**Συναρτησιακή Ανάλυση (2020–21)**
**Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1**

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 28 Μαρτίου 2021)

**1.** Έστω $X$ διανυσματικός χώρος. Μια συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}^+$ λέγεται ημινόρμα αν $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Έστω $\{p_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ οικογένεια ημινορμών $p_\gamma : X \to \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε

$$0 < p(x) := \sup\{p_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} < +\infty$$

για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η $p$ είναι νόρμα στον $X$.

**2.** Έστω $X$ διανυσματικός χώρος.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο $A \subset X$ επεκτείνεται σε βάση Hamel του $X$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε υπόχωρο $Y$ του $X$ υπάρχει υπόχωρος $Z$ του $X$ ώστε $Y \cap Z = \{0\}$ και $\mathrm{span}(Y \cup Z) = X$.

**3.** (α) Είναι ο $c_{00}$ κλειστός υπόχωρος του $\ell_\infty$; Αν όχι, να βρεθεί η κλειστή του θήκη στον $\ell_\infty$.
(β) Αποδείξτε ότι ο $c_0$ με νόρμα την $\|x\| = \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n|}{2^n}$ δεν είναι πλήρης.

**4.** Έστω

$$X = \left\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty : \text{ υπάρχει } C > 0 \text{ τ.ω. } |x_k| \leqslant \frac{C}{k^2} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $X$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\ell_1$ και πυκνός στον $\ell_1$. Εξετάστε αν ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης.

**5.** Έστω $1 \leq p < \infty$. Εξετάστε αν ο χώρος $X_p := (\ell_p, \|\cdot\|_\infty)$ (i) είναι διαχωρίσιμος και (ii) είναι χώρος Banach.

**6.** Για $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ στον $\ell_\infty$ ορίζουμε

$$\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|x_n + x_{n+1}| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$. Εξετάστε αν ο $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος, πλήρης και αν έχει βάση Schauder.

**7.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $Y$ γνήσιος υπόχωρος του $X$. Αποδείξτε ότι ο $Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X$ αν και μόνο αν η μοναδιαία του μπάλα $B_Y = \{y \in Y : \|y\| \leqslant 1\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X$.

**8.** Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα $X$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο $A$ του $X$ ώστε $\overline{\mathrm{span}(A)} = X$.

**9.** Σωστό ή λάθος; Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $Y$ γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $X$. Τότε, για κάθε $x \in X \setminus Y$ υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in Y\}$, δηλαδή $\|x - y_0\| = \mathrm{dist}(x, Y)$.

**10.** Έστω $X$ χώρος με νόρμα και $Y, Z$ υπόχωροι του $X$. Αποδείξτε ότι αν ο $Y$ είναι κλειστός και ο $Z$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε ο $Y + Z = \{y + z : y \in Y, z \in Z\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X$.