ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις βασικές ιδιότητες πάνω στις οποίες βασίζεται η ανάλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Θα μελετήσουμε από γενική άποψη τις έννοιες της βασικής εφικτής λύσης, της βασικής διεύθυνσης και αλλαγής βάσης. Από αυτές προκύπτουν εύκολα οι συνθήκες βελτιστότητας που οδηγούν στην ανάπτυξη της μεθόδου Simplex

Σημειώνουμε ότι η έμφαση σε αυτές τις σημειώσεις δίνεται στις ιδιότητες εκείνες πού είναι χρήσιμες στην επόμενη ανάλυση των ιδιοτήτων της βέλτιστης λύσης και της δυικότητας. Για τις βασικές ιδιότητες της εφικτής περιοχής και την αντιστοιχία γεωμετρικών/αλγεβρικών εννοιών στο γραμμικό προγραμματισμό ο αναγνώστης παραπέμπεται σε εισαγωγικά βιβλία Γραμμικού Προγραμματισμού (π.χ [1]).

Στο μεγαλύτερο μέρος της ανάλυσης θα αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή, όπως δίνεται από την (2.1)
Οπως γνωρίζουμε αυτό γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας δεδομένου ότι κάθε π.γ.π. μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο π.γ.π. σε κανονική μορφή.

$$z = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$\text{υ.π.} \quad A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0, \qquad (2.1)$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, A πίνακας $m \times n$ πλήρους βαθμού, δηλαδή $\operatorname{rank}(A) = m$, και $m \leq n$.

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό
$\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$ για τις γραμμές και
$\underline{A}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, n$ για τις στήλες του πίνακα A.

Με βάση αυτά ο πίνακας A γράφεται

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1' \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \end{pmatrix} = \left(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

και το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ εκφράζεται ισοδύναμα ως

$$\underline{a}_i' \underline{x} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \qquad (2.2)$$

ή ως

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{A}_j x_j = \underline{b} \qquad (2.3)$$

Η (2.3) δείχνει ότι μια λύση του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$ αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμ[ού] των στηλών του πίνακα A

2.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρώτα συνοψίζουμε τις βασικές (γνωστές) γεωμετρικές ιδιότητες της εφικτής περιοχής κ' της βέλτιστης λύσης ενός π.γ.π.

Έστω $F = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0 \}$ η <u>εφικτή περιοχή</u> του π.γ.π. (2.1). Γνωρίζουμε ότι

1) Η F είναι κυρτό πολύεδρο (όχι αναγκαστικά φραγμένο)

2) Η F έχει πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων (κορυφών)

3) Αν η F είναι φραγμένο σύνολο τότε το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

4) Αν το π.γ.π. (2.1) έχει βέλτιστη λύση, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή της F που αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση.

Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποιες επιπρόσθετες ιδιότητες που εμβαθύνουν περισσότερο στη γεωμετρία του γραμμικού προγραμματισμού.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $r(A) = m \leq n$ το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση αν $m = n$ και άπειρες λύσεις αν $m < n$. Συγκεκριμένα έστω

$$F^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b} \} . \qquad (2.4)$$

Έστω επίσης $W^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\; A\underline{x} = 0 \}$ το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = 0$.

Γνωρίζουμε (βλ. [2], σελ 250) ότι W^0 είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $\dim(W^0) = n-m$, και μάλιστα ταυτίζεται με τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $\gamma_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_A(\underline{x}) = A\underline{x}$:

$$W^0 = \ker \gamma_A .$$

Έστω $\underline{x}^0$ μια λύση του μη ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$

Τότε το σύνολο των λύσεων ταυτίζεται με το

$$F^0 = \underline{x}^0 + W^0 = \{ \underline{x}^0 + \underline{w}^0 : \underline{x} \in W^0 \} \qquad (2.5)$$

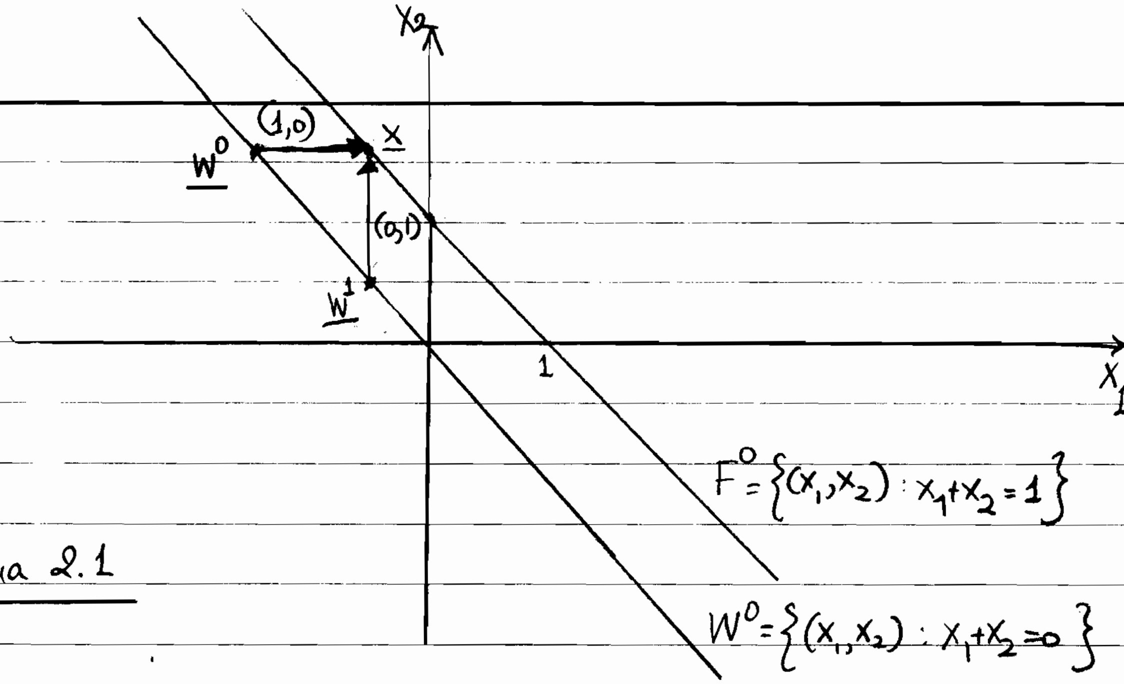
Γεωμετρικά το σύνολο W^0 αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-m$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το σύνολο F^0 είναι επίσης υπερεπίπεδο διάστασης $n-m$, παράλληλο προς το W^0, που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 2.1 Για $n=2$ και $m=1$, έστω $A = (1\ 1)$, $b=1$ δηλ.

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $x_1 + x_2 = 0$.

Στο σχήμα 2.1 φαίνονται τα σύνολα W^0, F^0:



Σχήμα 2.1

Εδώ το W^0 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 1, δηλαδή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.

Το F^0 είναι επίσης ευθεία, παράλληλη με την προηγούμενη.

Επειδή μια λύση του συστήματος $x_1+x_2=1$ είναι η $(1,0)$ κάθε σημείο $\underline{x}$ του F^0 μπορεί να γραφεί ως $\underline{x}=\underline{w}^0+(1,0)$, για κάποιο $\underline{w}^0\in W^0$, δηλαδή $F^0=(1,0)+W^0$

Επίσης και το $(0,1)$ είναι λύση της $x_1+x_2=1$, επομένως κάθε σημείο $\underline{x}$ του F μπορεί να γραφεί και ως

$$\underline{x}=\underline{w}^1+(0,1) \text{ για κάποιο } \underline{w}^1\in W^0, \text{ δηλαδή } F^0=(0,1)+W^0.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, ενώ το σύνολο F^0 είναι μοναδικό, η αναπαράσταση του με τη μορφή $\underline{x}^0+W^0$ δέν είναι μοναδική, αφού ως $\underline{x}^0$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε, σημειώνουμε ότι για $\underline{b} \neq 0$ το σύνολο $F^0 = \underline{x}^0 + W^0$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, καθώς δεν περιέχει το σημείο $\underline{0}$. Είναι όμως υπερεπίπεδο διάστασης $n-m$, που προκύπτει από τον υπόχωρο W^0 με παράλληλη μετατόπιση. Εναλλακτικά ονομάζεται και συσχετισμένος υπόχωρος (affine subspace) του $\mathbb{R}^n$, κατ' αναλογία με τη συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax + b$ που δεν είναι γραμμική αλλά αφφινική, ή σύμπλοκο (coset).

Επιστρέφουμε τώρα στην εφικτή περιοχή F του προβλήματος (2.1). Με βάση την προηγούμενη συζήτηση η F είναι κυρτό πολύεδρο διάστασης $n-m$, που βρίσκεται πάνω στο υπερεπίπεδο F^0:

$$F = \{ \underline{x} \in F^0 : \underline{x} \geq 0 \},$$

αποτελεί δηλαδή την τομή του υπερεπιπέδου F^0 με το σύνολο $\mathbb{R}^n_+ = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \geq 0 \}$, $\quad F = F^0 \cap \mathbb{R}^n_+$.

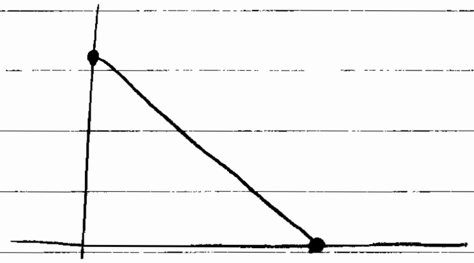
Επομένως οι έδρες του πολυέδρου F ορίζονται από εξισώσεις της μορφής $x_j = 0$ για κάποιο j ενώ οι ακμές και οι κορυφές, ως τομείς εδρών, από εξισώσεις $x_j = 0$ για δύο ή περισσότερα j.

Παράδειγμα 2.1 (συνέχεια)

Για το σύστημα
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

τό σύνολο λύσεων είναι $F = \{ (x_1, x_2) \in F_0, \; x_1, x_2 \geq 0 \}$

που αντιστοιχεί γεωμετρικά στην τομή της ευθείας $x_1+x_2=1$ με το δεξιό τεταρτημόριο (βλ. Σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2

Τα ακραία σημεία του F είναι οι κορυφές $(1,0)$, $(0,1)$.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

, δηλ. $m=2$, $n=4$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}=\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $r(A)=m=2$. Επομένως το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$F^0=\{\underline{x}\in \mathbb{R}^4 : A\underline{x}=\underline{b}\}$$ είναι

υπερεπίπεδο διάστασης $n-m=2$ στο χώρο $\mathbb{R}^4$, και

το σύνολο των μη αρνητικών λύσεων είναι το

$$F=F^0\cap \mathbb{R}^4_+ .$$

Επειδή το σύνολο F είναι $F\subseteq F_0$ όπου $\dim F=2$, μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως κυρτό πολύεδρο του διδιάστατου επιπέδου.
Η γραφική παράσταση δεν είναι μοναδική, επειδή εξαρτάται

από τη βάση του υπόχωρου $W_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$

που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τη γενική λύση του γραμμικού συστήματος.

Για παράδειγμα, αν στο αρχικό σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ εκφράσουμε τις x_3, x_4 ως συναρτήσεις των x_1, x_2, δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + x_4 = 15 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 5 + x_1 - x_2 \end{array}, \quad \text{παίρνουμε}$$

ως γενική λύση την

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 10 - 2t_1 - t_2 \\ 5 + t_1 - t_2 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

δηλαδή

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως $F^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + W^0$,

όπου W^0 ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τη βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Με βάση αυτή την αναπαράσταση το σύνολο λύσεων F^0 αντιστοιχεί γραφικά στο επίπεδο (t_1, t_2), και το

σύνολο λύσεων $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 : A\underline{x} = \underline{b}, \ \underline{x} \geq 0\} = F^0 \cap \mathbb{R}^4$

προσδιορίζεται από τους παρακάτω περιορισμούς ως προς (t_1, t_2):

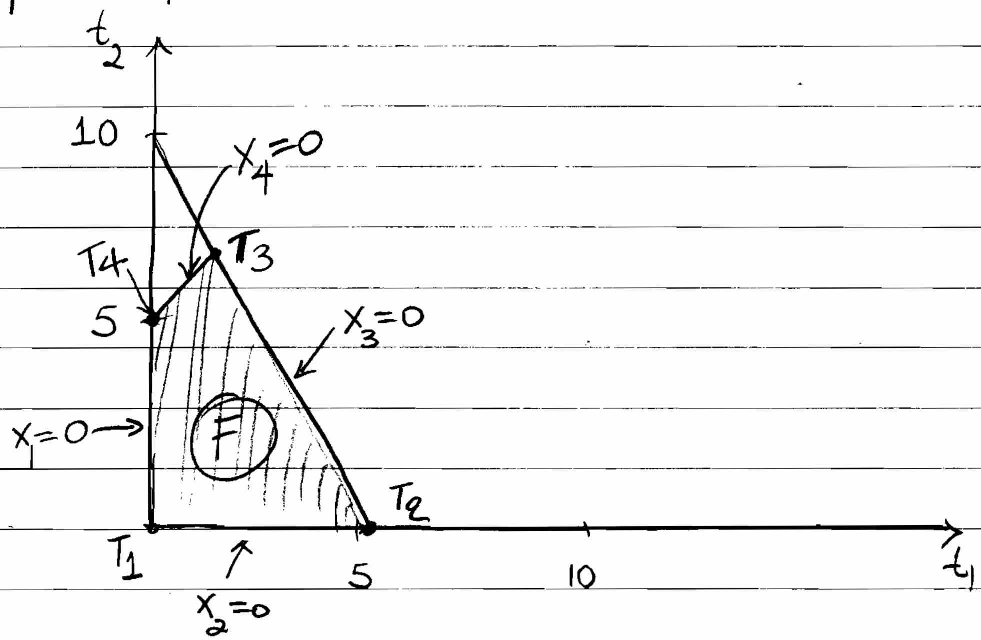
$x_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow 10 - 2t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow 2t_1 + t_2 \leq 10$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow 5 + t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 - t_1 \leq 5$

Γραφικά αυτό αντιστοιχεί στο πολύεδρο που φαίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3

Το πολύεδρο F έχει 4 κορυφές για τις οποίες έχουμε

$T_1: t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x_1 = 0, x_2 = 0$,

$T_2: t_1 = 5, t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x_2 = x_3 = 0$

$T_3: \left.\begin{array}{l} 2t_1+t_2=10 \\ -t_1+t_2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1=\frac{5}{3}, \; t_2=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x_3 = x_4 = 0$

$T_4: t_1=0, \; t_2=5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ δηλαδή $x_1 = x_4 = 0$.

Όπως περιμέναμε, οι πλευρές του πολυέδρου F αντιστοιχούν στις εξισώσεις $x_j=0$, $j=1,2,3,4$ και οι κορυφές σε τομές των πλευρών.

Η αναπαράσταση του Σχήματος 2.3 βασίστηκε στη χρήση της βάσης $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ του υπόχωρου W^0, δηλαδή στην απαλοιφή των x_3, x_4 από τις αρχικές εξισώσεις.

Όμως η αναπαράσταση αυτή δεν είναι μοναδική. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να απαλείψουμε τις x_1, x_2 οπότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2 = 15 - x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 10 - x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{20}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \end{array}$$

Επομένως:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \\ \frac{20}{3} - \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

για $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, με αυτή την αναπαράσταση,

$$F^o = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : A\underline{x} = \underline{b} \} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + W^o,$$

όπου ως βάση του W^o παίρνουμε την $\left\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Τώρα η εφικτή περιοχή $F = F^o \cap \mathbb{R}^4_+$ παριστάνεται γραφικά ως ένα κυρτό πολύεδρο στο επίπεδο (v_1, v_2) που ορίζεται από τους περιορισμούς

$x_1 \geq 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \leq 5$

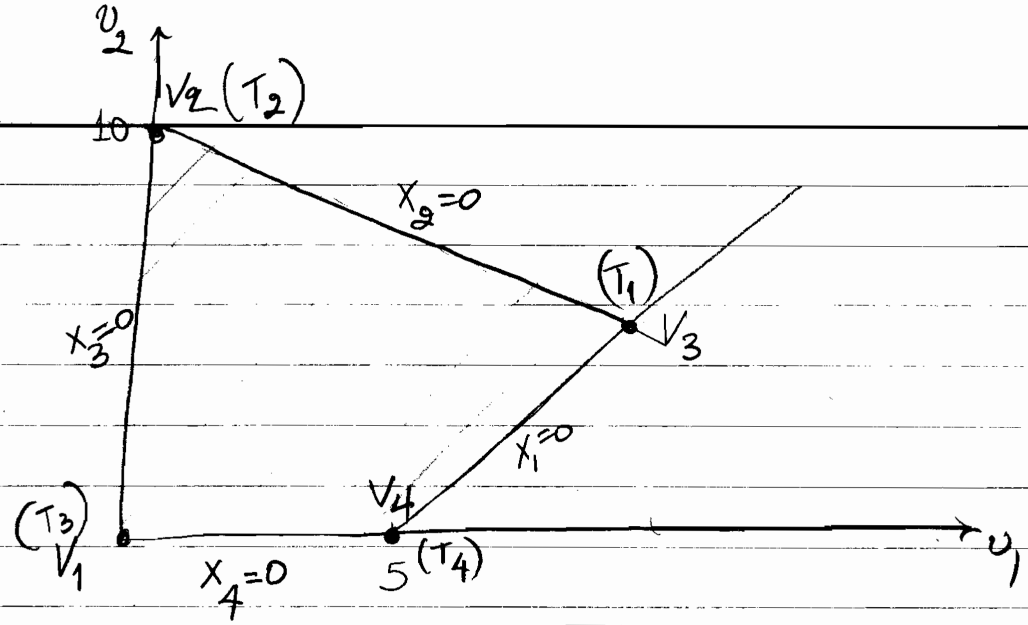
$x_2 \geq 0 \Rightarrow v_1 + 2v_2 \leq 20$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow v_1 \geq 0$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow v_2 \geq 0$

Αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.4,

που έχει επίσης 4 κορυφές. Αυτές αντιστοιχούν σε



Σχήμα 2.4

$V_1 : v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_3 = x_4 = 0) \quad (T_3)$

$V_2 : v_1 = 0,\ v_2 = 10 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (x_2 = x_3 = 0) \quad (T_2)$

$V_3 : v_1 = 10,\ v_2 = 5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (x_1 = x_2 = 0) \quad (T_1)$

$V_4 : v_1 = 5,\ v_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 = x_4 = 0) \quad (T_4)$

Παρατηρούμε ότι ενώ η γραφική παράσταση του F είναι διαφορετική στα σχήματα 2.3 κ' 2.4, παρ' όλα αυτά οι κορυφές αντιστοιχούν στις ίδιες λύσεις $\underline{x} \in R^4$ και υπάρχει αντιστοίχιση 1-1 μεταξύ των κορυφών των δύο πολυέδρων.

Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί κανείς να κατασκευάσει και άλλες ισοδύναμες γραφικές παραστάσεις του συνόλου F. Για όλες αυτές το αντίστοιχο πολύεδρο θα έχει 4 κορυφές που αντιστοιχούν στις 4 λύσεις που έχουμε βρεί.

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των λύσεων $F=\{\underline{x} : A\underline{x}=b, \underline{x}\geq 0\}$ δεν είναι μοναδική αλλά εξαρτάται από την επιλογή της βάσης του υπόχωρου W^0. Όμως για όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις το αντίστοιχο κυρτό πολύεδρο έχει πλευρές που προσδιορίζονται από περιορισμούς της μορφής $x_j=0$, και οι κορυφές του σε τομές δύο ή περισσότερων περιορισμών.
Επίσης υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις κορυφές των πολυέδρων που προκύπτουν από δύο διαφορετικές επιλογές βάσης.

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατή η γραφική αναπαράσταση και επίλυση ενός Π.Γ.Π. αν σε κανονική μορφή ισχύει $n-m=2$. Σε αυτή την περίπτωση το πολύεδρο F είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

2.2.1. Εναλλακτική Γεωμετρική Αναπαράσταση

Σ' αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική γεωμετρική αναπαράσταση ενός Π.Γ.Π. που θα φανεί χρήσιμη στις επόμενες ενότητες για την κατανόηση της έννοιας των βασικών λύσεων.

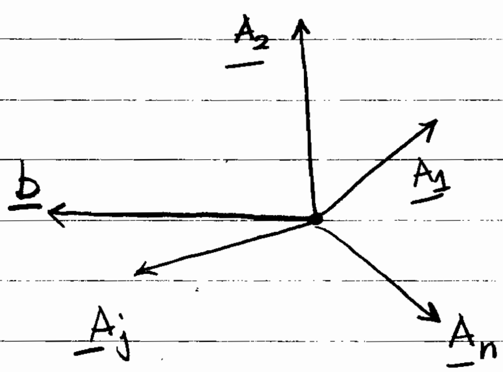
Στην προηγούμενη αναπαράσταση τα διανύσματα $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ θεωρούνται ως σημεία του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου.

Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα A όπως και το διάνυσμα $\underline{b}$ ως στοιχεία του m-διάστατου Ευκλείδιου χώρου. Με αυτή την ερμηνεία το σύστημα

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j = \underline{b}$$

αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των στηλών του πίνακα A.

Στην ειδική περίπτωση όπου $m=2$, αυτή η ερμηνεία επιδέχεται και γραφική αναπαράσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5

2.3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις έννοιες της βασικής εφικτής λύσης και της αλλαγής βάσης, και το πως αυτές οδηγούν στην ανάπτυξη της μεθόδου Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Θεωρούμε ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή όπως δίνεται στην (2.1), και την εφικτή περιοχή του $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq 0\}$.

Για ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$I^+(\underline{x}) = \{j : x_j > 0\}$$
$$I^-(\underline{x}) = \{j : x_j < 0\}$$
$$I^0(\underline{x}) = \{j : x_j = 0\}$$

δηλαδή τα σύνολα των δεικτών που αντιστοιχούν σε θετικές, αρνητικές και μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$, αντίστοιχα. Προφανώς τα σύνολα $I^+(\underline{x})$, $I^-(\underline{x})$, $I^0(\underline{x})$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Επίσης για ένα σύνολο $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε

$$A_I = (A_j,\ j \in I)$$

τον υποπίνακα του A διαστάσεων $m \times |I|$, που αποτελείται από τις στήλες του A που αντιστοιχούν στους δείκτες από το σύνολο I. Για τους σκοπούς της ανάλυσης αρκεί να υποθέσουμε ότι η σειρά με την οποία σχηματίζονται οι στήλες του A_I δεν έχει σημασία, δηλαδή όλοι οι υποπίνακες του A που αποτελούνται από τις ίδιες στήλες σε διαφορετική διάταξη αντιστοιχούν στον ίδιο υποπίνακα.

Ορισμός 2.1 Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται Βασική Λύση (Β
αν ικανοποιεί
(i) $A\underline{x} = \underline{b}$
(ii) Οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$, δηλαδή στο σύνολο $I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Ορισμός 2.2 Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται Βασική Εφικτή Λύση (ΒΕΛ) αν είναι Βασική Λύση και επιπλέον $\underline{x} \geq 0$.

Επειδή $r(A) = m < n$, ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A μπορεί να είναι το πολύ m, επομένως οι μη μηδενικές συνιστώσες μιας ΒΛ μπορεί επίσης να είναι το πολύ m το πλήθος.
Από την άλλη πλευρά ας θεωρήσουμε μια ΒΛ $\underline{x}$, με $|I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})| = k < m$, και ας υποθέσουμε ότι οι μη μηδενικές συνιστώσ
αντιστοιχούν στους δείκτες $B(1), \dots, B(k)$:

$$x_{B(1)}, x_{B(2)}, \dots, x_{B(k)} \neq 0, \quad x_j = 0 \text{ για } j \neq B(1), \dots, B(k)$$

Τότε από τον ορισμό 2.1 έχουμε ότι οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \dots, \underline{A}_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Επειδή $r(A) = m$, υπάρχουν επιπλέον $m-k$ στήλες του A, έστω $B(k+1), \dots, B(m)$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\underline{A}_{B(1)}, \dots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (για την απόδειξη βλ. Άσκηση 2.1)

Επομένως για μια βασική λύση ισχύει η παρακάτω πρόταση (που αποτελεί και ισοδύναμο ορισμό)

Πρόταση 2.1 Ένα διάνυσμα $\underline{x}$ είναι βασική λύση αν και μόνο αν $A\underline{x} = b$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), \cdots, B(m)$ τέτοιοι ώστε
(i) Οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες
(ii) $I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x}) \subseteq \{B(1), \cdots, B(m)\}$

Ορισμός 2.3 Ένας υποπίνακας $m \times m$

$$B = \left(\underline{A}_{B(1)} \cdots \underline{A}_{B(m)}\right)$$

του πίνακα A που αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ονομάζεται βασικός πίνακας ή βάση (basis).
Οι μεταβλητές $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ είναι οι βασικές μεταβλητές της βάσης B και οι υπόλοιπες οι μη βασικές.

Ορισμός 2.4 Μια βασική λύση $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη (nondegenerate) αν $|I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})| = m$, δηλαδή έχει ακριβώς m μη μηδενικές συνιστώσες, ενώ είναι εκφυλισμένη (degenerate) αν $|I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})| < m$.

Έστω $\underline{x}$ μια μη εκφυλισμένη βασική λύση, και B η βάση που αντιστοιχεί στις m θετικές συνιστώσες της $\underline{x}$. (Η βάση αυτή προσδιορίζεται μονοσήμαντα, αφού η $\underline{x}$ έχει ακριβώς m μη μηδενικές συνιστώσες). Τότε ορίζουμε $\underline{x}_B \in \mathbb{R}^m$ ως το διάνυσμα που αποτελείται από τις μη μηδενικές συνιστώσες που έχουν ληφθεί με την ίδια σειρά όπως και οι αντίστοιχες στήλες του A στη βάση B, δηλαδή αν οι δείκτες των στηλών είναι $B(1), \cdots, B(m)$, τότε το $\underline{x}_B$ αποτελείται από τις βασικές μεταβλητές

$$B = \left(\underline{A}_{B(1)} \cdots \underline{A}_{B(m)}\right) \quad \text{και} \quad \underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}.$$

Με αυτό το συμβολισμό η εξίσωση $A\underline{x}=\underline{b}$ που ικανοποιείται από τη $\underline{x}$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j = \underline{b} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} + \sum_{j\notin B} x_j \underline{A}_j = \underline{b}$$

Επειδή $x_j=0$ για $j \neq B(1),\dots,B(m)$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} = \underline{b} \Rightarrow B\underline{x}_B = \underline{b}$$

Επειδή ο B αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, είναι αντιστρέψιμος, επομένως $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$

Προκύπτει επομένως ότι οι συγκεκριμένες τιμές των $x_{B(1)},\dots,x_{B(m)}$ καθορίζονται μονοσήμαντα από το σύνολο των δεικτών $B(1),\dots,B(m)$ ή ισοδύναμα τον βασικό πίνακα B.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια εκφυλισμένη βασική λύση $\underline{x}$, με μη μηδενικές συνιστώσες τις $B(1),\dots,B(k)$, $k<m$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1, υπάρχουν επίσης $m-k$ στήλες του A ώστε ο πίνακας $B=(\underline{A}_{B(1)},\dots,\underline{A}_{B(m)})$ να είναι βασικός. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε πάλι

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$ ως το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών.

Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο όπως και παραπάνω προκύπτει

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$$

Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι ένας βασικός πίνακας B προσδιορίζει μονοσήμαντα μια βασική λύση $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ για την οποία ισχύει $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0}_{n-m} \end{pmatrix}$, όπου $\underline{x}_B = B^{-1}b \in \mathbb{R}^m$.

Η λύση αυτή είναι μη εκφυλισμένη αν $x_{B(i)} \neq 0$, $i=1,\dots,m$ και εκφυλισμένη αν $x_{B(i)} = 0$ για κάποιο i.
Δηλαδή η επιλογή των m στηλών του βασικού πίνακα B προσδιορίζει μονοσήμαντα ποιές συνιστώσες της αντίστοιχης βασικής λύσης είναι μη μηδενικές, όπως επίσης και τις τιμές τους.

Από την άλλη πλευρά, αν $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση, τότε αυτή προσδιορίζει μονοσήμαντα το βασικό πίνακα μόνο αν είναι μη εκφυλισμένη. Αν είναι εκφυλισμένη, τότε οποιαδήποτε συλλογή m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A που περιλαμβάνει τις k στήλες που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$ αποτελεί βάση. Κάθε μιά από αυτές τις βάσεις δίνει την ίδια εκφυλισμένη λύση $\underline{x}$

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των βασικών λύσεων.
Υπενθυμίζουμε ότι η εφικτή περιοχή $F = \{ x \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq 0 \}$

αντιστοιχεί γεωμετρικά σε ένα κυρτό πολύεδρο διάστασης $n-m$, πού βρίσκεται στο υπερεπίπεδο $F^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b} \}$

και ορίζεται από τους περιορισμούς $x_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$.

Μέ βάση αυτή την αναπαράσταση η γεωμετρική ερμηνεία των βασικών εφικτών λύσεων δίνεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1 : Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι Βασική Εφικτή Λύση του Π.Γ.Π. (2.1) αν και μόνο αν το $\underline{x}$ είναι κορυφή του πολυέδρου της εφικτής περιοχής F.

(Για την απόδειξη, όπως επίσης και τον ορισμό της κορυφής βλ. π.χ. [1])

Εκτός από αυτή τη γεωμετρική ερμηνεία, είναι χρήσιμο να δούμε την αντιστοιχία που προκύπτει από την εναλλακτική αναπαράσταση της ενότητας 2.2.1.

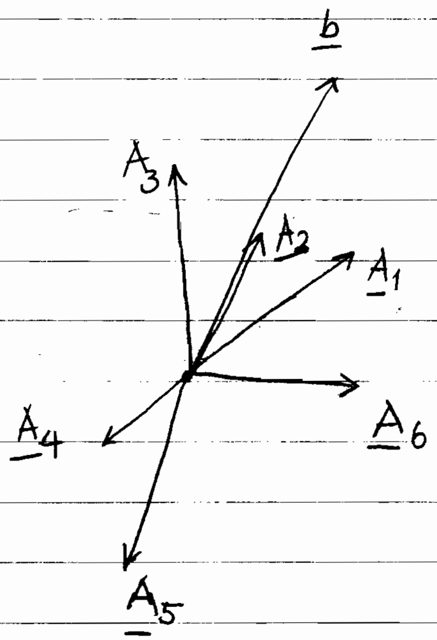
Κατ' αρχήν αφού $r(A)=m$, ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A είναι όλος ο $\mathbb{R}^m$, και οποιοσδήποτε βασικός πίνακας B αντιστοιχεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^m$.

Επίσης η λύση του συστήματος $A\underline{x}=\underline{b} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j = \underline{b}$ αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A. Επειδή $r(A)=m$ αυτό είναι δυνατό για κάθε $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, επομένως το σύστημα $A\underline{x}=\underline{b}$ έχει πάντα λύση.

Μια βασική λύση $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ και ένας βασικός πίνακας B αντιστοιχούν επομένως στην έκφραση του $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των βασικών στηλών μόνο.

Αυτό είναι επίσης πάντα δυνατό για κάθε βασικό πίνακα B και κάθε $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, δεδομένου ότι ο B αντιστοιχεί σε βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα 2.3. Έστω $m=2$, $n=6$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Ένας βασικός πίνακας ορίζεται από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα-στήλες του A.



Σχήμα 2.6

Από το σχήμα φαίνεται ότι ο πίνακας $B^{(1)} = (\underline{A}_1\ \underline{A}_3)$ είναι βασικός επειδή τα διανύσματα $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αντίθετα ο πίνακας $B^{(2)} = (\underline{A}_1\ \underline{A}_3)$ δεν είναι βασικός, καθώς τα $\underline{A}_1, \underline{A}_3$ είναι συγγραμμικά

Ας θεωρήσουμε τώρα τον βασικό πίνακα $B^{(1)} = (\underline{A}_1, \underline{A}_3)$

Επειδή το διάνυσμα $\underline{b}$ δεν είναι συγγραμμικό με κανένα από τα $\underline{A}_1, \underline{A}_3$ η έκφραση $\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_3 \underline{A}_3$ αντιστοιχεί σε $x_1 \neq 0$ και $x_3 \neq 0$, επομένως το βασικό διάνυσμα είναι το $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ και η βασική λύση $\underline{x}^{(1)} = (x_1\ 0\ x_3\ 0\ 0\ 0)'$

είναι μη εκφυλισμένη.

Αντίθετα για τον βασικό πίνακα $B^{(3)} = (\underline{A}_1, \underline{A}_2)$, επειδή το $\underline{b}$ είναι συγγραμμικό με το $\underline{A}_2$, η έκφραση
$\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_2 \underline{A}_2$ αντιστοιχεί σε $x_1 = 0$ και $x_2 \neq 0$.
Για να συμπληρωθεί ο βασικός πίνακας αρκεί να πάρουμε οποιαδήποτε από τις άλλες στήλ
Επομένως το βασικό διάνυσμα είναι $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ και η βασική λύση $x^{(3)} = (0\ x_2\ 0\ 0\ 0\ 0)$ είναι εκφυλισμένη.

Όσον αφορά την εφικτότητα, τόσο η $\underline{x}^{(1)}$ όσο και η $\underline{x}^{(3)}$ είναι βασικές εφικτές λύσεις. Αντίθετα για το βασικό πίνακα $B^{(4)} = (\underline{A}_1, \underline{A}_6)$, η έκφραση $\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_6 \underline{A}_6$

αντιστοιχεί σε βασικό διάνυσμα $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}$ με $x_1 > 0$, $x_6 < 0$

επομένως η λύση $\underline{x}^{(4)} = (x_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ x_6)'$ είναι

βασική αλλά όχι εφικτή.

2.4. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ – ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά τη διαδικασία μετάβασης από μια βασική εφικτή λύση σε μια γειτονική, που αποτελεί το δομικό στοιχείο για την μέθοδο Simplex επίλυσης ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή.

Στη συζήτηση που ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι κάθε βασική εφικτή λύση είναι μη εκφυλισμένη. Επομένως κάθε ΒΕΛ έχει m θετικές και $n-m$ μηδενικές συντεταγμένες.
Στη γεωμετρική αναπαράσταση μια μη εκφυλισμένη ΒΕΛ προκύπτει από την τομή $n-m$ υπερεπιπέδων της μορφής $x_j=0$ και αντιστοιχεί σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

Η συζήτηση δεν έχει σκοπό την πλήρη ανάπτυξη και θεωρητική θεμελίωση της μεθόδου Simplex, που θεωρείται γνωστή (βλ. [1]). Σκοπός είναι η παρουσίαση σε γενική μορφή κάποιων βασικών ιδιοτήτων και εννοιών πού αφενός σχετίζονται άμεσα με τη διαδικασία επίλυσης και αφ' ετέρου είναι χρήσιμες για την κατανόηση της θεωρίας δυϊκότητας στο επόμενο κεφάλαιο.

Υπενθυμίζουμε καт' αρχή το βασικό θεώρημα για τη βέλτιστη λύση ενός π.γ.π.

<u>Θεώρημα 2.2</u> Αν υπάρχει βέλτιστη λύση του π.γ.π. (2.1), τότε υπάρχει τουλάχιστον μια βασική εφικτή λύση που είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Η σημασία του Θεωρήματος 2.2 βρίσκεται στο ότι επιτρέπει, για την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης, τον περιορισμό στο σύνολο των βασικών εφικτών λύσεων, που είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$\max\{c'x : x \in F\} = \max\{c'x : x \text{ ΒΕΛ του συνόλου } F\}$$

Από την άλλη πλευρά, ο αριθμός των ΒΕΛ, παρ' ότι είναι πεπερασμένος, συνήθως αυξάνεται εκθετικά με την τάξη του προβλήματος, δηλ. τις παραμέτρους m, n.

Πραγματικά, έστω $K(F) = \{\underline{x} : A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq 0,\ x \text{ ΒΕΛ}\}$ το σύνολο των ΒΕΛ, δηλαδή των κορυφών της εφικτής περιοχής F, και $N_K(F) = |K(F)|$ το πλήθος των ΒΕΛ.
Επειδή κάθε ΒΕΛ αντιστοιχεί σε ένα βασικό πίνακα (κάτω από την υπόθεση μη εκφυλισμένων ΒΕΛ), αλλά κάθε βασικός πίνακας αντιστοιχεί σε μια ΒΛ που μπορεί να μην είναι εφικτή, προκύπτει ότι το $N_K(F)$ είναι μικρότερο ή ίσο από τον αριθμό των βασικών πινάκων που σχηματίζονται από τις στήλες του A. Επίσης κάθε βασικός πίνακας αποτελείται από m στήλες του A, που επιπλέον πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως ο αριθμός των βασικών πινάκων είναι άνω φραγμένος από τον αριθμό των συνδυασμών m στηλών από τις n στήλες του A.
Συνεπώς ισχύει ότι

$$N_K(F) \leq \binom{n}{m} \tag{2.6}$$

Ενώ η σχέση αυτή δίνει άνω φράγμα για τον αριθμό των ΒΕΛ, στην πραγματικότητα δείχνει και την πολυπλοκότητα του προβλήματος, αν κάποιος ακολουθούσε ένα στοιχειώδη αλγόριθμο που θα σχημάτιζε όλους τους βασικούς πίνακες, θα εξέταζε αν η αντίστοιχη ΒΛ είναι εφικτή κ' θα υπολόγιζε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για να καταλήξει σε εκείνη τη λύση που δίνει τη μέγιστη τιμή. Είναι προφανές ότι ένας τέτοιος αλγόριθμος απλής απαρίθμησης δε είναι βιώσιμος ως μέθοδος λύσης για προβλήματα έστω και μέτριου μεγέθους ($n \approx 10$, $m \approx 5$).

Βλέπουμε επομένως ότι για να εκμεταλλευθεί κανείς το Θεώρημα 2.2 χρειάζεται ένας πιο συστηματικός τρόπος εξέτασης των ΒΕΛ ενός π.γ.π, που δεν απαιτεί την απαρίθμηση όλων των ΒΕΛ. Η μέθοδος Simplex είναι ένας τέτοιος αλγόριθμος που από τη μια μεριά περιορίζεται στο σύνολο K(F) για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, αλλά από την άλλη διαθέτει δύο σημαντικά εργαλεία για να αποφύγει την εξέταση όλων των ΒΕΛ. Αυτά είναι:

(α) Ένα <u>κριτήριο βελτιστότητας</u>, δηλαδή ένας τρόπος ελέγχου για το αν μια συγκεκριμένη ΒΕΛ είναι βέλτιστη, χρησιμοποιώντας πληροφορία μόνο από την παρούσα λύση, και

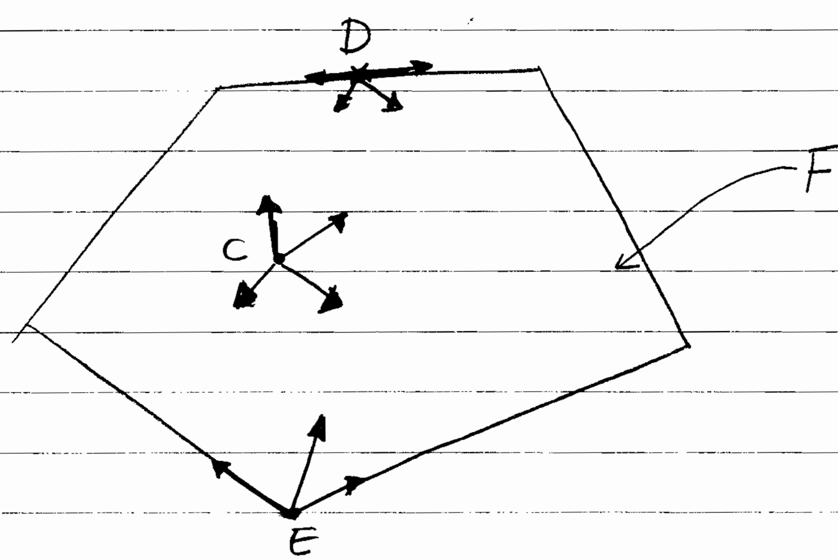
(b) Μια <u>μέθοδος βελτίωσης</u>, δηλαδή ένας τρόπος μετάβασης από μια μη βέλτιστη ΒΕΛ σε μια άλλη ΒΕΛ που έχει μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Είναι προφανές ότι, επειδή ο αριθμός των ΒΕΛ είναι πεπερασμένος, αν το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση, ένας αλγόριθμος αυτού του τύπου θα τη βρει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις βασικές έννοιες και ιδιότητες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των δύο παραπάνω εργαλείων. Η πρώτη βασική έννοια είναι αυτή της <u>εφικτής διεύθυνσης</u>

<u>Ορισμός 2.5</u> Έστω $\underline{x} \in F$ μια εφικτή λύση του π.γ.π. (2.1). Ένα διάνυσμα $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται εφικτή κατεύθυνση στο σημείο $\underline{x}$, αν $\exists\ \theta > 0$ τέτοιος ώστε $\underline{x} + \theta \underline{d} \in F$.

Διαισθητικά μια εφικτή κατεύθυνση προσδιορίζει μια κατεύθυνση κίνησης από μια εφικτή λύση σε μια διαφορετική επίσης εφικτή λύση. Στο Σχήμα 2.7 τα βέλη δείχνουν παραδείγματα εφικτών κατευθύνσεων σε διάφορα σημεία της εφικτής περιοχής.



<u>Σχήμα 2.7</u>

Η έννοια της εφικτής κατεύθυνσης είναι χρήσιμη τόσο για την ανάπτυξη του κριτηρίου βελτιστότητας, όσο και για τη μέθοδο βελτίωσης.
Σε ένα π.γ.π σε κανονική μορφή μια εφικτή λύση $\underline{x}$ ικανοποιεί $A\underline{x} = b$ και $\underline{x} \geq 0$.
Επομένως μια κατεύθυνση $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ είναι εφικτή μόνο αν για κάποιο $\theta > 0$ η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d}$ ικανοποιεί επίσης $A(\underline{x} + \theta \underline{d}) = b$. Επειδή $A\underline{x} = \underline{b}$, προκύπτει η εξής αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση:

$$A\underline{d} = 0 \tag{2.7}$$

Επομένως κάθε εφικτή κατεύθυνση είναι διάνυσμα του γραμμικού υπόχωρου W^0 των λύσεων του ομογενούς συστήματος (βλ. (2.5)) και αυτό εξασφαλίζει ότι αν η αρχική λύση $\underline{x}$ ανήκει στο υπερεπίπεδο $F^0 = \{\underline{x} : A\underline{x} = b\}$ τότε και η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d}$ επίσης ανήκει στο F^0.

Για να είναι βέβαια το $\underline{d}$ εφικτή διεύθυνση θα πρέπει, εκτός της (2.7), να ισχύει ότι η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$, δηλαδή βρίσκεται μέσα στο κυρτό πολύεδρο F της εφικτής περιοχής.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.7, στο σημείο C όλα τα διανύσματα $\underline{d} \in W^0$ είναι εφικτές κατευθύνσεις, επειδή το C είναι εσωτερικό σημείο της εφικτής περιοχής. Για τα σημεία D και E που βρίσκονται στο σύνορο της F πρέπει εκτός της $A\underline{d} = 0$ να ικανοποιούνται και επιπλέον συνθήκες.

Επειδή μας ενδιαφέρει η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου που εξετάζει μόνο ΒΕΛ, χρειάζεται να εστιάσουμε την προσοχή μας στις εφικτές κατευθύνσεις μιας ΒΕΛ, δηλαδή μιας κορυφής του F, και ιδιαίτερα σε εκείνες που οδηγούν από μια ΒΕΛ σε μια άλλη ΒΕΛ.

Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$, με βασικό πίνακα $B = (\underline{A}_{B(1)}, \dots, \underline{A}_{B(m)})$

Επειδή υποθέτουμε ότι η $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη ισχύει

$$x_i > 0 \text{ για } i = B(1), \dots, B(m) \text{ και } x_j = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } j.$$

Για τη ΒΕΛ $\underline{x}$ θεωρούμε μια μη βασική $j \neq B(1), \dots, B(m)$ και μια εφικτή κατεύθυνση τέτοια ώστε $d_j = 1$ και $d_k = 0$ για $k \neq j, B(1), \dots, B(m)$. Αυτή η κατεύθυνση $\underline{d}$ οδηγεί σε λύσεις για τις οποίες όλες οι μη βασικές μεταβλητές της $\underline{x}$ διατηρούνται σε μηδενική τιμή εκτός από τη μεταβλητή x_j που παίρνει θετικές τιμές. Πραγματικά αυτό προκύπτει από τη μορφή της νέας λύσης

$$\underline{x} + \theta \underline{d} \text{ για } \theta > 0.$$

Είναι σημαντικό να δούμε ότι η συνθήκη $d_j = 1$, $d_k = 0$, $k \neq j, B(1)$ μαζί με την εξίσωση (2.7) προσδιορίζει μονοσήμαντα την εφικτή κατεύθυνση. Με άλλα λόγια υπάρχει μόνο μια εφικτή κατεύθυνση με την παραπάνω ιδιότητα. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι για να οριστεί πλήρως το διάνυσμα $\underline{d}$ πρέπει να οριστούν οι συντεταγμένες $d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)}$. Από την εξίσωση $Ad = 0$ προκύπτει

$$Ad = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} d_k \underline{A}_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} d_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} + \underline{A}_j = 0,$$

αφού $d_k = 0$ για $k \neq j, B(1), \ldots, B(m)$. Επομένως

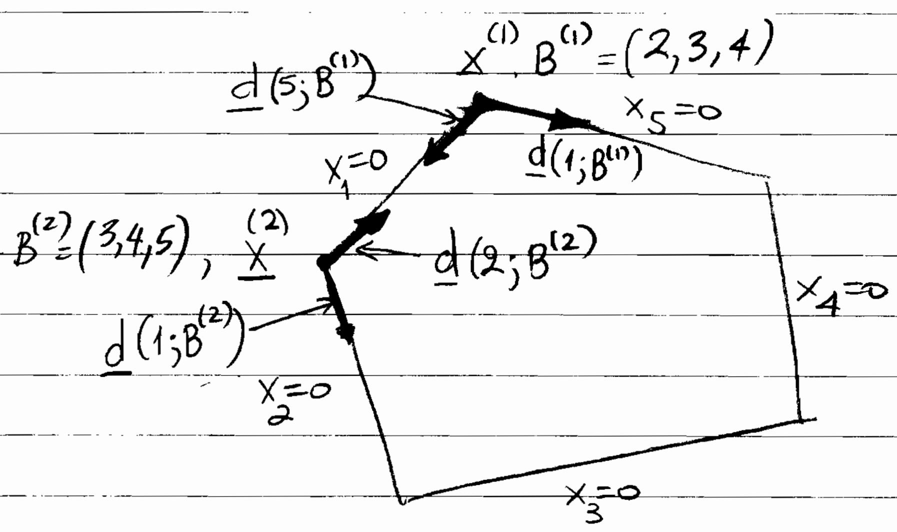
$$B\underline{d}_B + \underline{A}_j = 0 \Rightarrow B\underline{d}_B = -\underline{A}_j \Rightarrow \underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j,$$

όπου $\underline{d}_B = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ \vdots \\ d_{B(m)} \end{pmatrix}$. Συνεπώς το διάνυσμα $\underline{d}$

είναι της μορφής $\underline{d} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{A}_j \\ 0 \\ \vdots \\ d_j = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Το διάνυσμα $\underline{d}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες ονομάζεται η <u>βασική κατεύθυνση-j</u> της βάσης B και συμβολίζεται με $\underline{d}(j;B)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία των βασικών κατευθύνσεων φαίνεται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8

Για παράδειγμα η ΒΕΛ $\underline{x}^{(1)}$ που αντιστοιχεί στο βασικό πίνακα $B^{(1)}$ προσδιορίζεται από την τομή των υπερεπιπέδων $x_1 = 0$, $x_5 = 0$. Επομένως για τη $\underline{x}^{(1)}$

μπορούν να οριστούν δύο βασικές κατευθύνσεις, η $\underline{d}(1; B^{(1)})$ και $\underline{d}(5; B^{(1)})$. Η $\underline{d}(1; B^{(1)})$ οδηγεί σε λύσεις

με $x_1 > 0$ και $x_5 = 0$ δηλαδή πάνω στην ακμή $x_5 = 0$ της F.

Αντίστοιχα η $\underline{d}(5; B^{(1)})$ οδηγεί σε λύσεις πάνω στην ακμή $x_1 = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι μια βασική κατεύθυνση οδηγεί από μια κορυφή της εφικτής περιοχής σε λύσεις πάνω σε μια ακμή της F

Το επόμενο ερώτημα είναι πού μπορεί να οδηγήσει η κίνηση πάνω σε μια βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j; B)$. Εδώ υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u> Το διάνυσμα $\underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j$ είναι τέτοιο

ώστε $d_{B(i)} < 0$ για ένα τουλάχιστον $i = 1, \ldots, m$.

Σ' αυτή την περίπτωση αν πάρουμε λύσεις που βρίσκονται πάνω στην εφικτή κατεύθυνση, δηλαδή

$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j; B)$, αυτές θα είναι της μορφής

$$\underline{x}(\theta) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} x_{B(1)} + \theta d_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} + \theta d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad \text{για } \theta > 0. \quad (2.8)$$

Για να είναι αυτές οι λύσεις εφικτές θα πρέπει $x(\theta) \geq 0$.

Έχουμε ότι $x_{B(i)} > 0 \ \forall i$, και $\theta > 0$. Θεωρούμε τώρα εκείνους τους δείκτες i για τους οποίους $d_{B(i)} \geq 0$. Για αυτούς ισχύει $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0$ επομένως η μη αρνητικότητα διατηρείται για κάθε $\theta > 0$. Από την άλλη πλευρά, για εκείνα τα i για τα οποία $d_{B(i)} < 0$, η απαίτηση

$$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \implies \theta \leq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}.$$

Βλέπουμε επομένως ότι για να είναι η νέα λύση εφικτή (δηλαδή να διατηρείται στην εφικτή περιοχή F) πρέπει

$$\theta \leq \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1, \dots, m, \ d_{B(i)} < 0 \right\} \qquad (2.9)$$

Έστω τώρα κάποιο i' για το οποίο επιτυγχάνεται το ελάχιστο στη (2.9):

$$\theta_{min} = -\frac{x_{B(i')}}{d_{B(i')}} = \min \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}, \ i = 1, \dots, m, \ d_{B(i)} < 0 \right\}. \qquad (2.10)$$

Τότε αν πάρουμε τη λύση

$$\underline{x}(\theta_{min}) = \underline{x} + \theta_{min}\, \underline{d}(j;B), \quad \text{θα ισχύει } x_{i'} = 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η λύση $\underline{x}(\theta_{min})$ είναι μια νέα ΒΕΛ, για την οποία η μεταβλητή $x_{i'} = 0$ είναι μη βασική και η μεταβλητή $x_j > 0$ είναι βασική, δηλαδή προκύπτει από την προηγούμενη με την εναλλαγή ρόλων μεταξύ μιας βασικής και μιας μη βασικής μεταβλητής.
Μια νέα ΒΕΛ αυτής της μορφής ονομάζεται γειτονική ΒΕΛ της αρχικής ΒΕΛ $\underline{x}$ στη βασική κατεύθυνση $-j$. Γεωμετρικά αντιστοιχεί σε μια νέα κορυφή της F που προκύπτει από την προηγούμενη κορυφή με κίνηση κατά μήκος μιας ακμής.

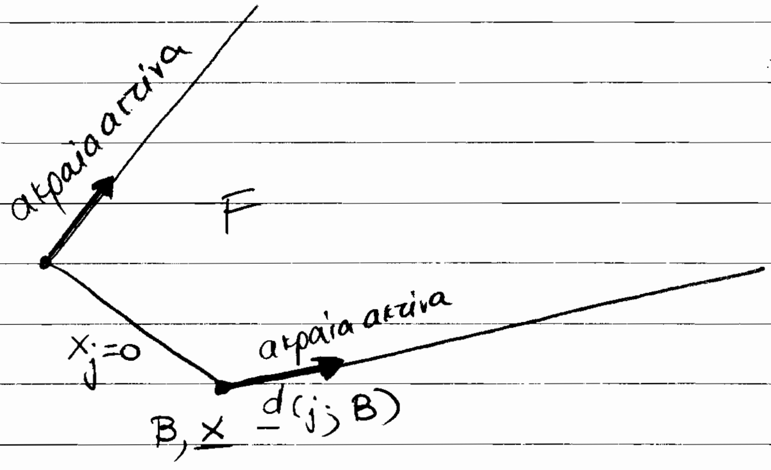
Για παράδειγμα στο σχήμα 2.8, από τη ΒΕΛ $\underline{x}^{(1)}$, η βασική κατεύθυνση $\underline{d}(5;B^{(1)})$ οδηγεί στη γειτονική ΒΕΛ $\underline{x}^{(2)}$ στην οποία η βασική μεταβλητή x_2 γίνεται μη βασική και η μη βασική μεταβλητή x_5 γίνεται βασική.

Παρατήρηση: Λόγω της υπόθεσης ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη εκφυλισμένες, ισχύει ότι στη νέα ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ όλες οι άλλες βασικές μεταβλητές $x_{B(i)} + \theta_{min} d_{B(i)} > 0$,

δηλαδή το θ_{min} στη (2.10) επιτυγχάνεται μόνο από το δείκτη i. Σε διαφορετική περίπτωση, για $\theta = \theta_{min}$ θα μηδενίζονταν περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές της $\underline{x}$ και η νέα ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ θα ήταν εκφυλισμένη.

Περίπτωση 2   Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου για τη βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ισχύει $d_{B(i)} \geq 0 \quad \forall\, i=1,\dots,m$. Τότε αν πάρουμε οποιαδήποτε λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, αυτή θα είναι της μορφής (2.8) και $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0 \quad \forall\, i=1,\dots,m,\ \forall\, \theta$.

Επομένως $\underline{x}(\theta) \geq 0 \quad \forall\, \theta > 0$, δηλαδή όλα τα σημεία πάνω στην ημιευθεία που ξεκινά από την κορυφή $\underline{x}$ και ορίζεται από την κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ανήκουν στην εφικτή περιοχή F. Αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι μη φραγμένο σύνολο και η κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ταυτίζεται με μια από τις ακμές που εκτείνονται στο άπειρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9



Σχήμα 2.9

Μια βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ για την οποία ισχύει $\underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j \geq 0$, ονομάζεται ακραία κατεύθυνση ή ακραία ακτίνα (extreme ray) του κυρτού πολυέδρου F. Από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει ότι ένα κυρτό πολύεδρο F έχει ακραίες ακτίνες μόνο όταν είναι μη φραγμένο και σε αυτή την περίπτωση οι ακραίες ακτίνες αντιστοιχούν στις ακμές που ορίζονται από μια μόνο κορυφή και εκτείνονται στο άπειρο. Για παράδειγμα το κυρτό πολύεδρο του Σχήματος 2.9 έχει δύο ακραίες ακτίνες.

Συνοψίζοντας, έχουμε δει ότι αν από μια ΒΕΛ κινηθούμε κατά μήκος μιας βασικής κατεύθυνσης, τότε είτε θα μεταφερθούμε σε μια γειτονική ΒΕΛ, είτε θα κινηθούμε απεριόριστα κατά μήκος μιας ακραίας ακτίνας της εφικτής περιοχής.

Πρόταση 2.2 Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένη, τότε κάθε βασική κατεύθυνση οδηγεί σε μια νέα ΒΕΛ.

Η απόδειξη είναι προφανής.

Η προηγούμενη συζήτηση μας έδωσε τον αλγεβρικό μηχανισμό με τον οποίο μπορούμε να κινηθούμε από μια ΒΕΛ σε μια γειτονική.
Ακόμη όμως δεν έχουμε απαντήσει στο αρχικό ερώτημα αυτής της ενότητας, που είναι πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη από τοπική πληροφορία και μόνο, χωρίς δηλαδή να τη συγκρίνουμε με τις υπόλοιπες ΒΕΛ.

Η έννοια της βασικής κατεύθυνσης θα αποδειχθεί σημαντική και για αυτό το ερώτημα.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια ΒΕΛ $\underline{x}$, με βασικό πίνακα B. Θέλουμε να δούμε πώς επηρεάζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν κινηθούμε κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης $\underline{d}(j;B)$.

Έστω $f(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$ η τιμή της αντικ. συνάρτησης στη ΒΕΛ $\underline{x}$. Τότε για $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$ έχουμε·

$$f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}'\underline{x} + \theta \underline{c}'\underline{d}(j;B) = f(\underline{x}) + \theta \underline{c}'\underline{d}(j;B)$$

Όμως από τη μορφή του διανύσματος

$$\underline{d}(j;B) = \begin{pmatrix} \underline{d}_B \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\underline{c}'\underline{d}(j;B) = \underline{c}_B'\underline{d}_B + c_j = -\underline{c}_B' B^{-1}\underline{A}_j + c_j$$

Έστω $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1}\underline{A}_j$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $f(\underline{x}(\theta)) = f(\underline{x}) + \bar{c}_j\theta$.

Επομένως σε λύσεις πάνω στη βασική διεύθυνση-j από την ΒΕΛ $\underline{x}$ η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται με ρυθμό $\bar{c}_j$ ανά μονάδα απόστασης από τη $\underline{x}$.

Ορισμός 2.6 Η ποσότητα

$$\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j = \underline{c}'\underline{d}(j;B) \qquad (2.11)$$

ονομάζεται ελαττωμένο κόστος (reduced cost) της μεταβλητής x_j στη ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B.

Η σημασία του ελαττωμένου κόστους βρίσκεται στη διαμόρφωση του κριτηρίου βελτιστότητας. Πραγματικά, αν $\bar{c}_j > 0$, τότε η κίνηση πάνω στην βασική κατεύθυνση-j οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και επομένως σε καλύτερες λύσεις. Από αυτό προκύπτει ότι η ΒΕΛ δεν μπορεί να είναι βέλτιστη.
Αυτό που μένει να απαντηθεί είναι το αντίθετο ερώτημα: Αν $\bar{c}_j \leq 0$ για κάθε βασική κατεύθυνση-j τότε είναι η ΒΕΛ $\underline{x}$ βέλτιστη; Είναι σημαντικό να δούμε ότι η απάντηση δεν είναι προφανής. Αν ισχύει αυτή η ιδιότητα τότε η $\underline{x}$ είναι εξίσου καλή ή καλύτερη από όλες τις γειτονικές ΒΕΛ, είναι δηλαδή σημείο τοπικού μεγίστου στο σύνολο των ΒΕΛ. Για να είναι βέλτιστη λύση του π.γ.π θα πρέπει να είναι σημείο ολικού μεγίστου στο σύνολο των ΒΕΛ.
Εδώ θα μπορούσε να πει κανείς ότι αφού η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$ είναι γραμμική, τα τοπικά ακρότατα είναι και ολικά. Αυτό είναι σωστό, αλλά για να γίνει η απόδειξη με αυτό τον τρόπο θα πρέπει να δειχθεί ότι η $\underline{x}$ είναι τοπικό μέγιστο για όλα τα $\underline{y} \in F$ γειτονικά σημεία της $\underline{x}$ και όχι μόνο για τις γειτονικές ΒΕΛ. Αυτή την πορεία απόδειξης ακολουθούμε στην επόμενη πρόταση.
Πρώτα αποδεικνύουμε ένα ενδιάμεσο λήμμα που έχει

από μόνο του ενδιαφέρον.

Λήμμα 2.1 Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, σύνολο βασικών δεικτών $I_B = \{B(1), \dots, B(m)\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

και σύνολο μη βασικών δεικτών $I_N = \{1, \dots, n\} - I_B$.

Έστω επίσης μια εφικτή κατεύθυνση $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)'$ στη ΒΕΛ $\underline{x}$

Τότε ισχύει:

(i) $d_j \geq 0, \quad j \in I_N$

(ii) $\underline{d} = \sum_{j \in I_N} d_j \, \underline{d}(j;B)$ (2.12)

Απόδειξη (i) Αφού το $\underline{d}$ είναι εφικτή κατεύθυνση ισχύει

$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$ για κάποιο $\theta > 0$

Όμως για τη ΒΕΛ $\underline{x}$ ισχύει $x_j = 0 \; \forall j \in I_N$

Επομένως $x_j(\underline{\theta}) = \theta d_j \geq 0$, συνεπώς $d_j \geq 0$

(ii) Από την αναγκαία συνθήκη (2.7) παίρνουμε

$$A\underline{d} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j \underline{A}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j \in I_B} d_j \underline{A}_j + \sum_{j \in I_N} d_j \underline{A}_j = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\underline{d}_B = - \sum_{j \in I_N} d_j \underline{A}_j \Rightarrow \underline{d}_B = - \sum_{j \in I_N} d_j B^{-1} \underline{A}_j$$

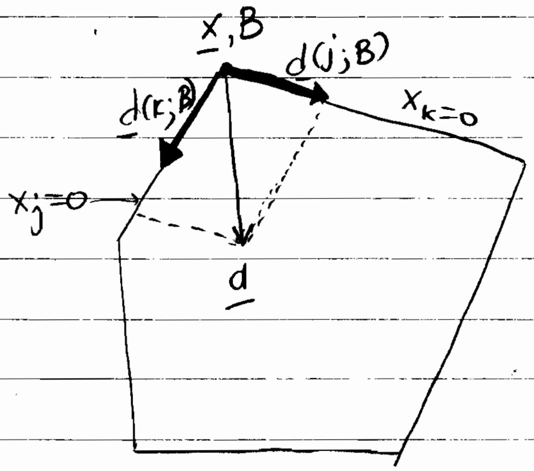
Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα της βασικής κατεύθυνσης-j

$$\underline{d}(j;B) = (-B^{-1}\underline{A}_j, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, \dots, 0)$$

Επομένως το $\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_B \\ \underline{d}_N \end{pmatrix}$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$\underline{d} = \sum_{j \in N} d_j \, \underline{d}(j;B)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη ■

Η γεωμετρική ερμηνεία του Λήμματος 2.1 είναι ότι κάθε εφικτή κατεύθυνση από μια κορυφή του κυρτού πολυέδρου F ανήκει στον κώνο που ορίζεται από τις ακμές που τέμνονται σ' αυτή την κορυφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10.



Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 2.1 μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη βελτιστότητα της ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι η $\bar{c}_j \leq 0 \;\; \forall j$.

Πριν αποδείξουμε το βασικό θεώρημα, κάνουμε την εξής παρατήρηση. Το ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ έχει ορισθεί από την (2.11) για τις μη βασικές μεταβλητές. Αν επεκτείνουμε τον ορισμό

$\bar{c}_j = c_j - B^{-1}A_j$ και για $j \in I_B$, τότε είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\bar{c}_j = 0$ για $j \in I_B$ (βλ. Άσκηση 2.3)

Θεώρημα 2.2 Έστω ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη εκφυλισμένες. Τότε μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B είναι βέλτιστη αν κ' μόνο αν $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Απόδειξη Επειδή $\bar{c}_j = 0$ για $j \in I_B$, αρκεί να θεωρήσουμε $j \in I_N$.
Πρώτα υποθέτουμε $\bar{c}_j \leq 0 \quad \forall j \in N$.
Έστω μια εφικτή διεύθυνση $\underline{d}$ στη ΒΕΛ $\underline{x}$. Τότε $\exists\ \theta > 0$ τέτοιο ώστε $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$.
Επειδή το σύνολο F είναι κυρτό και $\underline{x}, \underline{x}(\theta) \in F$, κάθε σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\underline{x}, \underline{x}(\theta)$ επίσης ανήκει στο F, επομένως

$$\underline{x}(\theta') = \underline{x} + \theta' \underline{d} \geq 0 \quad \forall\ \theta' \in [0, \theta]$$

Επίσης $\forall\ \theta' \in [0, \theta]$: $f(\underline{x}(\theta')) = \underline{c}'(\underline{x} + \theta' \underline{d}) = f(\underline{x}) + \theta' \underline{c}' \underline{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\underline{x}(\theta')) - f(\underline{x}) = \theta' \underline{c}' \underline{d} = \theta' . c' \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j, B) =$$

$$= \theta' \sum_{j \in I_N} d_j \bar{c}_j, \quad (d_j \geq 0)$$ λόγω του Λήμματος 2.1 κ' του Ορισμού 2.6. Επομένως,

από την υπόθεση $\bar{c}_j \leq 0$ προκύπτει $f(\underline{x}(\theta')) - f(\underline{x}) \leq 0$

Δείξαμε επομένως ότι αν κινηθούμε από την ΒΕΛ $\underline{x}$ κατά μήκος οποιασδήποτε εφικτής κατεύθυνσης η αντικειμενική συνάρτηση δεν αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι η $\underline{x}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου στο σύνολο F, κ' επομένως αφού η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική, η $\underline{x}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου, δηλαδή η ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in I_N$. Τώρα θεωρούμε τη βασική κατεύθυνση -j $\underline{d}(j;B)$ και παίρνουμε

$$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B), \text{ για } 0 < \theta < \theta_{min},$$ όπου το

θ_{min} δίνεται από τη (2.10) κ' λόγω της υπόθεσης περί μη εκφυλισμένων ΒΕΛ, $\theta_{min} > 0$.

Τότε έχουμε $f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \bar{c}_j > 0$, δηλαδή

υπάρχει τουλάχιστον μια λύση $\underline{x}(\theta) \in F$ τέτοια ώστε $f(\underline{x}(\theta)) > f(\underline{x})$, επομένως η $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη. Τώρα η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης ∎

Το Θεώρημα 2.2 εξασφαλίζει την ύπαρξη κριτηρίου βελτιστότητας για κάθε ΒΕΛ $\underline{x}$. Όσον αφορά τη μέθοδο βελτίωσης για την περίπτωση που η $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη, έχουμε δει ότι αν κινηθούμε σε μια κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ για την οποία ισχύει $\bar{c}_j > 0$ θα οδηγηθούμε σε καλύτερη λύση. Όπως έχουμε δει προηγουμένως, αν για την κατεύθυνση αυτή ισχύει $d_{B(i)} < 0$ για κάποιο $i = 1, \cdots, m$, τότε θέτοντας $\theta = \theta_{min}$ από τη σχέση (2.10), η νέα λύση

$\underline{x}(\theta_{min}) = \underline{x} + \theta_{min} \underline{d}(j;B)$ είναι μη εκφυλισμένη ΒΕΛ, και επειδή $\bar{c}_j > 0$ έχει τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυστηρά μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Σ' αυτή την περίπτωση το επαναληπτικό βήμα του αλγορίθμου βελτίωσης έχει ολοκληρωθεί, και μια νέα επανάληψη μπορεί να ξεκινήσει με τη ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ στη θέση της προηγούμενης $\underline{x}$

Μένει να δούμε τι γίνεται αν για την βασική κατεύθυνση-j, $\underline{d}(j;B)$, για την οποία $\bar{c}_j > 0$, ισχύει επίσης $d_{B(i)} \geq 0 \ \forall i=1,\dots$

Όπως έχουμε επίσης συζητήσει προηγουμένως, στην περίπτωση αυτή κάθε λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, $\theta > 0$ είναι εφικτή.

Επίσης $f(\underline{x}(\theta)) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j$, και επειδή $\bar{c}_j > 0$ παίρνουμε

$$\sup_{\theta > 0} f(\underline{x}(\theta)) = +\infty$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αν για μια ΒΕΛ $\underline{x}$ και μια βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ισχύει $\bar{c}_j \geq 0$ και $d_{B(i)} \geq 0$, $i=1,\dots,m$, τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.

Παρατηρούμε τώρα ότι για την εφικτή κατεύθυνση j ισχύει $d_j \geq 0 \ \forall j \in$ επομένως αν $d_{B(i)} \geq 0 \ \forall i$ τότε $\underline{d}(j;B) \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας εντελώς ανάλογους συλλογισμούς, μπορούμε να αποδείξουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα σχετικά με το χαρακτηρισμό ενός π.γ.π. ως μη φραγμένου

<u>Θεώρημα 2.3</u> Το π.γ.π (2.1) είναι μη φραγμένο (δηλ. $z=+\infty$) αν και μόνο αν υπάρχει ΒΕΛ $\underline{x}$ και εφικτή κατεύθυνση $\underline{d}$ τέτοια ώστε $\underline{d} \geq 0$ και $\underline{c}'\underline{d} > 0$.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Με βάση την παραπάνω συζήτηση μπορούμε τώρα να γράψουμε συνοπτικά μια εκδοχή του αλγορίθμου Simplex, για την περίπτωση που όλες οι βασικές εφικτές λύσεις είναι μη εκφυλισμένες:

Αλγόριθμος Simplex

1. Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, σύνολο βασικών δεικτών $I_B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ και μη βασικών $I_N = \{1, \ldots, n\} - I_B$.
Ισχύει ότι $\underline{x}_B = (x_j, j \in I_B)' = B^{-1}\underline{b}$, και $\underline{x}_N = (x_j, j \in I_N) =$
Επίσης έστω $\underline{c}_B = (c_j, j \in I_B)' = (c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)})'$.

2. Υπολογίζουμε τα ελαττωμένα κόστη $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j$, για $j \in I_N$. Αν $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j \in I_N$ τότε η ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος σταματά.
Διαφορετικά επιλέγουμε κάποιο $j \in I_N$ τέτοιο ώστε $\bar{c}_j > 0$

3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης $\underline{d}(j; B)$,
$$\underline{d}(j;B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -B^{-1}\underline{A}_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$
. Αν $\underline{d}(j;B) \geq 0$ τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο και $z = +\infty$.

4. Διαφορετικά θέτουμε: $\theta_{min} = \min \left\{ -\dfrac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1, \ldots, m, \ d_{B(i)} < 0 \right\}$

και παίρνουμε τη νέα ΒΕΛ $\underline{x}^{new} = \underline{x} + \theta_{min} \underline{d}(j; B)$

Θέτουμε $\underline{x} \leftarrow \underline{x}^{new}$ και επιστρέφουμε στο βήμα 1

Παρατηρήσεις (1) Αν στο βήμα 2 υπάρχουν περισσότερα από ένα $j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$, τότε ο αλγόριθμος μπορεί να προχωρήσει επιλέγοντας αυθαίρετα οποιοδήποτε από αυτά τα j. Σε προγραμματιστικές υλοποιήσεις του αλγορίθμου συνήθως επιλέγεται εκείνο το j που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή του $\bar{c}_j$.

(2) Όπως έχει συζητηθεί στη σελ. 2.32, κάτω από την υπόθεση μη εκφυλισμένων ΒΕΛ, το ελάχιστο στο θ_{min} του βήματος 4 επιτυγχάνεται από ένα μοναδικό $B(i)$, και επομένως η νέα ΒΕΛ $\underline{x}^{new}$ είναι επίσης μη εκφυλισμένη.

(3) Αν δεν κάνουμε την παραπάνω υπόθεση, τότε ο αλγόριθμος Simplex μπορεί να περιπλακεί. Για παράδειγμα, αν $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη και ισχύει $\bar{c}_j > 0$ για μια βασική κατεύθυνση j, τότε υπάρχει περίπτωση $\theta_{min} = 0$, αν για κάποιο i με $d_{B(i)} < 0$ ισχύει επίσης $x_{B(i)} = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η νέα λύση μετά το βήμα βελτίωσης $\underline{x}^{new} = \underline{x}$, δηλαδή ταυτίζεται με την προηγούμενη, αλλά με διαφορετικό βασικό πίνακα B (όπως έχουμε δει σε μια εκφυλισμένη ΒΕΛ μπορεί να αντιστοιχούν περισσότεροι από ένας βασικοί πίνακες).
Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει εγγύηση ότι σε κάθε βήμα της μεθόδου η αντικειμενική συνάρτηση έχει αυστηρά θετική βελτίωση, και επομένως ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.
Έχουν αναπτυχθεί εκδοχές της μεθόδου Simplex που εξασφαλίζουν τερματισμό ακόμα και στην περίπτωση εκφυλισμένων ΒΕΛ.
Η ανάλυση αυτών των μεθόδων θα γίνει σε μεταγενέστερη έκδοση αυτών των σημειώσεων.

2.5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, το ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ μιας μη βασικής μεταβλητής x_j σε μια ΒΕΛ $\underline{x}$ παίζει σημαντικό ρόλο ως κριτήριο βελτιστότητας της x.
Όμως σε αρκετές εφαρμογές έχει ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία. Για να το δούμε αυτό υπενθυμίζουμε ότι αν από τη ΒΕΛ $\underline{x}$ κινηθούμε κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης j, η επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \bar{c}_j$$

Επίσης στη νέα λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, επειδή $d_j = 1$, $x_j = 0$ ισχύει $x_j(\theta) = x_j + \theta d_j = \theta$.

Επομένως η ποσότητα $\bar{c}_j$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης ανά μονάδα αύξησης της μη βασικής μεταβλητής x_j, κατά την κίνηση κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης $-j$.

Ειδικά στην περίπτωση που η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη, οπότε $\bar{c}_j \leq 0$ $\forall j \in I_N$, το $\bar{c}_j$ δίνει το ρυθμό μείωσης του βέλτιστου κέρδους αν επιμείνουμε η μη βασική μεταβλητή x_j να πάρει θετική τιμή.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το πρόβλημα (2.1) προέρχεται από ένα πρόβλημα οργάνωσης παραγωγής μιας περιόδου, όπως στην

Ενότητα 1.2. Έστω ότι η μεταβλητή x_j συμβολίζει την ποσότητα παραγωγής για κάποιο προϊόν j, και η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x})$ είναι το συνολικό καθαρό κέρδος. Αν στη βέλτιστη λύση $\underline{x}^*$ η μεταβλητή x_j είναι μη βασική, δηλαδή $x_j = 0$, τότε $\bar{c}_j \leq 0$, και το προϊόν j δεν παράγεται.

Σε αυτή την περίπτωση το $\bar{c}_j$ ερμηνεύεται ως η μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα παραγωγής του προϊόντος j, στην περίπτωση που απαιτούσαμε να παραχθεί μια θετική ποσότητα από αυτό το προϊόν, χωρίς να αλλάξει τίποτα από τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μεταβλητή x_j είναι περιθώρια μεταβλητή που προέρχεται από ένα περιορισμό της μορφής

$$\underline{a}_j'\underline{y} \leq b_j \Rightarrow \underline{a}_j'\underline{y} + x_j = b_j .$$

Έστω ότι ο περιορισμός αντιστοιχεί σε μια πρώτη ύλη από την οποία υπάρχουν b_j διαθέσιμες μονάδες για την παραγωγή, ενώ $\underline{y}$ είναι το διάνυσμα των ποσοτήτων παραγωγής.

Αν στη βέλτιστη λύση η x_j είναι μη βασική, με $\bar{c}_j \leq 0$, τότε το $\bar{c}_j$ δηλώνει τη μείωση του κέρδους ανά μονάδα αύξησης της x_j, όπως και προηγουμένως. Εδώ όμως $x_j = 0$ σημαίνει ότι η αντίστοιχη πρώτη ύλη εξαντλείται εντελώς. Αύξηση της x_j σε θετικό επίπεδο σημαίνει ότι απαιτούμε να μείνει αδιάθετη μια θετική ποσότητα της πρώτης ύλης. Επομένως το $\bar{c}_j$ ερμηνεύεται ως η μείωση στο κέρδος που συνεπάγεται η απαίτηση να παραμείνει κάποια ποσότητα της πρώτης ύλης, ανά μονάδα αδιάθετης ποσότητας.

2.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 2.1 Εστω πίνακας $A_{m\times n}$ με $r(A)=m<n$, και $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_k$, με $k<m$, γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A.

Δείξτε ότι υπάρχουν $m-k$ επιπλέον στήλες του A, $A_{k+1},\ldots,A_m$, έτσι ώστε οι $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_m$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες

(Υπόδειξη: Δείτε το θεώρημα συμπλήρωσης βάσης, σελ. [ ]).

Ασκηση 2.2 Για το π.γ.π. (2.1) δείξτε ότι, αν $\underline{b}=0$, τότε είτε το διάνυσμα $\underline{x}=0$ είναι βέλτιστη λύση, ή διαφορετικά το πρόβλημα είναι μή φραγμένο $(z=+\infty)$.

Ασκηση 2.3 Για μια ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, δείξτε ότι $\bar{c}_j=0$ για $j\in I_B$.

Ασκηση 2.4 Αποδείξτε το Θεώρημα 2.3.

Ασκηση 2.5 Θεωρήστε το π.γ.π

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1+x_2 \\ \text{υ.π.} & x_1-x_2\le 4 \\ & x_1+x_2\le 8 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{array}$$

a) Μετατρέψτε το πρόβλημα σε κανονική μορφή

b) Εφαρμόστε τη μέθοδο Simplex όπως έχει αναπτυχθεί σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινώντας από τη ΒΕΛ για την οποία $x_1 = x_2 = 0$.

γ) Επιλύστε το πρόβλημα γραφικά και δείξτε πάνω στο γράφημα τις κορυφές από τις οποίες διέρχεται η εφαρμογή της μεθόδου Simplex στο (β).

Άσκηση 2.6 Για το πρόβλημα (2.1) έστω μια εφικτή λύση $\underline{x}$ (όχι απαραίτητα βασική). Αποδείξτε ότι η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη αν και μόνο αν το παρακάτω Π.Γ.Π έχει βέλτιστη τιμή 0:

$$\begin{aligned} \max \ & \underline{c}'\underline{d} \\ \text{υ.π.} \ & A\underline{d} = 0 \\ & d_i \geq 0 \quad \forall i \in Z, \end{aligned}$$

όπου $Z = \{j : x_j = 0\}$.

(Η άσκηση αυτή συνεπάγεται ότι το κριτήριο βελτιστότητας είναι εξίσου δύσκολο πρόβλημα με την επίλυση ενός νέου Π.Γ.Π. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ένα τοπικό μέγιστο είναι και ολικό).

Άσκηση 2.7 Έστω μια βέλτιστη ΒΕΛ $\underline{x}$ για την οποία ισχύει $\bar{c}_j = 0$ για κάποιο $j \in I_N$. Τι συμπεραίνετε από αυτή την ιδιότητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2.8 Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα Π.Γ.Π

$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{υ.π.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(α) Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Πρόβλημα φόρτωσης σακκιδίου (knapsack problem). Υποθέστε ότι $c_j, a_j \geq 0$ $\forall j=1,\dots,n$ και περιγράψτε μια εφαρμογή που θα κατέληγε σε αυτό το μοντέλο.

(β) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση $c_j, a_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$. Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε το πρόβλημα σακκιδίου να έχει εφικτή λύσεις.

(γ) Για την περίπτωση που το πρόβλημα είναι εφικτό δείξτε ότι η εφαρμογή της μεθόδου Simplex καταλήγει σε ένα απλό αλγόριθμο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Άσκηση 2.9 Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια κοίλη συνάρτηση και $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σύνολο. Έστω $x^* \in F$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου της f στο F, δηλαδή $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in F$ με $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$. Δείξτε ότι το x^* είναι σημείο ολικού μεγίστου της f στο F, δηλαδή ότι $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in F$.

Άσκηση 2.10 Για τα μοντέλα Γ.Π. που αντιστοιχούν στις εφαρμογές του Κεφαλαίου 1, δώστε οικονομική ερμηνεία στο ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ των διαφόρων μεταβλητών x_j αν υποτεθεί ότι σε μια βέλτιστη λύση αυτές οι μεταβλητές είναι μη βασικές. (Δώστε την ερμηνεία σε όσες περιπτώσεις αυτή έχει κάποιο νόημα - σε κάποιες μπορεί και να μην έχει).

Άσκηση 2.11 Θεωρήστε το πολύεδρο:

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, \ A\underline{x} = b \}, \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(α) Κάντε τη γραφική αναπαράσταση του προβλήματος σύμφωνα με τις δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις αυτού του κεφαλαίου.

(β) Βρείτε όλους τους βασικούς πίνακες. Για καθένα, βρείτε και χαρακτηρίστε την αντίστοιχη βασική λύση (αν δηλαδή είναι ή όχι εφικτή και εκφυλισμένη)

(γ) Στη γραφική παράσταση του πολυέδρου δείξτε όλες τις βασικές λύσεις, ανεξάρτητα από το αν είναι εφικτές ή όχι, και προσδιορίστε τις ευθείες που τέμνονται σε κάθε μια Β.Λ.

(δ) Αν το F είναι μη φραγμένο προσδιορίστε τις ακραίες ακτίνες.