Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων
Κεφαλαίου 13 Hillier and Lieberman.

13.3-5 max $f(\underline{x}) = \dfrac{10x_1 + 20x_2 + 10}{3x_1 + 4x_2 + 20}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 50 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 80 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Πρόκειται για πρόβλημα κλασματικού προγραμματισμού:

η $f(\underline{x})$ γράφεται $f(\underline{x}) = \dfrac{10x_1 + 20x_2}{3x_1 + 4x_2 + 20} + \dfrac{10}{3x_1 + 4x_2 + 20} =$

$$= \frac{\underline{c}'\underline{x} + c_0}{\underline{d}'\cdot\underline{x} + d_0},$$

όπου $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c_0 = 10$, $d_0 = 20$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό

$$\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\underline{d}'\underline{x} + d_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{3x_1 + 4x_2 + 20} \\ \dfrac{x_2}{3x_1 + 4x_2 + 20} \end{pmatrix}, \quad t = \frac{1}{\underline{d}'\underline{x} + d_0} = \frac{1}{3x_1 + 4x_2 + 20}$$

Τότε το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα ως ΠΓΠ

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{c}'\underline{y} + c_0 t \\ & A\underline{y} - \underline{b}t \le 0 \\ & \underline{d}'\underline{y} + d_0 t = 1 \\ & \underline{y},\ t \ge 0 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\max\ 10y_1 + 20y_2 + 10t$$

$$y_1 + 3y_2 - 50t \leq 0$$

$$3y_1 + 2y_2 - 80t \leq 0$$

$$3y_1 + 4y_2 + 20t = 1$$

$$y_1,\ y_2,\ t \geq 0.$$

13.4-1 $\max \ f(x) = x^3 + 2x - 2x^2 - \frac{1}{4}x^4$

Η $f(x)$ είναι κοίλη για $x \in \mathbb{R}$. Πραγματικά:

$f'(x) = 3x^2 + 2 - 4x - x^3$

$f''(x) = 6x - 4 - 3x^2 = -3x^2 + 6x - 4$

Η $f''(x)$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 48 = -12 < 0$

επομένως $f''(x) < 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$.

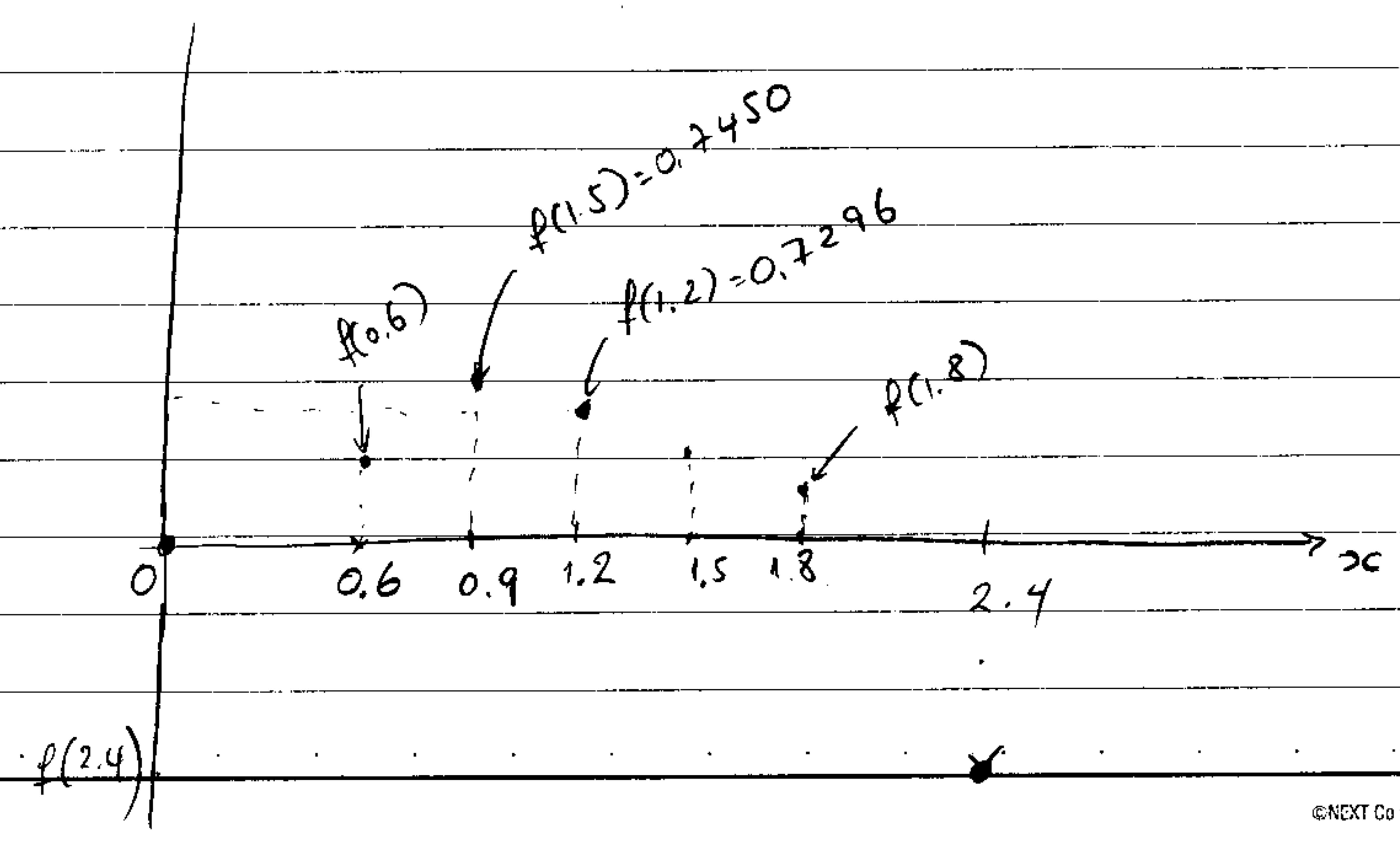
Επομένως η $f(x)$ έχει μοναδικό μέγιστο.

Χρησιμοποιούμε αρχικό διάστημα $(\underline{x}, \overline{x}) = (0, 2.4)$

$f(\underline{x}) = 0$

$f(\overline{x}) = f(2.4) = -1.19$

$x_m = \frac{\overline{x} + \underline{x}}{2} = 1.2$, $f(x_m) = 0.7296$



Έστω $x_1 = \frac{\underline{x} + x_m}{2} = 0.6 \Rightarrow f(x_1) = 0.6636$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_m)$

$x_2 = \frac{x_m + \overline{x}}{2} = 1.8$, $f(x_2) = 0.327$ $f(x_2) < f(x_m)$

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο διάστημα $(0.6, 1.8)$

κ' επαναλαμβάνουμε με $\underline{x} = 0.6$, $x_m = 1.2$, $\overline{x} = 1.8$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \frac{\underline{x} + x_m}{2} = 0.9 & f(x_1) = \underline{0.7450} \\ x_2 = \frac{x_m + \overline{x}}{2} = 1.5 & f(x_2) = 0.609 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(\underline{x}) < f(x_1) \\ f(x_m) < f(x_1) \end{array}$$

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο διάστημα $(0.6, 1.2)$

κ' θέτουμε $\underline{x} = 0.6$, $x_m = 0.9$, $\overline{x} = 1.2$

Επαναλαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \frac{\underline{x} + x_m}{2} = 0.75 & f(x_1) = 0.7177 \\ x_2 = \frac{x_m + \overline{x}}{2} = 1.05 & f(x_2) = \underline{0.7487} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(0.9) < f(1.05) \\ f(1.2) < f(1.05) \end{array}$$

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο διάστημα

$(0.9, 1.2)$

επειδή το μήκος του διαστήματος είναι $0.3 < 0.4$

σταματάμε

13.4-5 $\min f(x) = x^4 + x^2 - 4x$

$$0 \le x \le 2.$$

(a) Η f είναι κυρτή για $x \in \mathbb{R}$ (δείξτε το).
Επομένως έχει μοναδικό ελάχιστο στο $[0,2]$.

Έχουμε $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 12$

Η πρώτη παράγωγος $f'(x) = 4x^3 + 2x - 4$
για $x=1$ είναι

$$f'(1) = 2 > 0$$ Επομένως η $f(1)$ είναι αύξουσα για $x=1$
Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$.

(b) Θα εφαρμόσουμε πάλι έναν αλγόριθμο μονοδιάστατης αναζήτησης αλλά τώρα χρησιμοποιώντας και τις τιμές της παραγώγου $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= 0 && f'(0) = -4 < 0 \\ x_m &= 1/2 && f'(1/2) = -5/2 < 0 \\ \overline{x} &= 1 && f'(1) = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^* \in [1/2, 1]$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= 1/2 && f'(1/2) = -5/2 \\ x_m &= 3/4 && f'(3/4) = -13/16 < 0 \\ \overline{x} &= 1 && f'(1) = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^* \in \left[\tfrac{3}{4}, 1\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= 3/4 && f'(3/4) = -13/16 < 0 \\ x_m &= 7/8 && f'(7/8) = 55/128 > 0 \\ \overline{x} &= 1 && f'(1) = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^* \in \left[\tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}\right]$$

(συνεχίζεται μέχρι το μήκος του διαστήματος $< \varepsilon$)

13.4-7 $\max \ f(\underline{x}) = 32x_1 + 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_1^4 - x_2^4$

$$3x_1 + x_2 \le 11$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 16$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Αν αγνοήσουμε καθ' αρχή τους περιορισμούς, η $f(\underline{x})$ γράφεται $f(x_1,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, όπου

$f_1(x_1) = 32x_1 - x_1^4$

$f_2(x_2) = 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_2^4$

Η $f_1(x_1)$ είναι κοίλη επομένως μεγιστοποιείται για $f_1'(x_1) = 32 - 4x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$.

Η $f_2(x_2)$: $f_2'(x_2) = 50 - 20x_2 + 3x_2^2 - 4x_2^3$

$$f_2''(x_2) = -20 + 6x_2 - 12x_2^2$$

Η $f_2''(x_2)$ είναι τριώνυμο με $\Delta = 36 - 4 \cdot 12 \cdot 20 < 0$

Εφαρμόζοντας μια προσεγγιστική μέθοδο όπως στις προηγούμενες ασκήσεις βρίσκουμε $x_2^* \simeq 1.81$

Για $x_1 = 2$, $x_2 = 1.81$ (που είναι το μέγιστο της f χωρίς περιορισμούς)

βλέπουμε $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x}^* \in F$

Επομένως είναι και η βέλτιστη λύση του προβλήματος με περιορισμούς

13.5-6

$$\text{Max } f(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_1^2 - x_1^4 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 4x_1^3 - 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 - 2x_1 - 2x_2$$

$$\Rightarrow \nabla f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 4+2x_1-4x_1^3-2x_2 \\ 2-2x_1-2x_2 \end{pmatrix}$$

Έστω $\underline{x}^{(0)} = (0,0)$, $f(\underline{x}^0) = 4$, $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Εφαρμόζοντας ένα βήμα της μεθόδου gradient search παίρνουμε $\underline{x}^{(1)} = x^{(0)} + t_0 \nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t_0 \\ 2t_0 \end{pmatrix}$

Η βέλτιστη τιμή του t_0 προκύπτει από

$$\max f\left(\underline{x}^{(0)} + t_0 \nabla f(x^{(0)})\right) = \max f(4t_0, 2t_0) =$$

$$= \max \; 16t + 4t + 16t^2 - 256t^4 - 16t^2 - 4t^2 =$$

$$= \max \; 20t - 4t^2 - 256t^4 = 4 \max_{t \geq 0} h(t) \;, \text{ όπου}$$

$$h(t) = 5t - t^2 - 64t^4.$$

Για το πρόβλημα αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μονοδιάστατης βελτιστοποίησης

$h'(t) = 5 - 2t - 256t^3$, $h''(t) = -2 - 3\cdot 256t^2$ που είναι κοίλη.

Θέλουμε t^* τέτοιο ώστε $h'(t^*) = 0$.

Ξεκινώντας με $\underline{t} = 0 \Rightarrow h'(\underline{t}) = 5 > 0$

$\bar{t} = 1 \Rightarrow h'(\bar{t}) = -253 < 0$

$t_m = \frac{\underline{t} + \bar{t}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = -28 < 0$

$\Rightarrow t^* \in [0, 1/2]$

Στη δεύτερη επανάληψη $\underline{t} = 0 \quad h'(\underline{t}) = 5 > 0$

$\bar{t} = \frac{1}{2} \quad h'(\bar{t}) = -28 < 0$

$t_m = 1/4 \quad h'(t_m) = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow t^* \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Αν σταματήσουμε στις δύο επαναλήψεις θα

πάρουμε $t^* \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ και επομένως

$$\underline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4t^* \\ 2t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

13.6-4 $z = \max f(x) = 24x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2$

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 \le 8$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_2 \le 7$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

(a)

Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 24 - 2x_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10 - 2x_2$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 1$$

KKT

$$24 - 2x_1 - u_1 \le 0 \qquad (1)$$

$$10 - 2x_2 - u_2 \le 0 \qquad (2)$$

$$x_1(24 - 2x_1 - u_1) = 0 \qquad (3)$$

$$x_2(10 - 2x_2 - u_2) = 0 \qquad (4)$$

$$x_1 \le 8 \qquad (5)$$

$$x_2 \le 7 \qquad (6)$$

$$u_1(8 - x_1) = 0 \qquad (7)$$

$$u_2(7 - x_2) = 0 \qquad (8)$$

$$\underline{x}, \underline{u} \ge 0.$$

Αν $x_1 < 8 \overset{(7)}{\Rightarrow} u_1 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 24 - 2x_1 - u_1 = 24 - 2x_1 \le 0 \Rightarrow x_1 \ge 12$ άτοπο

Επομένως $\boxed{x_1 = 8}$

Αν $x_2 = 7 \overset{(4)}{\Rightarrow} 10 - 2x_2 - u_2 = 0 \Rightarrow 10 - 14 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -4$ άτοπο

επομένως $x_2 < 7 \overset{(8)}{\Rightarrow} u_2 = 0.$

Για $u_2 = 0$ από την (4) $x_2(10 - 2x_2) = 0 \Rightarrow$ $x_2 = 0$ ή $x_2 = 5$

Για $x_2=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 10-2x_2-u_2=10>0$ άτοπο

Επομένως $\boxed{x_2=5}$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι

η $\underline{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ικανοποιεί τις KKT.

Επειδή η f είναι κοίλη κ' ~~το~~ η εφικτή περιοχή κυρτό σύνολο, πρόκειται για ολικό μέγιστο.

b) Το πρόβλημα γράφεται ως $z=z_1+z_2$ όπου

$$z_1 = \max_{0 \le x_1 \le 8} (24 - x_1^2) \quad , \quad z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 7} (10 - x_2^2).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η βέλτιστη λύση στο z_1 είναι $x_1^* = 8$, κ' στο z_2 η $x_2^* = 5$.

<u>13.6-5</u> $\max f(\underline{x}) = \ln(1+x_1+x_2)$

$g(x) = x_1+2x_2 \le 5$

$\underline{x} \ge 0.$

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{1+x_1+x_2} \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2.$$

<u>KKT</u>

$$\frac{1}{1+x_1+x_2} - u \le 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2u \le 0 \qquad (2)$$

$$x_1\left(\frac{1}{1+x_1+x_2} - u\right) = 0 \qquad (3)$$

$$x_2\left(\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2u\right) = 0 \qquad (4)$$

$$x_1+2x_2 \le 5 \qquad (5)$$

$$u(5-x_1-2x_2) = 0 \qquad (6)$$

$$\underline{x}, u \ge 0.$$

Από (1) κ' (2):

$$\left.\begin{array}{l} u \ge \dfrac{1}{1+x_1+x_2} \\ u \ge \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x_1+x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow u \ge \frac{1}{1+x_1+x_2} > \frac{1}{2}\frac{1}{1+x_1+x_2} \Rightarrow \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x_1+x_2} - 2u < 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} x_2 = 0$$

Επίσης από τη (*) $u > 0 \Rightarrow 5-x_1-2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Η f είναι κοίλη (δείξτε το).

κ' η εφικτή περιοχή κυρτό σύνολο επομένως

η $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ολικό μέγιστο.

(c) Επειδή η $f(x) = \ln(1+x_1+x_2)$ είναι αύξουσα ως προς x_1+x_2, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το απλό ΠΓΠ

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & \underline{x} \ge 0 \end{aligned}$$

του οποίου η βέλτιστη λύση είναι $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

13.6 – 9 $\max f = \dfrac{x_1}{x_2+1}$

$$g(\underline{x}) = x_1 - x_2 \le 2$$
$$\underline{x} \ge 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{(x_2+1)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -1$$

(b)

KKT

$$\frac{1}{x_2+1} - u \le 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{x_1}{(x_2+1)^2} - u \le 0 \qquad (2)$$

$$x_1\left(\frac{1}{x_2+1} - u\right) = 0 \qquad (3)$$

$$x_2\left(-\frac{x_1}{(x_2+1)^2} - u\right) = 0 \qquad (4)$$

$$x_1 - x_2 \le 2 \qquad (5)$$

$$u(x_1 - x_2 - 2) = 0 \qquad (6)$$

$$\underline{x}, u \ge 0$$

Αν $u=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{x_2+1} \le 0$ άτοπο, επομένως $u>0$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + x_2 > 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} u = \dfrac{1}{x_2+1} \Rightarrow$

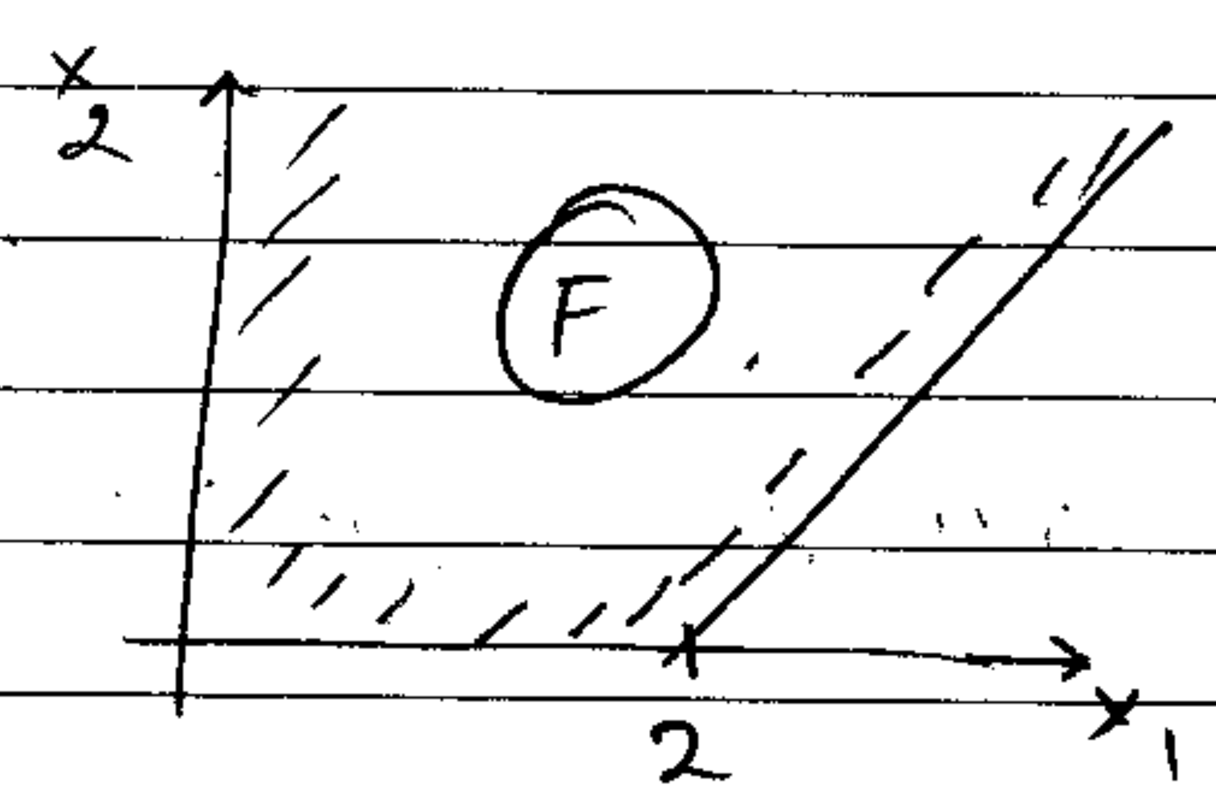
$\overset{(4)}{\Rightarrow} x_2\left(\dfrac{x_1}{(x_2+1)^2} + \dfrac{1}{x_2+1}\right) = 0$

Επειδή $x_2+1>0 \Rightarrow \left(\dfrac{x_1}{(x_2+1)^2} + \dfrac{1}{x_2+1}\right) > 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Επομένως μια λύση των KKT είναι $\underline{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $u=1$.

c) Επειδή η f δεν είναι κοίλη δεν υπάρχει εγγύηση ότι η λύση αυτή αποτελεί βέλτιστη λύση του προβλήματος (θα μπορούσε να είναι τοπικό μέγιστο)

(d) Αν παραστήσουμε το πρόβλημα γραφικά, η εφικτή περιοχή είναι

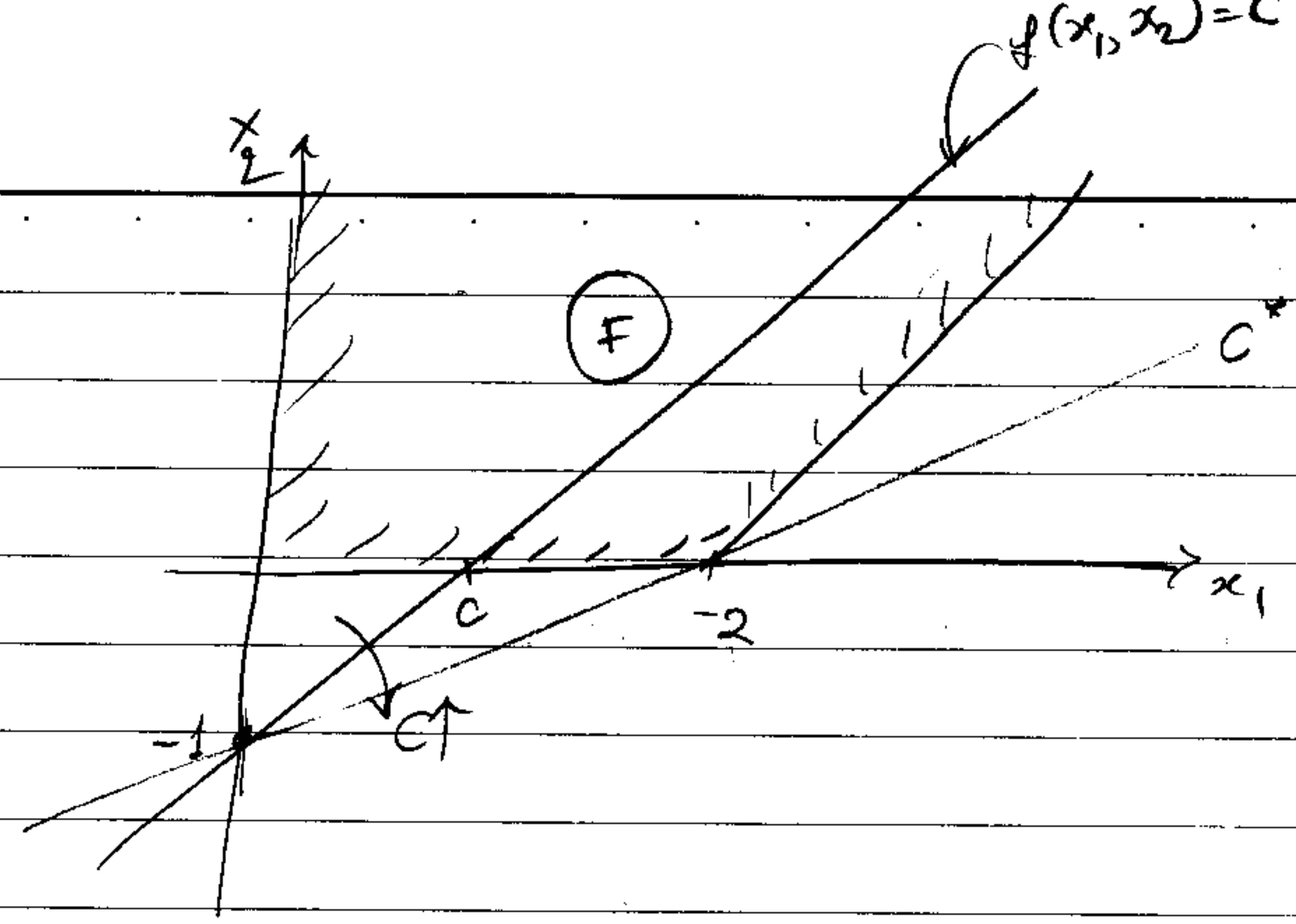


Οι ισοδυναμικές της f είναι:

$\frac{x_1}{x_2+1}=c \Rightarrow x_1 = c(x_2+1)$, δηλαδή ευθείες

με κλίση $\frac{1}{c}$, που διέρχονται από τα

σημεία $(-1,0)$ και $(0,c)$ για $c \geq 0$.



Από το σχήμα φαίνεται ότι όσο η ευθεία $f=c$ στρέφεται δεξιόστροφα (με το σημείο $(-1,0)$ σταθερό) η τιμή της αντικ. συνάρτησης αυξάνει.

Επομένως η βέλτιστη λύση προκύπτει για $x=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

<u>Προσοχή</u> Παρ' όλο που οι ισοδυναμικές της f είναι ευθείες το πρόβλημα στη μορφή αυτή <u>δεν</u> είναι ΠΓΠ γιατί οι ευθείες δεν έχουν σταθερή κλίση.

(e) Πρόκειται για πρόβλημα κλασματικού προγρ.

$$f=\frac{\underline{c}'\underline{x}+c_0}{\underline{d}'\underline{x}+d_0}, \quad \text{όπου} \quad \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ c_0=0,$$

$$\underline{d}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ d_0=1.$$

Με το μετασχηματισμό $\underline{y}=\dfrac{\underline{x}}{\underline{d}'\underline{x}+d_0}, \quad t=\dfrac{1}{\underline{d}'\underline{x}+d_0}$

παίρνοντας $\underline{y} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2+1} \\ \frac{x_2}{x_2+1} \end{pmatrix}$ $\quad t = \frac{1}{x_2+1}$

και το πρόβλημα μετασχηματίζεται:

$$\max \; y_1$$
$$y_1 - y_2 - 2t \leq 0$$
$$y_2 + t = 1$$
$$\underline{y}, t \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας $t = 1 - y_2$ το ΠΓΠ γράφεται:

$$\max \; y_1$$
$$y_1 + y_2 \leq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

που έχει βέλτιστη λύση $y_1 = 2, \; y_2 = 0$

Επομένως $\boxed{x_2 = 0 \; , \; x_1 = 2}$ όπως βρήκαμε και πριν.

13.6 - 13

(b) Όπως έχουμε δει, οι περιορισμοί ισότητας αντιστοιχούν σε δυική μεταβλητή (πολ/στές Lagrange) ελεύθερη προσήμου. Το πρόβλημα γράφεται

$$z = -\max \; -2x_1^2 - x_2^2 \; \left(= f(\underline{x}) \right)$$

$$x_1 + x_2 = 10.$$

Η f είναι κοίλη κ' η εφικτή περιοχή κυρτό σύνολο.

KKT $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 \right.$

$\left. \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \right)$

$-4x_1 - u \leq 0$ (1)

$-2x_2 - u \leq 0$ (2)

$x_1(4x_1+u) = 0$ (3)

$x_2(2x_2+u) = 0$ (4)

$x_1 + x_2 = 10$ (5)

$x_1, x_2 \geq 0$

[Η συνθήκη $u(x_1+x_2-10) = 0$ ισχύει ταυτοτικά].

αν $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10 > 0 \Rightarrow 2x_2 + u = 0 \Rightarrow u = -20 \overset{(1)}{\Rightarrow} -u = 20 > 0$ άτοπο

Επομένως $x_1 > 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} u = -4x_1$

13.10-6 $\quad \max f(x) = -\frac{(x_1+1)^3}{3} - x_2$

$$-x_1 \leq -1$$
$$x_2 \geq 0$$

(a)

Στη μέθοδο SUMT σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$P(x_1, x_2, r) = f(x_1, x_2) - r\left[\frac{1}{b_1 - g_1(\underline{x})} + \frac{1}{x_2}\right]$$

$$= -\frac{(x_1+1)^3}{3} - x_2 - r\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

και μεγιστοποιούμε ως προς $\underline{x}$ για διαδοχικές τιμές του r σύμφωνα με ένα μηχανισμό.

(b) $\quad \frac{\partial P}{\partial x_1} = -(x_1+1)^2 + \frac{r}{(x_1-1)^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = -1 + \frac{r}{x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = -2(x_1+1) - \frac{2r}{(x_1-1)^3} < 0 \quad \text{για } x_1 \geq 1$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = -\frac{2r}{x_2^3} < 0 \quad \text{για } x_2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Επομένως η P είναι κοίλη (γιατί;)
κ' μεγιστοποιείται για $\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$.

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{r}{(x_1-1)^2} - (x_1+1)^2 = 0 \Rightarrow (x_1^2-1)^2 = r \Rightarrow x_1^2 - 1 = \sqrt{r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{1+\sqrt{r}} \quad (x_1 \geq 1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{r}{x_2^2} = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{r} \quad (x_2 \geq 0)$$

Επομένως $x_1^*(r) = \sqrt{1+\sqrt{r}}$
$x_2^*(r) = \sqrt{r}$

Επειδή εδώ έχουμε βρει τη λύση αναλυτικά ως προς r, βλέπουμε ότι για $r \to 0$ $x_1^* \to 1$, $x_2^* \to 0$.

Η λύση $\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι η προφανής βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα (δείξτε το)