Συναρτησιακή Ανάλυση (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 5

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 6 Ιουνίου 2021)

1. Έστω X χώρος με νόρμα και K, K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα του X που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Αποδείξτε ότι:

(α) $q_{K_1 \cap K_2} = \max\{q_{K_1}, q_{K_2}\}$ (όπου q_A είναι το συναρτησοειδές Minkowski ενός κυρτού $A \subseteq X$ με $0 \in \mathrm{int}(A)$).

(β) $\overline{K} = \bigcap\{\lambda K : \lambda > 1\}$.

(γ) Το K είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ευθεία ℓ που διέρχεται από το 0, το $K \cap \ell$ είναι κλειστό.

(δ) Αν $q : X \to \mathbb{R}^+$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $\{x \in X : q(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in X : q(x) \leqslant 1\}$, τότε $q = q_K$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω K συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Αν $E \subseteq K$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $K = \overline{\mathrm{conv}(E)}$.

(β) Για κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $\sup\limits_{x \in K} f(x) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

3. Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $1 < p < \infty$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y = (y_n) \in \ell_p$ ισχύει $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |y_n| < \infty$. Αποδείξτε ότι $x = (x_n) \in \ell_q$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

4. Έστω X χώρος Banach, $0 < \varepsilon < 1$ και $N \subseteq S_X$ μεγιστικό ως προς την ιδιότητα «$\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $x \neq y$ στο N». Αποδείξτε ότι

$$(1 - \varepsilon)B_X \subseteq \overline{\mathrm{conv}(N)}.$$

5. Έστω X, Y και Z χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής και ο $S : Y \to Z$ είναι φραγμένος και 1-1 γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $S \circ T : X \to Z$ είναι φραγμένος.

6. (α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.

(ii) Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $T(B_X) \supseteq \delta B_Y$.

(iii) Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$ και $\|x\|_X \leqslant M\|y\|_Y$.

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι αν ο X είναι πλήρης και ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, τότε ο Y είναι πλήρης.

7. (α) Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $T : X \to X^*$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε

$$[T(x)](x) \geqslant 0 \ \text{ για κάθε } x \in X.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

(β) Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $T : X \to X^*$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε

$$[T(x)](y) = [T(y)](x) \ \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

8. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός και επί τελεστής.

(α) Έστω $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το $T(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y αν και μόνο αν το $A + \ker(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Αν $\dim(\ker(T)) < \infty$ αποδείξτε ότι για κάθε κλειστό υπόχωρο F του X ο $T(F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

9. Έστω X και Y δύο χώροι Banach με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$. Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\mathrm{im}(T)$ κλειστό και $\dim(\ker(T)) < \infty$. Έστω $|\cdot|$ μια άλλη νόρμα στον X τέτοια ώστε $|x| \leq \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\|x\|_X \leqslant C(\|T(x)\|_Y + |x|) \ \text{ για κάθε } x \in X.$$

10. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι διαχωρίσιμος και ο T είναι επί. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαχωρίσιμος υπόχωρος Z του X τέτοιος ώστε $T(Z) = Y$.

11* Έστω X κλειστός υπόχωρος του $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ τέτοιος ώστε κάθε $f \in X$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με την f' συνεχή στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι $\dim(X) < \infty$.