Συναρτησιακή Ανάλυση (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 23 Μαΐου 2021)

1. Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(α) Έστω $n \geqslant 3$ και $\omega = e^{2\pi i/n}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$n\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \|x + \omega^k y\|^2.$$

[*Υπόδειξη:* Θυμηθείτε τις ταυτότητες $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ και $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{2k} = 0$.]

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 e^{2\pi it} \|x + e^{2\pi it} y\|^2 \, dt.$$

2. (α) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y, z \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\|x\| \cdot \|y - z\| \leqslant \|y\| \cdot \|z - x\| + \|z\| \cdot \|x - y\|.$$

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $N = \binom{n+1}{2}$. Αποδείξτε ότι: αν X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x_1, \dots, x_N \in X$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τότε υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \dots, y_n$ τέτοια ώστε $y_i = \sum\limits_{j \in A_i} a_i x_i$, όπου $A_1, \dots, A_n$ είναι ξένα υποσύνολα του $\{1, \dots, N\}$.

3. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in X$ αν και μόνο αν $\|T(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

4. Έστω H χώρος Hilbert, F ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H και $x_0 \in H \setminus F$. Αποδείξτε ότι

$$\min\{\|x - x_0\| : x \in F\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle| : y \in F^{\perp}, \|y\| = 1\}.$$

5. Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρο υποσύνολο S της μοναδιαίας μπάλας του ℓ_2 με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x, y \in S$ με $x \neq y$ ισχύει $\|x - y\|_2 > \sqrt{2}$.

6. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $P : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $P^2 = P$. Αποδείξτε ότι $\|P\| = 1$ αν και μόνο αν $P \neq 0$ και $\mathrm{Im}(P) \perp \mathrm{Ker}(P)$.

7. Έστω H χώρος Hilbert, A μη κενό υποσύνολο του H και $T : H \to H$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T(H) \subseteq A$ και $x - T(x) \perp A$ για κάθε $x \in H$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, ο A είναι κλειστός υπόχωρος του H και ο T είναι η ορθογώνια προβολή $T = P_A$ του H στον A.

8. Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leqslant 1$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n(x) = P(x),$$

όπου $P = P_F$ είναι η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο $F := \{x \in H : T(x) = x\}$.

9. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ πραγματικός χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ για κάθε $x, y \in X$. Ορίζουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big), \qquad x, y \in X.$$

Αποδείξτε ότι η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ για κάθε $x \in X$. αιτιολογώντας τα παρακάτω:

(α) Ισχύουν οι: $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$ με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$, καθώς επίσης και η $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in X$.

(β) Για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύει ότι

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2.$$

(γ) Για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν οι

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2$$

και

$$\|x+y-z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2,$$

απ' όπου έπεται ότι $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(δ) Για κάθε $x, y \in X$ και $q \in \mathbb{Q}$ ισχύει ότι $\langle qx, y \rangle = q\langle x, y \rangle$.

(ε) Για κάθε $x, y \in X$ η συνάρτηση $t \mapsto \langle tx, y \rangle$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι $\langle tx, y \rangle = t\langle x, y \rangle$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

10. Έστω H χώρος Hilbert και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονική βάση του H. Έστω $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

Αποδείξτε ότι η $\{y_n\|_{n=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. [*Υπόδειξη:* Εφαρμόστε την ταυτότητα Parseval για τα $x_n - y_n$ και παρατηρήστε ότι $|\langle x_n - y_n, x_m \rangle| = |\langle x_m - y_m, y_n \rangle|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.]