Ντετερμινιστικά Μοντέλα Επιχειρησιακής Έρευνας
Επαναληπτικές Ασκήσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}.$$

Να γραφούν οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker για αυτό το πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}, g_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, m, x \geq 0\}.$$

Να γραφούν οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker για αυτό το πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Δίνεται το υπερεπίπεδο P στο χώρο $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως εξής:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : ax = b\},$$

για δοσμένα $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης το σημείο $y \in \mathbb{R}^n$. Να διαμορφωθεί και να λυθεί ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό της απόστασης του σημείου y από το υπερεπίπεδο P.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Έστω το κυρτό πολύεδρο (όχι απαραίτητα φραγμένο) P:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\},$$

για δοσμένα $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Ως μέγιστη σφαίρα με κέντρο y ορίζουμε τη σφαίρα με τη μέγιστη δυνατή ακτίνα που βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο πολύεδρο P. Ζητείται να προσδιοριστεί ένα σημείο του P τέτοιο ώστε η ακτίνα της μέγιστης σφαίρας με κέντρο αυτό το σημείο να είναι η μέγιστη δυνατή ως προς όλα τα σημεία του P.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα οργάνωσης παραγωγής μιας περιόδου. Πρέπει να καθοριστούν οι ποσότητες παραγωγής για καθένα από n προϊόντα. Το προϊόν j έχει κόστος παραγωγής c_j και απαιτεί ποσότητα a_j πρώτης ύλης, $j = 1, \ldots, n$. Η συνολική ποσότητα πρώτης ύλης που είναι διαθέσιμη είναι ίση με b. Επίσης υπάρχουν δύο επιπλέον περιορισμοί. Η συνολική ποσότητα παραγωγής όλων των προϊόντων πρέπει να είναι τουλάχιστον d ώστε να καλυφθεί το επιθυμητό μερίδιο αγοράς. Επίσης, για λόγους ομαλοποίησης της παραγωγής η εταιρεία ακολουθεί την πολιτική ότι η ποσότητα κάθε προϊόντος δεν μπορεί να υπερβαίνει το διπλάσιο της μέσης ποσότητας παραγωγής όλων των προϊόντων. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η πολιτική παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό

Να μοντελοποιήσετε το παραπάνω ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Ένας επενδυτής πρέπει να αποφασίσει την πολιτική επενδύσεων που θα ακολουθήσει για τα επόμενα 2 χρόνια. Στην αρχή του πρώτου χρόνου έχει n_1 επενδυτικά προγράμματα $i = 1, \ldots, n_1$. Κάθε ένα από αυτά έχει αναμενόμενη απόδοση για τον πρώτο χρόνο ίση με r_i (θεωρείται γνωστή και σταθερή). Ο επενδυτής έχει τον περιορισμό ότι μπορεί να επιλέξει το πολύ k_1 από τα n_1 προγράμματα. Στην αρχή του δεύτερου χρόνου υπάρχουν n_2 δυνατές αποφάσεις σχετικά με τις επενδύσεις σε προγράμματα. Οι δυνατές επιλογές του δεύτερου χρόνου εξαρτώνται από τις αποφάσεις που πάρθηκαν τον πρώτο χρόνο. Συγκεκριμένα αν κατά τον πρώτο χρόνο επιλέχθηκε το πρόγραμμα i, τότε στην αρχή του δεύτερου χρόνου είναι διαθέσιμα τα προγράμματα από ένα υποσύνολο $F_i \subseteq \{1, \ldots, n_2\}$ του συνόλου των δυνατών προγραμμάτων. Κάθε πρόγραμμα j του δεύτερου χρόνου έχει αναμενόμενη απόδοση w_j. Επίσης το δεύτερο χρόνο μπορεί να επιλεγούν το πολύ k_2 προγράμματα συνολικά. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί η πολιτική επενδύσεων που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος των δύο χρόνων.

Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής ενός προϊόντος σε ορίζοντα T περιόδων. Αν αποφασίσουμε να παράγουμε κατά την περίοδο $t, t = 1, \ldots, T$, υπάρχει ένα σταθερό κόστος K_t, ανεξάρτητα από την ποσότητα παραγωγής, όπως επίσης και μεταβλητό κόστος ίσο με c_t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος. Το κόστος αποθήκευσης κατά την περίοδο t είναι ίσο με h_t, ενώ η ζήτηση είναι ίση με d_t. **(α)** Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα παραγωγής για ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους και πλήρη ικανοποίηση της ζήτησης ως πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού.

(β) Έστω ότι παραγωγή μπορεί να γίνει το πολύ σε 2 μη διαδοχικές περιόδους. Πώς αλλάζει το μοντέλο στο (α) με τη νέα απαίτηση·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. (30) Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή

$$\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\},$$

με

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = (3 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 1).$$

Έστω επίσης το σύνολο δεικτών $I = \{1, 2\}$.

(α) Δείξτε ότι ο πίνακας $B = A_I$ είναι βασικός και η αντίστοιχη λύση βασική εφικτή.

(β) Είναι η ΒΕΛ του ερωτήματος (α) βέλτιστη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Θεωρήστε το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους σε ένα δίκτυο με σύνολο κόμβων $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, σύνολο ακμών $E \subset N \times N$, συνάρτηση μοναδιαίου κόστους $c : E \to \mathbb{R}$ και διανύσματα διαθέσιμων ποσοτήτων $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ και απαιτήσεων $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, όπου υποθέτουμε $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

(α) Να διατυπωθεί το π.γ.π. για την εύρεση της ροής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

(β) Να γραφεί το δυικό πρόβλημα και να γίνει ερμηνεία των δυικών μεταβλητών. υ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10. Μια εταιρεία παράγει K προϊόντα σε ένα κοινό εργοστάσιο και τα διανέμει μέσω M κέντρων διανομής σε N μεγάλους πελάτες. Ο πελάτης n έχει ζήτηση d_{nk} για το προϊόν k, $n = 1, \ldots, N, k = 1, \ldots, K$. Η εταιρεία πρέπει να καθορίσει ποια προϊόντα πρέπει να διακινεί μέσω ποιων κέντρων διανομής (κάθε προϊόν από ένα μόνο κέντρο). Τα κόστη είναι: (α) σταθερό κόστος f_{km} αν το προϊόν k διακινείται μέσω του κέντρου m, (β) σταθερό κόστος f_{nkm} αν η ζήτηση του πελάτη n για το προϊόν k ικανοποιείται μέσω του κέντρου m, (γ) κόστος μεταφοράς c_{nkm} ανά μονάδα προϊόντος k που μεταφέρεται στον πελάτη n μέσω του κέντρου m.

(α) Να διατυπωθεί ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

(β) Πώς αλλάζει η μοντελοποίηση αν επιτρέπεται μέρος της ζήτησης κάθε προϊόντος να ικανοποιείται από διαφορετικά κέντρα διανομής·