώτα μια σύντομη θεωρητική εισαγωγή από την οποία ο ορισμός θα προκύψει με διαισθητικό τρόπο.

Θεωρούμε ένα π.γ.π. σε μορφή HK-max : $P = HK(1, A, b, c)$:

$$\begin{aligned} z_P = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\ & A\underline{x} \le \underline{b} \\ & \underline{x} \ge 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Μια σημαντική μέθοδος προσέγγισης προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς είναι μέσω της Λαγκρανζιανής συνάρτησης που προκύπτει αν κάποιοι ή όλοι από τους περιορισμούς μεταφερθούν στην αντικειμενική συνάρτηση ως ποινή για την παραβίασή τους. Θα δείξουμε πώς αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα (3.4).

Ορίζουμε τη συνάρτηση $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε για $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$:

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}' \cdot (\underline{b} - A\underline{x}) \tag{3.5}$$

Η L μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} - \sum_{i=1}^{m} w_i (\underline{a}_i \underline{x} - b_i),$$

δηλαδή προκύπτει αν από την αντικειμενική συνάρτηση του (3.4) αφαιρεθεί μιά ποσότητα $w_i(\underline{a}_i'\underline{x}-b_i)$ που ερμηνεύεται ως η ποινή για την περίπτωση που παραβιάζεται ο αρχικός περιορισμός, όταν δηλαδή $\underline{a}_i'\underline{x}-b_i \geq 0$

Η μεταβλητή w_i ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange του περιορισμού-i και παριστάνει την ποινή ανά μονάδα παραβίασης του περιορισμού.

(Σημείωση: Η παραπάνω ερμηνεία της Lagrangean δίνεται κυρίως για να δικαιολογηθεί διαισθητικά ο ορισμός. Η μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί θα μπορούσε να γίνει και χωρίς να συζητήσουμε τί σημαίνει η συνάρτηση L).

Ορίζουμε τώρα ένα νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$z_L(\underline{w}) = \max \; L(\underline{x},\underline{w}) \quad \text{υ.π.} \quad \underline{x} \geq 0 \tag{3.6}$$

<u>Λήμμα 3.1</u> $\quad z_L(\underline{w}) \geq z_p \quad \forall \; \underline{w} \geq 0.$

<u>Απόδειξη</u> $\quad z_L(\underline{w}) = \max\limits_{\underline{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x} \geq 0 \right\}$

$$\geq \max_{\underline{x}} \left\{ L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x} \geq 0, \; A\underline{x} \leq \underline{b} \right\}$$

επειδή στο δεύτερο πρόβλημα η εφικτή περιοχή είναι υποσύνολο αυτής στο πρώτο

Όμως αν $\underline{w} \geq 0$ και $A\underline{x} \leq \underline{b}$, τότε $\underline{w}'(\underline{b}-A\underline{x}) \geq 0$

και επομένως $L(\underline{x},\underline{w}) \geq \underline{c}'\cdot\underline{x} \quad \forall \; \underline{x},\underline{w} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \; \underline{w} \geq 0$

$$\max\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq b\} \geq \max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq \underline{b}\} = z_p$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει

$z_L(\underline{w}) \geq z_p \quad \forall\ \underline{w}\geq 0$ ▨

Το Λήμμα 3.1 δείχνει ότι τό πρόβλημα (3.6) έχει μεγαλύτερη βέλτιστη τιμή από το αρχικό, επειδή αφενός έχει περισσότερες εφικτές λύσεις και αφ' ετέρου για λύσεις που είναι εφικτές και στα δύο προβλήματα το $z_L(w)$ έχει μεγαλύτερη αντικειμενική συνάρτηση. Για το λόγο αυτό το $z_L(w)$ ονομάζεται πρόβλημα Λαγκρανζιανής χαλάρωσης του z_p (Lagrangean relaxation)

Το χαλαρωμένο πρόβλημα αποτελεί άνω φράγμα για τη βέλτιστη τιμή του αρχικού, για κάθε $w\geq 0$. Επομένως έχει νόημα να ορίσουμε το $\inf\{z_L(w) \cdot w\geq 0\}$ το οποίο επίσης θα αποτελεί άνω φράγμα για το z_p.

<u>Ορισμός 3.2</u> Το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$z_D = \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w}\in\mathbb{R}^m,\ \underline{w}\geq 0\} \qquad (3.7)$$

ονομάζεται το <u>δυικό πρόβλημα</u> (dual problem) του προβλήματος z_p

Από το Λήμμα 3.1 προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως <u>ασθενές θεώρημα δυικότητας</u> (weak duality theorem)

Θεώρημα 3.1 : $z_P \le z_D$

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα $z_L(\underline{w})$ που αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του z_D. Το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$z_L(\underline{w}) = \underline{w}'\underline{b} + f_L(\underline{w}),$$

όπου

$$f_L(\underline{w}) = \max_{\substack{\text{υ.π.}\\ \underline{x} \ge 0}} (\underline{c}' - \underline{w}'A)\,\underline{x} = \max \sum_{j=1}^{n} (c_j - \underline{w}'\underline{A}_j)\, x_j$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n$$

Το $f_L(\underline{w})$ είναι ένα τετριμμένο π.γ.π. με μόνο περιορισμούς μη αρνητικότητας. Επομένως θα είναι μη φραγμένο αν έστω και ένας συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αυστηρά θετικός. Συγκεκριμένα είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$f_L(\underline{w}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \underline{c}' - \underline{w}'A \le 0 \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

επομένως

$$z_L(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{w}'\underline{b}, & \text{αν } \underline{w}'A \ge \underline{c}' \\ +\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επειδή το δυϊκό πρόβλημα z_D απαιτεί ελαχιστοποίηση του $z_L(\underline{w})$, αρκεί να περιοριστούμε σε τιμές του $\underline{w}$ για τις οποίες $z_L(\underline{w}) < \infty$, δηλαδή σε τιμές που ικανοποιούν $\underline{w}'A \ge \underline{c}'$. Συνεπώς το πρόβλημα z_D γράφεται

$$z_D = \inf\{\underline{w}'b : \underline{w}'A \geq c', \underline{w} \geq 0\}$$

$$= \inf\{\underline{b}'\underline{w} : A'\underline{w} \geq \underline{c}, \underline{w} \geq 0\}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το δυικό πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα και αυτό ένα π.γ.π. και μάλιστα σε HK-min μορφή:

$$z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$$

$$\text{υ.π. } A'\underline{w} \geq C$$

$$\underline{w} \geq 0$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό, πρόκειται για το π.γ.π.

$$D = HK(0, A', \underline{c}, \underline{b}) \qquad (3.8)$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι το δυικό του D είναι το αρχικό πρόβλημα P. Πραγματικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\min_x f = -\max_x (-f)$ και $A'\underline{w} \geq c \Leftrightarrow -A'\underline{w} \leq -\underline{c}$, το D γράφεται ως πρόβλημα HK-max ως εξής:

$$D = -HK(1, -A', -\underline{c}, -\underline{b})$$

και επομένως το δυικό του είναι το

$$\tilde{D} = -HK(0, (-A')', -b, -c) = HK(1, A, b, c) = P.$$

Επομένως μπορούμε να αναφερόμαστε σε ζεύγη π.γ.π. από τα οποία το ένα είναι το δυικό του άλλου. Το P αναφέρεται ως <u>πρωτεύον</u> και το D ως <u>δυικό</u>

(δεν έχει σημασία ποιό είναι ποιό – αυτό που τα διακρίνει είναι το max ή min).

Επίσης, όπως γνωρίζουμε, ένα π.γ.π. σε γενική μορφή μπορεί πρώτα να μετατραπεί σε ΗΚ μορφή και μετά να σχηματιστεί το δυικό του. Μπορεί επίσης να σχηματιστεί το δυικό άμεσα χωρίς την ενδιάμεση μετατροπή χρησιμοποιώντας τούς γνωστούς κανόνες (βλ. π.χ [1]), που παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω για λόγους πληρότητας:

Πρωτεύον	max	min	Δυϊκό
	$\leq b_i$	≥ 0	
Περιορισμοί	$\geq b_i$	≤ 0	Μεταβλητές
	$= b_i$	$\in \mathbb{R}$	
	≥ 0	$\geq c_j$	
Μεταβλητές	≤ 0	$\leq c_j$	Περιορισμοί
	$\in \mathbb{R}$	$= c_j$	

Πίνακας 3.1 Κανόνες μετασχηματισμού πρωτεύοντος-δυικού

Βλέπουμε από τα παραπάνω ότι σε ένα ζεύγος πρωτεύοντος-δυικού π.γ.π δεν έχει σημασία ποιο θεωρούμε πρωτεύον και ποιο δυικό, καθώς υπάρχει πλήρης συμμετρία.
Για λόγους συνέπειας στην επόμενη συζήτηση θα θεωρούμε ως πρωτεύον το πρόβλημα ΗΚ-max. Όμως όλα τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε έχουν αντίστοιχη έκφραση αν ως πρωτεύον θεωρήσουμε το ΗΚ-min.
Επισημαίνουμε όμως ότι στο Θεώρημα 2.1, το πρόβλημα ΗΚ-max είναι άνω φραγμένο από το ΗΚ-min.

3.3. ΤΟ ΙΣΧΥΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας δυικότητας, που επεκτείνει τη συμμετρία μεταξύ πρωτεύοντος-δυικού και στις βέλτιστες λύσεις των δύο προβλημάτων. Πρώτα παρουσιάζουμε δύο βοηθητικά λήμματα (θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε πορίσματα του Θεωρήματος 3.1). Η απόδειξη και των δύο είναι άμεση και παραλείπεται.

Λήμμα 3.2 Αν $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\underline{c}'\underline{x} \leq z_P \leq z_D \leq \underline{b}'\underline{w} \qquad (3.9)$$

Λήμμα 3.3 Αν $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα, και ισχύει $\underline{c}'\underline{x} = \underline{b}'\underline{w}$, τότε οι $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις των P, D, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα, που αναφέρεται ως το ισχυρό θεώρημα δυικότητας:

Θεώρημα 3.2. Αν ένα π.γ.π έχει βέλτιστη λύση, τότε και το δυικό του έχει βέλτιστη λύση και οι αντικειμενικές συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή $z_P = z_D$.

Απόδειξη Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα P έχει βέλτιστη λύση. Έστω $\underline{x}$ μια βέλτιστη ΒΕΛ με βασικό πίνακα B. Τότε όπως έχουμε δει στο Κεφ. 2, ισχύει κατ' αρχήν

$$\underline{x} = B^{-1}\underline{b}.$$

Επίσης, το κριτήριο βελτιστότητας είναι: $\bar{c}_j \leq 0$, $j=1,\dots,n$, όπου $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} \underline{A}_j$, είναι το ελαττωμένο κόστος της μεταβλητής x_j.

Τα παραπάνω ισχύουν με την υπόθεση ότι το πρόβλημα P είναι σε κανονική μορφή:

$$P: \quad z_p = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Το δυϊκό του P εκφράζεται τότε ως:

$$D: \quad z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$$
$$A'\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{w} \in \mathbb{R}^m$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το διάνυσμα $\underline{w}' = c_B' B^{-1}$.
Από τη συνθήκη βελτιστότητας του P προκύπτει:

$$c_j - w'\underline{A}_j \leq 0 \quad \forall j=1,\dots,n \Rightarrow \underline{c}' - \underline{w}'A \leq 0 \Rightarrow A'\underline{w} \geq \underline{c}$$

δηλαδή το $\underline{w}$ είναι εφικτή λύση του D. Επίσης

$$\underline{b}'\underline{w} = \underline{w}'\underline{b} = c_B' B^{-1} \underline{b} = c_B' \cdot \underline{x} = z_p.$$ Επομένως

τα $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των P, D αντίστοιχα και $\underline{c}'\underline{x} = \underline{w}'\underline{b}$ άρα, από το Λήμμα 3.3, και το $\underline{w}$ είναι βέλτιστη λύση του D, δηλαδή

$$\underline{c}'\underline{x} = z_p = z_D = \underline{w}'\underline{b}$$ ∎

Το ισχυρό θεώρημα δυϊκότητας δίνει τη σχέση μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των προβλημάτων P κ' D, αν τουλάχιστον ένα έχει βέλτιστη λύση. Πρέπει όμως να δούμε τι γίνεται και στην περίπτωση που κάποιο από τα προβλήματα δεν έχει βέλτιστη λύση, δηλαδή είναι είτε μη φραγμένο ή αδύνατο.

Η πρώτη περίπτωση αναφύεται εύκολα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1:

<u>Πόρισμα 3.1</u> Αν ένα από τα προβλήματα P, D είναι μη φραγμένο τότε το δυϊκό του είναι αδύνατο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι το P είναι μη φραγμένο, δηλαδή $z_P = +\infty$. Τότε από το Θεώρημα 3.1 $z_D = +\infty$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πρόβλημα D έχει τουλάχιστον μια εφικτή λύση. Σ' αυτή την περίπτωση θα ισχύει $z_D \leq \underline{w}' \underline{b} < \infty$, που είναι άτοπο. Επομένως το πρόβλημα D δεν έχει εφικτές λύσεις.
Η απόδειξη για την περίπτωση που το D είναι μη φραγμένο είναι εντελώς ανάλογη. ■

Τέλος στην περίπτωση που κάποιο από τα P, D είναι αδύνατο από το Θεώρημα 3.2 προκύπτει ότι το δυϊκό του θα είναι είτε μη φραγμένο ή αδύνατο. Μπορεί κανείς να βρει παραδείγματα και για τις δύο αυτές υποπεριπτώσεις, επομένως δεν υπάρχει γενικός κανόνας.

3.4 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε ένα ακόμη βασικό αποτέλεσμα που αφορά τη συσχέτιση των βέλτιστων λύσεων ενός ζεύγους πρωτεύοντος-δυϊκού. Ορίζουμε πρώτα τις εξής ποσότητες

$$u_i = w_i\,(b_i - \underline{a}_i'\,\underline{x}) \quad , \; i=1,\dots,m \tag{3.10}$$
$$v_j = (\underline{w}'\underline{A}_j - c_j)\,x_j \quad , \; j=1,\dots,n \tag{3.11}$$

Από τους ορισμούς των προβλημάτων P, D έχουμε ότι αν $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των P και D αντίστοιχα, τότε $u_i \geq 0$ $i=1,\dots,m$ και $v_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$.

Επίσης:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \underline{w}'\,(\underline{b} - A\underline{x}) = \underline{w}'\underline{b} - \underline{w}'A\underline{x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = (\underline{w}'A - \underline{c}')\,\underline{x} = \underline{w}'A\,\underline{x} - \underline{c}'\underline{x}$$

Επομένως

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \underline{w}'\underline{b} - \underline{c}'\underline{x}. \tag{3.12}$$

Εκτός από μια δεύτερη απόδειξη του ασθενούς θεωρήματος δυϊκότητας, η σχέση (3.12) έχει και μια άλλη ενδιαφέρουσα συνέπεια. Ας υποθέσουμε ότι οι $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις των P, D αντίστοιχα. Τότε από το Θεώρημα 3.2 προκύπτει $\underline{w}'\underline{b} = \underline{c}'\underline{x}$, και επομένως από την (3.12):

$$u_i = 0, \quad v_j = 0 \quad , \; i=1,\dots,m \, , \; j=1,\dots,n.$$

Τώρα προκύπτει άμεσα το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3 Έστω $\underline{x}$, $\underline{w}$ εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα. Οι $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις για τα αντίστοιχα προβλήματα αν και μόνο αν

$$w_i(b_i - \underline{a}_i'\underline{x}) = 0, \quad i=1,\dots,m \qquad (3.13)$$

$$(\underline{w}'A_j - c_j)\,x_j = 0, \quad j=1,\dots,n. \qquad (3.14)$$

Το Θεώρημα 3.3 αναφέρεται ως <u>Θεώρημα συμπληρωματικότητας</u> (complementary slackness theorem)

Μια προφανής χρήση του είναι για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του ενός προβλήματος χωρίς τη χρήση της μεθόδου Simplex, όταν είναι γνωστή η λύση του άλλου προβλήματος.
Αυτό είναι πάντα δυνατό όταν η βέλτιστη λύση είναι μη εκφυλισμένη. Για να το δούμε αυτό:

Έστω ότι το πρόβλημα P σε κανονική μορφή γράφεται

$$\begin{aligned} z_p = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\ & A\underline{x} + \underline{y} = \underline{b} \qquad \underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \underline{y}\in\mathbb{R}^m,\ \operatorname{rank}(A)=m \\ & \underline{x}, \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

και έχει βέλτιστη ΒΕΛ $(\underline{x}^*, \underline{y}^*)$ που είναι μη εκφυλισμένη. Αυτό σημαίνει ότι από τις $m+n$ συνιστώσες του διανύσματος $\begin{pmatrix}\underline{x}^*\\ \underline{y}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+m}$, ακριβώς m είναι αυστηρά θετικές.

Έστω ότι από αυτές οι m_1 αντιστοιχούν σε μεταβλητές x_j και οι m_2 σε μεταβλητές y_i, με $m_1+m_2=m$.

Βλέπουμε ότι για $x_j > 0$ από την (3.14):

$$\underline{w}'\underline{A}_j - c_j = 0 \Rightarrow \underline{w}'\underline{A}_j = c_j \qquad (m_1 \text{ εξισώσεις})$$

Επίσης για $\underline{y}_i > 0 \Rightarrow b_i - \underline{a}_i'\underline{x} > 0$, επομένως από την (3.13)

$$w_i = 0. \qquad (m_2 \text{ εξισώσεις})$$

Συνεπώς το διάνυσμα $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί m γραμμικές εξισώσεις που είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

<u>Παρατηρήσεις</u> ① Το παραπάνω αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό του $\underline{w}$ αν γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση $\underline{x}$ του P είναι ισοδύναμο με την απόδειξη του ισχυρού θεωρήματος δυϊκότητας, στην οποία είδαμε ότι $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$, όπου B είναι ο βέλτιστος βασικός πίνακας.

② Αν η $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη ΒΕΛ, τότε οι εξισώσεις που προκύπτουν από το θεώρημα συμπληρωματικότητας είναι λιγότερες από m και το διάνυσμα $\underline{w}$ των δυϊκών μεταβλητών δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

3.5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΔΥΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σ' αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε το πρωτεύον ως πρόβλημα παραγωγής κάτω από περιορισμένους πόρους και θα δώσουμε μια ερμηνεία του δυικού προβλήματος ως προσδιορισμού βέλτιστης προσφοράς για την αγορά των πόρων. Επίσης θα αποδείξουμε μια μαθηματική ιδιότητα των δυικών μεταβλητών που βοηθά στην βαθύτερη κατανόηση αυτής της ερμηνείας, όπως επίσης και της σχέσης των δύο προβλημάτων.

Έστω το πρωτεύον πρόβλημα P : $\max\{\underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge 0\}$

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\underline{x}$ αντιστοιχεί στις ποσότητες παραγωγής n προϊόντων, χρησιμοποιώντας m πόρους/αγαθά (π.χ. εργασία, πρώτες ύλες, κεφάλαιο κλπ.)

Το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A συμβολίζει τήν ποσότητα του πόρου i που απαιτείται για την παραγωγή μιάς μονάδας του προϊόντος j, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. Επίσης η παράμετρος b_i παριστάνει τη διαθέσιμη ποσότητα του πόρου i, $i=1,\dots,m$.

Για το παράδειγμα αυτό, το δυϊκό πρόβλημα D:

$z_D = \min\{\underline{b}'\underline{w} ; A'\underline{w} \ge \underline{c},\ \underline{w} \ge 0\}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Έστω ότι κάποιος εξωτερικός αγοραστής θέλει να κάνει μια προσφορά για να αγοράσει όλες τις διαθέσιμες ποσότητες πόρων από τον κάτοχο της παραπάνω παραγωγικής διαδικασίας. Ο αγοραστής πρέπει να προσδιορίσει τις μοναδιαίες τιμές w_i, $i=1,\dots,m$ που είναι διατεθειμένος να πληρώσει. Αυτές οι τιμές, εκτός του ότι είναι μη αρνητικές πρέπει να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Οι περιορισμοί αντανακλούν την απαίτηση να γίνουν δεκτές από τον διοικητή των πόρων. Συγκεκριμένα, ας θεωρή-

σουμε το προϊόν j: Ο ιδιοκτήτης των πόρων μπορεί να χρησιμοποιήσει ποσότητες a_{ij}, $i=1,\dots,m$ από τους πόρους για να παράγει μια μονάδα του προϊόντος j, η οποία θα του αποφέρει κέρδος c_j.
Για να δεχθεί να πουλήσει τους πόρους του θα πρέπει οι τιμές που του προσφέρονται να είναι τέτοιες ώστε από την πώληση των ίδιων ποσοτήτων όπως παραπάνω να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο με c_j, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \geq c_j .$$

Επειδή ο ιδιοκτήτης μπορεί να παράγει οποιοδήποτε από τα n προϊόντα, οι τιμές πρέπει να είναι συμφέρουσες, δηλαδή ο παραπάνω περιορισμός πρέπει να ισχύει, για όλα τα $j=1,\dots,n$.

Τώρα ο υποψήφιος αγοραστής γνωρίζει ότι για να μπορέσει να αποκτήσει τους παραπάνω πόρους θα πρέπει οι τιμές που θα προσφέρει να ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς. Από την άλλη πλευρά ο ίδιος θέλει να πληρώσει το ελάχιστο δυνατό συνολικό ποσό. Επομένως πρέπει να λύσει το παρακάτω πρόβλημα Γ.Π.:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq c_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$w_i \geq 0 \quad , \quad i=1,\dots,m$$

που είναι ακριβώς το δυϊκό πρόβλημα D.

Έχουμε επομένως μια ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος, σχετική με αυτή του πρωτεύοντος. Πρέπει ωστόσο να παρατηρήσουμε τα εξής: Κατά πρώτον υποθέσαμε ότι ο αγοραστής θα κάνει την προσφορά για τις συνολικές ποσότητες όλων των πόρων. Με άλλα λόγια μπορεί οι δυϊκές μεταβλητές να δείχνουν τη μοναδιαία προσφερόμενη τιμή για κάθε πόρο, όμως ισχύουν μόνο αν ο αγοραστής αποφασίσει να πουλήσει όλες τις διαθέσιμες ποσότητες πόρων που διαθέτει. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αγοραστής δεν έχει άλλη ωφέλεια από τους πόρους αυτούς εκτός από το κέρδος που λαμβάνει παράγοντας τα προϊόντα 1,..,n. Με άλλα λόγια αν μετά τις βέλτιστες ποσότητες παραγωγής μείνουν κάποιες ποσότητες πόρων αχρησιμοποίητες αυτές έχουν μηδενική αξία για τον ιδιοκτήτη.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η ερμηνεία του δυϊκού που δόθηκε παραπάνω βρέθηκε σε συνάρτηση με την ερμηνεία του πρωτεύοντος, και δεν φιλοδοξεί να είναι γενικός κανόνας. Με άλλα λόγια η παραπάνω συζήτηση πρέπει να θεωρηθεί μάλλον ως παράδειγμα για τον τρόπο σκέψης όταν θέλουμε να συσχετίσουμε το δυϊκό πρόβλημα με την εφαρμογή από την οποία προέρχεται το πρωτεύον. Σε διαφορετικές εφαρμογές η ερμηνεία του δυϊκού θα είναι φυσικά διαφορετική, και μπορεί να μη σχετίζεται με το προηγούμενο παράδειγμα.

Από την άλλη πλευρά η ιδιότητα που θα αποδείξουμε αμέσως μετά είναι καθαρά μαθηματική, επομένως είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη ερμηνεία που έχουμε ενδεχομένως υποθέσει. Είναι όμως από μόνη της ενδιαφέρουσα γιατί μπορεί να δώσει ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με την εφαρμογή από την οποία προέρχεται το Π.Γ.Π.

Για τη συζήτηση παρακάτω θα υποθέσουμε (φυσικά χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το πρωτεύον Π.Γ.Π είναι σε κανονική μορφή:

$$P: \quad z_p = \max\left\{ \underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \ \underline{x} \geq 0 \right\}.$$

Έστω $\underline{x}$ μια βέλτιστη ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, και ας υποθέσουμε ότι η $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη. Επομένως το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών είναι $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} > 0$.

Έστω τώρα ότι το διάνυσμα $\underline{b}$ μεταβάλλεται σε $\underline{b}+\underline{\Delta}$ όπου $\underline{\Delta}$ είναι μια διαταραχή αρκετά μικρή ώστε το διάνυσμα $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})$ να παραμένει θετικό (δείξτε ότι αν $B^{-1}\underline{b} > 0$, $\exists$ $\Delta > 0$ τέτοιο ώστε $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) > 0$). Αυτό σημαίνει ότι η λύση $\underline{x}^{(\Delta)}$, όπου $\underline{x}_B^{(\Delta)} = B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})$ και $x_j^{(\Delta)} = 0 \ \forall j \neq B(1), \dots, B(m)$ είναι εφικτή για το πρόβλημα $P^{(\Delta)}: z_p^{(\Delta)} = \max\left\{ \underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}+\underline{\Delta} \right\}$.

Από την άλλη πλευρά, η λύση $\underline{x}$ είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα, επομένως $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j \leq 0$ $\forall j$. Παρατηρούμε ότι τα ελαττωμένα κόστη $\bar{c}_j$ είναι ανεξάρτητα του $\underline{\Delta}$, επομένως θα είναι τα ίδια και για τη λύση $\underline{x}^{(\Delta)}$ του προβλήματος $P^{(\Delta)}$, αφού αυτή αντιστοιχεί στον ίδιο βασικό πίνακα B. Επομένως αφού η $\underline{x}^{(\Delta)}$ είναι εφικτή για το $P^{(\Delta)}$ και ισχύει $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$, προκύπτει ότι είναι και βέλτιστη. Συνεπώς έχουμε:

$$Z_p = z(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{c}_B' \cdot B^{-1} \underline{b}$$

$$Z_p^{(\Delta)} = z(\underline{A}, \underline{b}+\underline{\Delta}, \underline{c}) = \underline{c}_B' B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) = Z_p(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}) + \underline{c}_B' B^{-1} \underline{\Delta}$$

Όμως, όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 το διάνυσμα $\underline{c}_B' B^{-1}$ αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση $\underline{w}$ δυϊκού προβλήματος, επομένως

$$Z_p(\underline{A}, \underline{b}+\underline{\Delta}, \underline{c}) = Z_p(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}) + \underline{w}' \cdot \underline{\Delta} \qquad (3.15)$$

Από την (3.15) προκύπτει ότι μια μικρή μεταβολή κατά $\underline{\Delta}$ διανύσματος $\underline{b}$ συνεπάγεται μεταβολή της βέλτιστης τιμής κατά $\underline{w}' \underline{\Delta}$. Η παραπάνω συζήτηση μπορεί να διατυπωθεί αυστηρά σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση)

<u>Πρόταση 3.1</u> Έστω ότι το πρόβλημα $P: z_p(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c})$ (σε κανονική μορφή) έχει μη εκφυλισμένη βέλτιστη ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, και βέλτιστο διάνυσμα δυϊκών μεταβλητών $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$. Τότε ισχύει

$$\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = w_i, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (3.16)$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.1, η δυϊκή μεταβλητή w_i (στη βέλτιστη λύση) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της βέλτιστης τιμής για μικρές μεταβολές της παραμέτρου b_i.

Η ιδιότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα από μαθηματική άποψη, καθώς δίνει μια μαθηματική ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών σε σχέση με το πρωτεύον πρόβλημα. Επίσης, ανάλογα με εφαρμογή από την οποία προέρχεται το προϊόν, μπορεί να έχει και αντίστοιχη οικονομική ερμηνεία.

Για παράδειγμα αν το P έχει την ερμηνεία του προβλήματος παραγωγής με περιορισμένες ποσότητες πόρων πού είδαμε προηγουμένως, τότε, στη βέλτιστη λύση, η δυϊκή μεταβλητή w_i δίνει το ρυθμό μεταβολής του βέλτιστου κέρδους του παραγωγού αν μεταβληθεί η διαθέσιμη ποσότητα b_i του πόρου i κατά μια αρκετά μικρή ποσότητα. Δίνει επομένως την μοναδιαία τιμή στην οποία είναι διατεθειμένος ο παραγωγός να αγοράσει επιπλέον (μικρές) ποσότητες του πόρου i, χωρίς να μεταβληθούν οι υπόλοιπες ποσότητες, ή ισοδύναμα την τιμή ανά μονάδα στην οποία διατεθειμένος να πουλήσει μικρή ποσότητα από αυτή πού έχει ήδη στην κατοχή του.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ερμηνεία του w_i σχετίζεται σε κάποιο βαθμό με εκείνη που δώσαμε κατά το σχηματισμό του δυϊκού προβλήματος. Η διαφορά εδώ είναι ότι η w_i στη βέλτιστη λύση δίνει την δίκαιη τιμή του πόρου i, δηλαδή την αξία που έχει μια οριακή μονάδα του πόρου i για τον παραγωγό, δεδομένου ότι οι υπόλοιπες ποσότητες είτε παραμένουν σταθερές ή μεταβάλλονται κατά επίσης οριακό τρόπο.

Παρατηρήσεις (1) Η Πρόταση 3.1 ισχύει ανεξάρτητα από οικονομικές ερμηνείες, και υποθέτει μόνο ότι η βέλτιστη λύση είναι μη εκφυλισμένη.
(2) Λόγω της Πρότασης 2.1, η δυϊκή μεταβλητή w_i στη βέλτιστη λύση αναφέρεται συχνά ως

σκιώδης τιμή (shadow price) του περιορισμού - i.

③ Είναι ενδιαφέρον να δούμε ότι το θεώρημα συμπληρωματικότητας και η Πρόταση 3.1 είναι συμβατά ως προς τη μαθηματική ερμηνεία των w_i.
Πραγματικά αν για ένα περιορισμό της μορφής $\underline{a}_i' \underline{x} \leq b_i$ η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι τέτοια ώστε $\underline{a}_i' \underline{x} < b_i$, τότε από το Θεώρημα 3.3 προκύπτει ότι $w_i = 0$, επομένως από την Πρόταση 3.1: $\dfrac{\partial z_P}{\partial b_i} = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή z_P δε μεταβάλλεται για μικρές διαταραχές του δεξιού μέλους b_i, πράγμα αναμενόμενο δεδομένου ότι ο περιορισμός δεν είναι ενεργός.

3.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 3.1 Για το παρακάτω π.γ.π.

$$(P): \quad z_p = \max \; x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5$$
$$x_2 + 3x_3 \ge 3$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1 \le 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

(α) Σχηματίστε το δυϊκό (D) απευθείας χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες δημιουργίας του δυϊκού.

(β) Μετασχηματίστε το πρωτεύον (P) σε ΗΚ-max μορφή (P_{HK}) και σχηματίστε το δυϊκό του P_{HK}, έστω D_{HK}, σε μορφή ΗΚ-min

(γ) Δείξτε ότι τα D, D_{HK} είναι ισοδύναμα (π.χ. δείχνοντας ότι η ΗΚmin μορφή του D είναι το P_{HK}.

Ασκηση 3.2 Εστω ότι το πρόβλημα (P) είναι σε ΗΚ-min μορφή:

$$P: \quad z_p = \min c'x$$
$$A\underline{x} \ge \underline{b}$$
$$\underline{x} \ge 0.$$

Δείξτε πώς αλλάζει η ανάλυση της ενότητας 3.2 (ορισμός Lagrangean, προβλήματος $Z_L(\omega)$ κλπ) ώστε να προκύψει ο ορισμός του δυϊκού προβλήματος του P

'Άσκηση 3.3 Έστω A ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. Θεωρήστε το Π.Γ.Π.

$$\max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} \leq \underline{c}$$
$$\underline{x} \geq 0.$$

Δείξτε ότι αν ένα διάνυσμα $\underline{x}^*$ ικανοποιεί $A\underline{x}^* = \underline{c}$ και $\underline{x}^* \geq 0$, τότε το $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του Π.Γ.Π.

'Άσκηση 3.4 (Πρόβλημα φόρτωσης σάκκου – knapsack problem)

Πρόκειται για την απλούστερη εκδοχή μιας μεγάλης κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης, που είναι γνωστά με τον όρο knapsack problems.

Έστω ότι πρέπει να φορτώσουμε ένα σάκκο με ποσότητες από n διαφορετικά υλικά. Το βάρος ανά μονάδα του υλικού j είναι ίσο με a_j, $j=1,\dots,n$, (υποθέτουμε $a_j \geq 0$). Η αξία ανά μονάδα του υλικού j είναι ίση με c_j, $j=1,\dots,n$ (το c_j μπορεί να έχει οποιοδήποτε πρόσημο).

Το συνολικό βάρος του σάκκου δεν μπορεί να υπερβαίνει μια δοσμένη ποσότητα b. Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες από κάθε υλικό που θα φορτωθούν έτσι ώστε η συνολική αξία του σάκκου να είναι η μέγιστη δυνατή.

(a) Γράψτε ένα Π.Γ.Π. για το παραπάνω πρόβλημα, σε Κανονική Μορφή. Δείξτε ότι το Π.Γ.Π. είναι φραγμένο, επομένως έχει βέλτιστη λύση.

(b) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του (a) χρησιμοποιώντας τα κριτήρια βελτιστότητας του Κεφαλαίου 2.

(c) Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η βέλτιστη λύση μοναδική.

(d) Σχηματίστε το δυικό του αρχικού προβλήματος.

(e) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του (d) χωρίς τη χρήση του θεωρήματος συμπληρωματικότητας. Αν ισχύει η συνθήκη του (c), τι σημαίνει αυτό για τη βέλτιστη λύση του δυικού;

(f) Δείξτε ότι οι λύσεις των δύο προβλημάτων ικανοποιούν το Θεώρημα Συμπληρωματικότητας.

Άσκηση 3.5 (Λήμμα του Farkas) Αποδείξτε το παρακάτω αποτέλεσμα: Έστω A πίνακας $m \times n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Τότε ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής:

(i) $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$; $\underline{x} \geq 0$, $A\underline{x} = \underline{b}$

(ii) $\exists\ \underline{w} \in \mathbb{R}^m$: $\underline{w}'A \geq 0$, $\underline{w}'\underline{b} < 0$

(Υπόδειξη: Η απόδειξη (i) ⇒ όχι (ii) είναι απλή, αρκεί να θεωρήσει κανείς το γινόμενο $\underline{w}'A\underline{x}$.
Για την απόδειξη όχι (i) ⇒ (ii) θεωρήστε το π.γ.π.

$$\max\ \underline{0}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

και εφαρμόστε τη θεωρία δυικότητας.

Άσκηση 3.6 Θεωρήστε το παρακάτω ζεύγος πρωτεύοντος δυικού (rank (A) = m)

P: $z_P = \max\ \underline{c}'\underline{x}$
$A\underline{x} = \underline{b}$
$\underline{x} \geq 0$

D: $z_D = \min\ \underline{b}'\underline{w}$
$A'\underline{w} \geq \underline{c}$
$\underline{w} \in \mathbb{R}^m$

Δείξτε ότι αν ένα πρόβλημα έχει μια εφικτή βέλτιστη λύση, τότε ισχύει το ίδιο και για το άλλο πρόβλημα.

Άσκηση 3.7 Σχηματίστε το δυϊκό του προβλήματος παραγωγής ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους (Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.2.2). Έστω ότι το πρωτεύον πρόβλημα έχει λύση. Δώστε την οικονομική ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών.

Άσκηση 3.8 Επαναλάβετε την Άσκηση 3.7 για το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (Κεφ. 1, Ενότητα 1.3.2)

Άσκηση 3.9 Επαναλάβετε την Άσκηση 3.7 για το πρόβλημα προγραμματισμού εργασίας (Κεφ. 1, Ενότητα 1.4)

Άσκηση 3.10 Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κοίλης συνάρτησης και το ισοδύναμο Π.Γ.Π (Κεφ. 1, εξ. (1.11) και (1.12) αντίστοιχα)

(a) Σχηματίστε το δυϊκό πρόβλημα.

(b) Προσπαθήστε να βρείτε μια ερμηνεία του δυϊκού.