Συναρτησιακή Ανάλυση (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 9 Μαΐου 2021)

1. (α) Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν x είναι μη μηδενικό διάνυσμα στον X και $y \in Y$, αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $T(x) = y$.

(β) Δώστε παράδειγμα χώρου Banach X και μη φραγμένου γραμμικού τελεστή $T : X \to X$ με την ιδιότητα ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(T)$ του T είναι κλειστός.

2. Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_j) = c_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή $f_i : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

(γ) Θέτουμε $Y = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$.

3. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε ο $F = T(X)$ να έχει πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $y_1, \ldots, y_n \in Y$ και γραμμικά ανεξάρτητα συναρτησοειδή $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ ώστε

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$

για κάθε $x \in X$.

4. Θεωρούμε τα γραμμικά συναρτησοειδή $f_n : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ με $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε $f_n \in (\ell_\infty)^*$ και $\|f_n\| \leq 1$.

(β) Αποδείξτε ότι ο $Y = \{y \in \ell_\infty : f_n(y) \to 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞.

(γ) Έστω $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Θεωρώντας το $f_n(\mathbf{1})$ αποδείξτε ότι $\|\mathbf{1} - y\|_\infty \geq 1$ για κάθε $y \in Y$.

(δ) Συμπεράνατε ότι υπάρχει $\varphi \in (\ell_\infty)^*$ τέτοιο ώστε $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1$ και $\varphi(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Αποδείξτε ότι: αν $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$ και $x' = (x_2, x_3, \ldots)$, τότε $\varphi(x) = \varphi(x')$.

5. (α) Έστω $f : c_0 \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το f έχει μοναδική επέκταση (όπως περιγράφεται στο θεώρημα Hahn-Banach) $\tilde{f} : \ell_\infty \to \mathbb{R}$.

(β) Έστω $Y = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1 : x_{2k-1} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}\}$. Αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_1. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : Y \to \mathbb{R}$ έχει περισσότερες από μία επεκτάσεις (όπως περιγράφεται στο θεώρημα Hahn-Banach) στον ℓ_1.

6. Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $f, g \in X^*$ με την εξής ιδιότητα: $\|f\| = \|g\| = 1$ και για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap B_X$ ισχύει $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ για κάποιον $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\text{είτε } \|f - g\| \leqslant 2\varepsilon \text{ είτε } \|f + g\| \leqslant 2\varepsilon.$$

7. Αποδείξτε ότι η $f : c_0 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k!}, \qquad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και ότι δεν υπάρχει $x \in c_0$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $\|f\| = |f(x_0)|$.

Συμπεράνατε ότι ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής.

8. (α) Έστω X πραγματικός χώρος Banach. Αποδείξτε ότι αν ο X δεν είναι αυτοπαθής τότε ο X^* δεν είναι αυτοπαθής. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε αρχικά γιατί υπάρχει μη μηδενικό $f : X^{**} \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$.]

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y διανυσματικός υπόχωρος του X^* με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \neq 0$ στον X υπάρχει $f \in Y$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = X^*$.

9. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Αν $x_0 \in X \setminus Y$, αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ που είναι προβολή στον Y (δηλαδή, $P(X) = Y$ και $P^2 = P$) με $P(x_0) = 0$.

(β) Έστω X χώρος Banach και Y_1, Y_2 κλειστοί υπόχωροι του X συνδιάστασης 1. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : Y_1 \to Y_2$.

10. (α) Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάτω φραγμένη τότε

$$\frac{a_n}{n} \longrightarrow s := \inf\left\{\frac{a_k}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(β) Έστω X πραγματικός διανυσματικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω επίσης $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $p(T(x)) = p(x)$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η $q : X \to \mathbb{R}$ με

$$q(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} p(x + T(x) + \cdots + T^{n-1}(x))$$

είναι υπογραμμικός συναρτησοειδές και $q \leqslant p$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές με $f \leqslant p$ τότε το f ικανοποιεί την $f(T(x)) = f(x)$ για κάθε $x \in X$ αν και μόνο αν $f \leqslant q$.