602. Ασκήσεις – Μέρος 1

Χώροι με νόρμα

13 Μαρτίου 2021

Άσκηση 1.3

Αποδείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}, \quad \mathrm{int}\left(\widehat{B}(x,r)\right) = B(x,r) \ \text{ και } \ \partial\widehat{B}(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r).$$

Η $\widehat{B}(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο και $B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Άρα, $\overline{B(x,r)} \subseteq \widehat{B}(x,r)$.
Αντίστροφα, έστω $y \in \widehat{B}(x,r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n(y-x)$, όπου (λ_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \to x + (y-x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n(y-x)\| = \lambda_n\|y-x\| < \|y-x\| \leqslant r,$$

δηλαδή $y_n \in B(x,r)$ και $y_n \to y$. Έπεται ότι $y \in \overline{B(x,r)}$.
Η $B(x,r)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στην $\widehat{B}(x,r)$. Άρα,
$B(x,r) \subseteq \mathrm{int}(\widehat{B}(x,r))$. Αντίστροφα, έστω y εσωτερικό σημείο της $\widehat{B}(x,r)$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $B(y,\delta) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Τότε, αν $\|z\| < \delta$, έχουμε $\|y+z-x\| \leqslant r$.
Επιλέγουμε $z = t(y-x)$ για $t > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $\|z\| < \delta$. Τότε,
$\|y+z-x\| = \|(1+t)(y-x)\| = (1+t)\|y-x\| \leqslant r$, δηλαδή $\|y-x\| \leqslant \frac{r}{1+t} < r$, άρα $y \in B(x,r)$.
Από τα παραπάνω έπεται ότι
$\partial\widehat{B}(x,r) = \widehat{B}(x,r) \setminus \mathrm{int}(\widehat{B}(x,r)) = \widehat{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$ και
$\partial B(x,r) = \overline{B(x,r)} \setminus B(x,r) = \widehat{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$.

Άσκηση 1.4

Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Αποδείξτε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

Έστω ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leqslant 1$. Άρα, $\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X\setminus\{0\}$. Τότε,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\|' = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant 1.$$

Η $\|0\| \leqslant \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

Άσκηση 1.6

Έστω X χώρος Banach και (Y_n) ακολουθία γραμμικών υποχώρων του X με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο Y_n να είναι πυκνός στον X.

Αφού $Y_n \subseteq \overline{Y_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n} \subseteq X,$$

δηλαδή

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}.$$

Από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(\overline{Y_{n_0}}) \neq \varnothing$. Όμως, ο $\overline{Y_{n_0}}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και αφού έχει μη κενό εσωτερικό συμπεραίνουμε ότι $\overline{Y_{n_0}} = X$. Άρα, ο Y_{n_0} είναι πυκνός στον X.

Άσκηση 1.7

Έστω X χώρος με νόρμα και $x, y \in X$ τέτοια ώστε $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a, b \geqslant 0$ ισχύει $\|ax+by\| = a\|x\| + b\|y\|$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \geqslant b$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|ax+by\| &= \|a(x+y)-(a-b)y\| \geqslant \|a(x+y)\| - \|(a-b)y\| \\ &= a\|x+y\| - (a-b)\|y\| = a(\|x\|+\|y\|) - (a-b)\|y\| = a\|x\| + b\|y\|.\end{aligned}$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει άμεσα από την τριγωνική ανισότητα:

$$\|ax+by\| \leqslant \|ax\| + \|by\| = a\|x\| + b\|y\|.$$

Άσκηση 1.8

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ μοναδιαία διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει $\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$ για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Αποδείξτε ότι $\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\| \geqslant (1-\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$ για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $j \leqslant n$ τέτοιο ώστε $|\lambda_j| = \max_{i\leqslant n}|\lambda_i|$.
Ορίζουμε $\mu_i \in \mathbb{K}$ θέτοντας $\mu_j = \lambda_j$ και $\mu_i = -\lambda_i$ αν $i \neq j$. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} 2|\lambda_j| &= \|2\lambda_j x_j\| = \Big\| \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Big\| \leqslant \Big\| \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + \Big\| \textstyle\sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Big\| \\ &\leqslant \Big\| \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + (1+\varepsilon)\max_{i\leqslant n}|\mu_i| = \Big\| \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + (1+\varepsilon)|\lambda_j|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| \geqslant 2|\lambda_j| - (1+\varepsilon)|\lambda_j| = (1-\varepsilon)\max_{i\leqslant n}|\lambda_i|.$$

Άσκηση 1.9

Έστω $\widehat{B}(x_n, r_n)$ μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach X. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}(x_n, r_n) \neq \varnothing$.

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant r_n - r_{n+1} \tag{1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_{n+1} = x_n$ αυτό είναι απλό ενώ αν $x_{n+1} \neq x_n$ παρατηρούμε ότι

$$y = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} r_{n+1} \in \widehat{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \widehat{B}(x_n, r_n),$$

οπότε

$$\|y - x_n\| \leqslant r_n \Longrightarrow \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leqslant r_n.$$

Από την (1) βλέπουμε ότι η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Πάλι από την (1) βλέπουμε ότι, αν $n < m$ τότε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (r_{m-1} - r_m) + \cdots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x$. Τέλος δείχνουμε ότι $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{B}(x_n, r_n)$.

Άσκηση 1.18

(α) Έστω X χώρος με νόρμα και D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D' = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0 \right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της S_X.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και D' πυκνό υποσύνολο της S_X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D = \{qx : x \in D', q \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(α) Έστω $x \in S_X$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) από το D τέτοια ώστε $y_n \to x$. Ειδικότερα, $\|y_n\| \to \|x\| = 1$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, $n \geqslant n_0$. Έχουμε $x_n \in D'$ και

$$x_n = \frac{1}{\|y_n\|} \cdot y_n \to 1 \cdot x$$

από τη συνέχεια της $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$. Έπεται ότι το D' είναι πυκνό υποσύνολο της S_X.

(β) Έστω $x \in X$. Αν $x = 0$ τότε $x \in D$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$. Θεωρούμε το $y = \frac{x}{\|x\|} \in S_X$ και βρίσκουμε ακολουθία (y_n) στο D' ώστε $y_n \to y$. Επίσης, βρίσκουμε ακολουθία (q_n) ρητών με $q_n \to \|x\|$. Τότε, $q_n y_n \in D$ και

$$q_n y_n \to \|x\| \cdot y = x.$$

Έπεται ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Άσκηση 1.18

(γ) Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν η μοναδιαία σφαίρα S_X του X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.

(γ) Υποθέτουμε αρχικά ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και το σύνολο D' του ερωτήματος (α). Η απεικόνιση $\phi : D \setminus \{0\} \to D'$ με $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ είναι επί και το σύνολο $D \setminus \{0\}$ είναι αριθμησιμο, άρα το D' είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι η S_X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D' της S_X. Θεωρούμε το σύνολο D του ερωτήματος (β). Η απεικόνιση $\psi : \mathbb{Q} \times D' \to D$ είναι επί και τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και D' είναι αριθμήσιμα, άρα το $\mathbb{Q} \times D'$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Άρα το D είναι αριθμήσιμο, και έπεται ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

Άσκηση 1.20

Έστω X χώρος με νόρμα και $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται θ-*δίκτυο* για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \geqslant 0$, ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

Έστω $x \in B_X$. Υπάρχει $a_0 \in A$ ώστε $\|x - a_0\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x-a_0}{\theta} \in B_X$. Τότε, υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $\|\frac{x-a_0}{\theta} - a_1\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x}{\theta^2} - \frac{a_0}{\theta^2} - \frac{a_1}{\theta} \in B_X$. Επαγωγικά, επιλέγουμε $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ με την ιδιότητα

$$\frac{x}{\theta^{n+1}} - \frac{a_0}{\theta^{n+1}} - \cdots - \frac{a_n}{\theta} \in B_X \Longrightarrow \|x - (a_0 + \theta a_1 + \cdots + \theta^n a_n)\| < \theta^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\theta^{n+1} \to 0$, αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n$ συγκλίνει στο x.

Άσκηση 1.21

Έστω X χώρος με νόρμα και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\|x_n\| \leqslant \frac{3\|x\|}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $x_1 \in D$ ώστε $\|x - x_1\| < \frac{\|x\|}{2}$. Τότε,

$$\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x\| + \|x\| < \frac{\|x\|}{2} + \|x\| = \frac{3\|x\|}{2}.$$

Επαγωγικά, αν $N \geqslant 2$ και έχουμε ορίσει τα $x_1, \ldots, x_{N-1} \in D$, αφού το D είναι πυκνό μπορούμε να επιλέξουμε $x_N \in D$ ώστε $\left\| \left(x - \sum_{n=1}^{N-1} x_n \right) - x_N \right\| < \frac{\|x\|}{2^N}$.

Αν $s_N = x_1 + \cdots + x_N$, από την κατασκευή έχουμε $\|x - s_N\| < \frac{\|x\|}{2^N} \to 0$, άρα $s_N \to x$. Συνεπώς,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Τέλος, για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|s_n - s_{n-1}\| = \|(s_n - x) - (s_{n-1} - x)\| \leqslant \|s_n - x\| + \|s_{n-1} - x\| \\ &< \frac{\|x\|}{2^n} + \frac{\|x\|}{2^{n-1}} = \frac{3\|x\|}{2^n}.\end{aligned}$$

Άσκηση 2.2

Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο X. Αποδείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η f^{-1} είναι συνεχής.

Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$ με $f(\vec{0}) = \vec{0}$ και $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x, \qquad x \neq \vec{0}$.

(α) Η f είναι καλά ορισμένη: αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$, $x \neq \vec{0}$, τότε $\|x\| \leqslant 1$ άρα

$$\|f(x)\|' = \frac{\|x\|}{\|x\|'}\|x\|' = \|x\| \leqslant 1,$$

δηλαδή $f(x) \in B_{(X,\|\cdot\|')}$. Αν $x = \vec{0}$, τότε $f(x) = \vec{0} \in B_{(X,\|\cdot\|')}$.

(β) Δείχνουμε πρώτα τη συνέχεια της f: αν $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|$ και $x_0 \neq \vec{0}$, τότε από την ισοδυναμία των νορμών παίρνουμε $\|x_n\| \to \|x_0\|$, $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|'$ και $\|x_n\|' \to \|x_0\|' > 0$, οπότε από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού ως προς την $\|\cdot\|'$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n) = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}x_n \to \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|'}x_0 = f(x_0)$$

ως προς την $\|\cdot\|'$.

Αν $\|x_n\| \to 0$ τότε $\|x_n\|' \to 0$ από την ισοδυναμία των νορμών, και $\|x_n\|/\|x_n\|' \leqslant 1/a$ αν $x_n \neq \vec{0}$ ή $f(x_n) = \vec{0}$ αν $x_n = \vec{0}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\|f(x_n)\|' \leqslant \frac{1}{a}\|x_n\|' \leqslant \frac{b}{a}\|x_n\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to \vec{0} = f(\vec{0})$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής.

(γ) Η f είναι επί: αν $y \neq \vec{0}$ και $\|y\|' \leqslant 1$, τότε το $x = (\|y\|'/\|y\|)y$ έχει νόρμα $\|x\| = \|y\|' \leqslant 1$ και $f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = y$.

(δ) Η f είναι ένα προς ένα: αν $f(x) = f(x_1)$ και $x \neq \vec{0}$, τότε $x_1 \neq \vec{0}$ (γιατί;) και

$$(*) \qquad \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|'}x_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα x, x_1 είναι συγγραμμικά και μάλιστα $x = tx_1$, $t > 0$. Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{t\|x\|}{t\|x\|'}tx \Longrightarrow x = tx \Longrightarrow t = 1,$$

οπότε $x_1 = x$. Αν πάλι $x = \vec{0}$ και $f(x_1) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, είναι φανερό ότι $x_1 = \vec{0} = x$.

(ε) Η $f^{-1} : B_{(X,\|\cdot\|')} \to B_{(X,\|\cdot\|)}$ ορίζεται από την

$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|'}{\|y\|}y.$$

Όπως στο (β) δείχνουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Άρα, η f είναι ομοιομορφισμός.

Άσκηση 2.5

Αποδείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x, Y) = 1$.

Έστω $v \in X \setminus Y$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, είναι κλειστός υπόχωρος του X, και αφού $v \notin Y$ έχουμε $d(v, Y) = a > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n \in Y$ με την ιδιότητα

$$a \leqslant \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|y_n - y_1\| \leqslant \|y_n - v\| + \|v - y_1\| < 2a + 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2a + 2.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (y_n) περιέχεται στην $\widehat{B}(y_1, 2a + 2)$ που είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) με $y_{k_n} \to y \in Y$.

Τότε, $\|v - y\| = \lim \|v - y_n\| = a$. Δηλαδή, υπάρχει πλησιέστερο προς το v σημείο του Y. Συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Riesz. Ορίζουμε $x = \frac{1}{a}(v - y)$. Τότε $\|x\| = 1$ και για κάθε $z \in Y$

$$\|x - z\| = \left\| \frac{v - y}{a} - z \right\| = \left\| \frac{v - (y + az)}{a} \right\| = \frac{\|v - (y + az)\|}{a} \geqslant \frac{d(v, Y)}{a} = 1,$$

γιατί $y + az \in Y$ (ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X). Δείξαμε ότι $d(x, Y) \geqslant 1$ και αφού $d(x, Y) \leqslant \|x - \vec{0}\| = \|x\| = 1$, συμπεραίνουμε ότι $d(x, Y) = 1$.

Άσκηση 2.6

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και ένα $\varepsilon > 0$.
(α) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_k \in B_X$ με την ιδιότητα $\|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$ αν $i \neq j$. Να δείξετε ότι $k \leqslant (1 + 2/\varepsilon)^n$.
(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon-$δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N \leqslant (1 + 2/\varepsilon)^n$.

(α) Θεωρούμε τις μπάλες $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i = 1, \ldots, k$. Αν V είναι ο όγκος της $B(0,1)$, τότε ο όγκος της $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ είναι $V(\frac{\varepsilon}{2})^n$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.
Αφού $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$, οι $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ είναι ξένες, άρα η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ έχει όγκο $U = k \cdot V \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$.
Από την άλλη πλευρά, αν $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάποιο $i \leqslant k$, τότε $\|y\| \leqslant \|x_i\| + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή $\bigcup_{i=1}^k B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) B(0,1)$.
Έπεται ότι $k \cdot V \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = U \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n V$, το οποίο δίνει το ζητούμενο.
(β) Θεωρούμε την κλάση όλων των συνόλων $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset B_X$, $k \in \mathbb{N}$, που ικανοποιούν την $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$. Από το (α) κάθε τέτοιο σύνολο έχει πλήθος στοιχείων το πολύ ίσο με $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$, άρα ανάμεσά τους υπάρχει κάποιο με μέγιστο πληθάριθμο. Παίρνουμε ένα τέτοιο $\{x_1, \ldots, x_k\}$.
Τότε, το $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι ε-δίκτυο για την B_X: αν υπήρχε $y \in B_X$ με $\|y - x_i\| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $i \leqslant k$, τότε το $\{y, x_1, \ldots, x_k\}$ θα ήταν στην κλάση μας και θα είχε περισσότερα από k στοιχεία.
Από την κατασκευή και το (α), το ε-δίκτυο που φτιάξαμε έχει το πολύ $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$ στοιχεία.

Άσκηση 2.8

Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν περιέχει συμπαγές σύνολο με μη κενό εσωτερικό.

Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Γνωρίζουμε τότε ότι η B_X είναι συμπαγές σύνολο και ότι $\mathrm{int}(B_X) = B(0,1) \neq \varnothing$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $K \subseteq X$ συμπαγές, με $\mathrm{int}(K) \neq \varnothing$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(x_0, r) \subseteq K$. Αν ορίσουμε $K_1 = -x_0 + K$ τότε

$$B(0,r) = -x_0 + B(x_0, r) \subseteq -x_0 + K = K_1.$$

Έπεται ότι

$$B(0,1) = \frac{1}{r} B(0,r) \subseteq \frac{1}{r} K_1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές. Αρχικά, η συνάρτηση $f : X \to X$ με $f(y) = -x_0 + y$ είναι συνεχής, και αφού το K είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $K_1 = -x_0 + K = f(K)$ είναι συμπαγές. Έπειτα, η συνάρτηση $g : X \to X$ με $g(y) = \frac{1}{r}y$ είναι συνεχής, και αφού το K_1 είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές.
Τώρα, αφού $B(0,1) \subseteq \frac{1}{r}K_1$ και το $\frac{1}{r}K_1$ είναι κλειστό, βλέπουμε ότι $B_X = \overline{B(0,1)} \subseteq \frac{1}{r}K_1$, άρα η B_X, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγής. Αναγκαστικά, ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

Άσκηση 2.9

Έστω X χώρος Banach. Αν $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου κάθε A_n είναι συμπαγές υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο $B_{n,k} := kA_n$. Παρατηρούμε (δείτε και την προηγούμενη άσκηση) ότι κάθε $B_{n,k}$ είναι συμπαγές. Επίσης, η οικογένεια $\{B_{n,k} : n, k \geqslant 1\}$ είναι αριθμήσιμη.
Γράφουμε

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} kA_n = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Από την δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire μπορούμε να βρούμε $n_0, k_0 \geqslant 1$ ώστε το σύνολο B_{n_0,k_0} να έχει μη κενό εσωτερικό. Αφού το B_{n_0,k_0} είναι συμπαγές, εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Άσκηση 1.10

(α) Αποδείξτε ότι, αν $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

Χρησιμοποιούμε την εξής ανισότητα: αν $r \geqslant 1$ και $a, b \geqslant 0$, τότε $(a+b)^r \geqslant a^r + b^r$.
Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geqslant 1$ και $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r \geqslant a_1^r + \cdots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geqslant (|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \cdots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leqslant \|x\|_p$.
Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned}\|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \cdots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\ &\leqslant \left((|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p}\right)^{\frac{p}{r}} (1 + \cdots + 1)^{1-\frac{p}{r}} = \|x\|_r^p n^{1-\frac{p}{r}},\end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leqslant \|x\|_r n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

Άσκηση 1.10

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

(β) Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$ για κάθε $p \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Άσκηση 1.11

Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;

Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k = y_1 + \cdots + y_k = \left(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{k^2}, 0, \dots\right) \to x = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

στον ℓ_∞. Αν υπήρχε $y \in c_{00}$ για το οποίο $s_k \to y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον ℓ_∞) θα είχαμε $y = x \notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον c_{00} η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

Άσκηση 1.12

Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Αποδείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.

(α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.
Ορίζουμε $w = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, \ldots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap c_{00} \neq \varnothing$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$.
(β) Θεωρούμε το $x = (1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geqslant N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geqslant |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x, 1) \cap c_{00} = \varnothing$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ_∞.

Άσκηση 1.13

Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1\}$. Αποδείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.
Αποδείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

(α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leqslant 1$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \to \xi_k$ καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| \leqslant 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leqslant 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N, έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_∞.

(β) Θα δείξουμε ότι το S έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ - άρα και στον ℓ_∞.
Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_{\ell_\infty} < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geqslant 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά ξ_k). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους k. Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_{\ell_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap B(x, \varepsilon) \subseteq S$.
(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο ℓ_1 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$: αν το nS περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το S θα περιείχε μπάλα ακτίνας r/n, άτοπο από το (β).
Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του ℓ_1 με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

Άσκηση 1.14

Στον ℓ_1 ορίζουμε

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι η $\|x\|' = 0 \Longrightarrow x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \Longrightarrow 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Άσκηση 1.14

Στον ℓ_1 ορίζουμε $\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_1 είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ είναι πλήρης. Έχουμε:

$$\|x\|' \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \frac{7}{2}\|x\|,$$

και

$$\begin{aligned}\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| &= |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k - \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \left|\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + 2\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| \\ &\leqslant 2\left(2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|\right) = 2\|x\|'.\end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \frac{7}{2}\|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Άσκηση 1.23

Να συγκρίνετε τις ακόλουθες νόρμες στον $\mathcal{C}^1[0,1]$:

(α) $\|f\| = \| \, |f| + |f'| \, \|_\infty$ *και* $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(β) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| \, dt$.

(γ) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(α) Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|f(x)| + |f'(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_1,$$

και παίρνοντας supremum ως προς x παίρνουμε

$$\|f\| = \| \, |f| + |f'| \, \|_\infty \leqslant \|f\|_1.$$

Αντίστροφα παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) \, dt \right| \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $\|f\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Έπεται ότι $\|f\|_1 \leqslant |f(0)| + 2\|f'\|_\infty$. Παρατηρώντας ότι

$$|f(0)| \leqslant |f(0)| + |f'(0)| \leqslant \|f\| \quad \text{και} \quad \|f'\|_\infty \leqslant \|f\|$$

συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_1 \leqslant 3\|f\|$. Δηλαδή, οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Άσκηση 1.23

Να συγκρίνετε τις ακόλουθες νόρμες στον $\mathcal{C}^1[0,1]$:

(α) $\|f\| = \| \, |f| + |f'| \, \|_\infty$ *και* $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(β) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| \, dt$.

(γ) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| \, dt \leqslant \|f\|_\infty + \int_0^1 \|f\|_\infty dt = 2\|f\|_\infty.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, αλλά αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ τότε $\|f_n\|_\infty = 1$ ενώ $\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = 1 + n$. Άρα,

$$\sup \left\{ \frac{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty} : f \in \mathcal{C}^1[0,1], f \neq 0 \right\} = +\infty.$$

Άσκηση 1.28

Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Αποδείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$. Είναι πάντα σωστό ότι υπάρχει $y_x \in c_0$ ώστε $d(x, c_0) = \|x - y_x\|$;

Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, και $\alpha = \limsup_k |\xi_k|$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$ για κάθε $y \in c_0$. Έστω $y = (\eta_k) \in c_0$, και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\eta_k \to 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$, $|\eta_k| < \varepsilon$. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει υπακολουθία της $(|\xi_k|)$ που συγκλίνει στο α. Άρα, υπάρχει $k \geqslant k_0$ ώστε $\big| |\xi_k| - \alpha \big| < \varepsilon$. Τότε,

$$|\xi_k - \eta_k| \geqslant |\xi_k| - |\eta_k| > \alpha - \varepsilon - \varepsilon = \alpha - 2\varepsilon,$$

άρα $\|x - y\|_\infty > \alpha - 2\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$. Αφού το $y \in c_0$ ήταν τυχόν, $d(x, c_0) = \inf\{\|x - y\|_\infty : y \in c_0\} \geqslant \alpha$.

Άσκηση 1.28

Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Αποδείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$. Είναι πάντα σωστό ότι υπάρχει $y_x \in c_0$ ώστε $d(x, c_0) = \|x - y_x\|$;

Δείχνουμε τώρα ότι μπορούμε να επιλέξουμε $y_x \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x - y_x\|_\infty = \alpha$. Θεωρούμε τα σύνολα $A_n = \{k \in \mathbb{N} : |\xi_k| > \alpha + 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}$, και θέτουμε

$$B_0 = A_1, \quad B_n = A_{n+1} \setminus A_n = \{k \in \mathbb{N} : \alpha + 1/n \geqslant |\xi_k| > \alpha + 1/(n+1)\}.$$

Κάθε A_n είναι πεπερασμένο σύνολο, αλλιώς η $|\xi_k|$ θα είχε υπακολουθία που θα συνέκλινε σε αριθμό μεγαλύτερο από α. Άρα, και κάθε B_n είναι πεπερασμένο.
Ορίζουμε $y_x = (\eta_k)$ ως εξής:
(1) Αν $k \in B_n$, θέτουμε $\eta_k = \xi_k + \alpha$ αν $\xi_k < 0$ και $\eta_k = \xi_k - \alpha$ αν $\xi_k > 0$. Σε κάθε περίπτωση, $|\xi_k - \eta_k| = \alpha$ και $|\eta_k| \leqslant \frac{1}{n}$, εκτός ίσως από τα $k \in B_0$, τα οποία όμως είναι πεπερασμένα το πλήθος και δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση της (η_k).
(2) Αν $k \notin \cup B_n$, θέτουμε $\eta_k = 0$, οπότε $|\xi_k - \eta_k| \leqslant \alpha$ αφού γι' αυτά τα k έχουμε $|\xi_k| \leqslant \alpha$.
Όπως ορίσαμε το $y_x = (\eta_k)$, έχουμε $\|x - y_x\|_\infty \leqslant \alpha$. Μένει να δείξουμε ότι $y_x \in c_0$: έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $1/n_0 < \varepsilon$. Αν $k_0 = \max\{k : k \in \cup_{n=0}^{n_0} B_n\}$, τότε για κάθε $k > k_0$ ισχύει $|\eta_k| \leqslant 1/n_0 < \varepsilon$. Άρα, $\eta_k \to 0$, δηλαδή $y_x \in c_0$. Από τα παραπάνω, $\alpha \leqslant d(x, c_0) \leqslant \|x - y_x\|_\infty \leqslant \alpha$, δηλαδή $\|y_x - x\|_\infty = d(x, c_0)$.

Άσκηση 1.29

Έστω K φραγμένο υποσύνολο του c_0. Αποδείξτε ότι το K είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ ισχύει

$$|\xi_n| \leqslant \varepsilon.$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $x^1, \ldots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leqslant N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_\infty = \sup\{|\xi_n - \xi_n^j| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon/2.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} |\xi_n^j| = 0$, άρα υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_j$,

$$|\xi_n^j| < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leqslant N$ ώστε $\|x - x_j\|_\infty < \varepsilon/2$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$|\xi_n| \leqslant |\xi_n - \xi_n^j| + |\xi_n^j| \leqslant \|x - x^j\|_\infty + |\xi_n^j| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 1.29

Έστω K φραγμένο υποσύνολο του c_0. Αποδείξτε ότι το K είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ ισχύει

$$|\xi_n| \leqslant \varepsilon.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ να ισχύει $|\xi_n| \leqslant \varepsilon$. Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon/2$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots) : y_n \in \{t_0, t_1, \ldots, t_m) \text{ για κάθε } n = 1, \ldots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του c_0: κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον c_0, και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $x = (\xi_n)$ στο K. Γνωρίζουμε ότι $|\xi_n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n > n_0$. Επίσης, για κάθε $n = 1, \ldots, n_0$ έχουμε $|\xi_n| \leqslant M$, άρα υπάρχει $i_n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ τέτοιος ώστε $|\xi_n - t_{i_n}| < \varepsilon/2$.

Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n_0}}, 0, \ldots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\|x - y\|_\infty \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Άσκηση 1.30

Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ℓ_p. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το K είναι ολικά φραγμένο, μπορούμε να βρούμε $x^1, \ldots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leqslant N$ με την ιδιότητα $\|x - x^j\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p$.
Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε $\sum_{k=n_j}^{\infty} |\xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p$.
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leqslant N$ ώστε $\|x - x_j\|_p^p < (\varepsilon/2)^p$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k^j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ολικά φραγμένο (ως κλειστό υποσύνολο του ℓ_p θα είναι και πλήρες, άρα συμπαγές).
Έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει $\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p$.
Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_p \leqslant M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots) : y_k \in \{t_0, t_1, \ldots, t_m) \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του ℓ_p: κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον ℓ_p, και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.
Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_p < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $x = (\xi_k)$ στο K. Γνωρίζουμε ότι $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p$. Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n_0$ έχουμε $|\xi_k| \leqslant M$, άρα υπάρχει $i_k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ τέτοιος ώστε $|\xi_k - t_{i_n}|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n_0}}, 0, \ldots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι
$\|x - y\|_p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - t_{i_k}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$

Άσκηση 2.3

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < q < +\infty$, ο ℓ_p περιέχεται γνήσια στον ℓ_q, και ο ℓ_q περιέχεται γνήσια στον c_0.
(β) Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον ℓ_p $(p < q)$.
(γ) Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1 \leqslant p < +\infty} \ell_p$.

(α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, άρα $|\xi_k| \to 0$. Για μεγάλα k έχουμε $0 \leqslant |\xi_k| < 1$ και αφού $p < q$ βλέπουμε ότι $0 \leqslant |\xi_k|^q \leqslant |\xi_k|^p$. Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Άρα, $\ell_p \subseteq \ell_q$.
Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Το $x = (1/k^{1/p}) \in \ell_q \backslash \ell_p$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (n μονάδες και μετά μηδενικά). Τότε, $\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \to +\infty$ όταν $n \to \infty$. Δηλαδή, δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_p \leqslant b\|x\|_q$ για κάθε $x \in \ell_p$. Άρα, οι δύο νόρμες δεν είναι ισοδύναμες.

(γ) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$ για κάθε $p \geqslant 1$. Άρα
$x = \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0 \backslash \cup_{p \geqslant 1} \ell_p$.

Άσκηση 2.4

Στον χώρο $\mathcal{C}[0,1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f-g\| = d(f,K)\}.$$

(α) K είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, f τυχούσα στον $\mathcal{C}[0,1]$.

(α) Έστω $f \in \mathcal{C}[0,1]$ και $M = \max\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $m = \min\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_0 \in K$ με $g_0(x) = \frac{M+m}{2}$ στο $[0,1]$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|f-g_0\| &= \max\left\{\left|f(x) - \frac{M+m}{2}\right| : x \in [0,1]\right\}\\ &= \max\left\{M - \frac{M+m}{2}, \frac{M+m}{2} - m\right\} = \frac{M-m}{2}.\end{aligned}$$

Αν $g \in K$, τότε $g(x) = c \in \mathbb{R}$ στο $[0,1]$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) $c < m \Longrightarrow \|f-g\| = M - c > M - m \geqslant \frac{M-m}{2}$.

(ii) $c > M \Longrightarrow \|f-g\| = c - m > M - m \geqslant \frac{M-m}{2}$.

(iii) $m \leqslant c \leqslant M \Longrightarrow \|f-g\| = \max\{M-c, c-m\} \geqslant \frac{M-m}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\|f-g\| \geqslant \frac{M-m}{2} = \|f-g_0\|$. Συνεπώς, $d(f,K) = \frac{M+m}{2} = d(f,g_0)$.

Άσκηση 2.4

Στον χώρο $\mathcal{C}[0,1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f-g\| = d(f,K)\}.$$

(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, f σταθερή.

(β) Έστω $f(x) = c$, $x \in [0,1]$. Τότε, για κάθε $g(x) = ax$ στο K έχουμε $\|f-g\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |c-ax| \geqslant |c|$ και για την $g_0 \equiv 0$ έχουμε $g_0 \in K$ και $\|f-g_0\| = |c|$. Συνεπώς, $d(f,K) = |c|$. Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $c \geqslant 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $0 \leqslant a \leqslant 2c$ (και μόνον αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f-g\| = c = d(f,K)$.

(ii) Αν $c < 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $2c \leqslant a \leqslant 0$ (και μόνο αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f-g\| = |c| = d(f,K)$.

Άσκηση 2.4

Στον χώρο $\mathcal{C}[0,1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(γ) $K = \{g \in \mathcal{C}[0,1] : \ g \geqslant 0, \ \int_0^1 g(t)dt \geqslant g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

(γ) Αν $g \in K$, τότε $\|g - f\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x)$. Όμως,

$$(*) \qquad 1 \leqslant g(0) + 1 \leqslant \int_0^1 g(t)dt \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

Άρα $\|g - f\| \geqslant 1$, και αφού η $g \in K$ ήταν τυχούσα, $d(f, K) \geqslant 1$. Έστω ότι υπάρχει $g \in K$ για την οποία $\|g - f\| = 1$. Τότε έχουμε ισότητα στην $(*)$, άρα $0 \leqslant g \leqslant 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = g(0) + 1 = 1$, οπότε η g είναι συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = 1$, το οποίο είναι άτοπο.
Από την άλλη πλευρά, $d(f, K) = 1$. Πράγματι, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε g_ε με $g_\varepsilon(0) = 0$, $g \equiv 1 + \delta$ στο $[\varepsilon, 1]$ και g_ε γραμμική στο $[0, \varepsilon]$. Αν $\delta = \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}$, τότε $\int_0^1 g_\varepsilon(t)dt = 1$. Άρα, $g_\varepsilon \in K$ και $\|g - f\| = 1 + \delta = 1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}$.
Έπεται ότι $d(f, K) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}\right) = 1$. Άρα $d(f, K) = 1$, αλλά δεν υπάρχει $g \in K$ με την ιδιότητα $\|f - g\| = d(f, K)$.

Άσκηση 1.24

Έστω $\mathcal{C}^k[0,1]$ ο χώρος όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν k συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant s \leqslant k} \left(\max\{|f^{(s)}(t)| : t \in [0,1]\} \right).$$

Αποδείξτε ότι ο $\mathcal{C}^k[0,1]$ είναι χώρος Banach.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι (f_n) είναι μια βασική ακολουθία στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Γράφουμε $g^{(s)}$ για την s-οστή παράγωγο της g. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n^{(s)} - f_m^{(s)}\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k$, όπου $\|\cdot\|_\infty$ η συνήθης νόρμα στον $\mathcal{C}[0,1]$. Ο $\mathcal{C}[0,1]$ είναι πλήρης, άρα υπάρχουν συνεχείς $f = f^{(0)}, f_s : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n^{(s)} \to f_s$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (της Πραγματικής Ανάλυσης), η f_s είναι παραγωγίσιμη για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k-1$ και $(f_s)' = f_{s+1}$. Δηλαδή, $f_s = f^{(s)}$ για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k$. Αφού η $f^{(k)} = f_k$ είναι συνεχής, έχουμε $f \in \mathcal{C}^k[0,1]$. Τέλος,

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n^{(s)} - f^{(s)}\|_\infty : s = 0, 1, \ldots k\} \to 0.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $\mathcal{C}^k[0,1]$.

Άσκηση 1.25

Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Η κύμανση της f ορίζεται από την

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\right\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, τότε λέμε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο $BV[0, 1]$ όλων των συναρτήσεων $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η $\|f\| = V(f)$ είναι νόρμα στον $BV[0, 1]$ και ότι ο $(BV[0, 1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Ελέγχουμε πρώτα ότι ο $BV[0, 1]$ είναι γραμμικός χώρος. Οι ιδιότητες της νόρμας έπονται άμεσα από τον ορισμό. Η υπόθεση ότι $f(0) = 0$ εξασφαλίζει την $V(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$: από την $V(f) = 0$ συμπεραίνουμε αρχικά ότι η f είναι σταθερή, και αφού $f(0) = 0$ έχουμε ότι η f μηδενίζεται παντού στο $[0, 1]$.

Έστω (f_m) βασική ακολουθία στον $BV[0,1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $s, m \geqslant m_0$ τότε

$$V(f_s - f_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|f_s - f_m\|_\infty \leqslant V(f_s - f_m). \tag{2}$$

Πράγματι, αν $g \in BV[0,1]$ και αν $t \in (0,1]$, θεωρώντας τη διαμέριση $\{0 < t \leqslant 1\}$ βλέπουμε ότι $|g(t)| = |g(t) - g(0)| + |g(1) - g(t)| \leqslant V(g)$, άρα $\|g\|_\infty \leqslant V(g)$. Από την (2) έπεται ότι η (f_m) είναι βασική ακολουθία στον $B[0,1]$ άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in B[0,1]$ (επίσης, η f είναι συνεχής από δεξιά ως ομοιόμορφο όριο συναρτήσεων που είναι συνεχείς από δεξιά). Σταθεροποιώντας $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, $m \geqslant m_0$ και αφήνοντας το $s \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |(f - f_m)(t_i) - (f - f_m)(t_{i-1})| &= \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |(f_s - f_m)(t_i) - (f_s - f_m)(t_{i-1})| \\ &\leqslant \liminf_{s\to\infty} V(f_s - f_m) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $V(f - f_m) \to 0$ όταν το $m \to \infty$. Ειδικότερα, $V(f) \leqslant V(f - f_{m_0}) + V(f_{m_0}) < \infty$, δηλαδή $f \in BV[0,1]$.

Άσκηση 1.26

Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_\alpha([0,1])$ τον χώρο των Hölder συνεχών συναρτήσεων με εκθέτη α: δηλαδή, $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ αν και μόνο αν $f(0) = 0$ και

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in [0,1],\, x \neq y \right\} < +\infty.$$

(α) Αποδείξτε ότι ο $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι χώρος Banach.

Δείχνουμε πρώτα ότι η $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ είναι νόρμα (απλό). Επίσης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|^\alpha} \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha},$$

άρα $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε βασική ακολουθία (f_n) στον $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Ελέγχουμε ότι $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ και $\|f_n - f\|_{\Lambda_\alpha} \to 0$.

Άσκηση 1.26

(β) Έστω $\lambda_\alpha([0,1])$ το σύνολο των $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ που ικανοποιούν την

$$\lim_{x\to y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \text{ για κάθε } y \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\Lambda_\alpha([0,1])$. Ποιός είναι ο $\lambda_\alpha([0,1])$ στην περίπτωση $\alpha = 1$;

Για τον $\lambda_\alpha([0,1])$ παρατηρήστε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε οι $g_n(t) = t^n$ ανήκουν στον $\lambda_\alpha([0,1])$ (άρα έχει άπειρη διάσταση) ενώ αν $f \in \lambda_1([0,1])$ τότε $|f'(x)| = \left|\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = 0$ για κάθε x, άρα η f είναι σταθερή, και λόγω της $f(0) = 0$ αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.

Άσκηση 1.27

Αν $x = (\xi_k) \in c_0$, υπάρχει μετάθεση των φυσικών $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε η $(|\xi_{\pi(n)}|)$ να είναι φθίνουσα, και η ακολουθία (ξ'_n) με $\xi'_n = |\xi_{\pi(n)}|$ ορίζεται μονοσήμαντα από την (ξ_n). Για κάθε $x \in c_0$, ορίζουμε $\|x\| = \sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^m \xi'_n : m \in \mathbb{N} \right\}$, και θέτουμε $d_0 = \{x \in c_0 : \|x\| < +\infty\}$. Αποδείξτε ότι ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Είναι χώρος Banach;

Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Παρατηρήστε ότι, αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in d_0$, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^m (x+y)'_k \leqslant \sum_{k=1}^m \xi'_k + \sum_{k=1}^m \eta'_k$. Πράγματι, αν $(x+y)'_k = |\xi_{j_k} + \eta_{j_k}|$ τότε

$$\sum_{k=1}^m (x+y)'_k = \sum_{k=1}^m |\xi_{j_k} + \eta_{j_k}| \leqslant \sum_{k=1}^m |\xi_{j_k}| + \sum_{k=1}^m |\eta_{j_k}| \leqslant \sum_{k=1}^m \xi'_k + \sum_{k=1}^m \eta'_k,$$

γιατί οποιεσδήποτε m απόλυτες τιμές όρων π.χ. της (ξ_k) έχουν άθροισμα το πολύ ίσο με $\xi'_1 + \cdots + \xi'_m$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m (x+y)'_k : m \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leqslant \sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \xi'_k \right\} + \sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \eta'_k \right\} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

(β) Ο $(d_0, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης: έστω (x^ℓ) βασική ακολουθία στον d_0. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\ell_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: αν $\ell, s \geqslant \ell_0$, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^\ell - x^s)'_k < \varepsilon$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $|\xi_m^\ell - \xi_m^s| \leqslant (x^\ell - x^s)'_1 < \varepsilon$, δηλαδή $\|x^\ell - x^s\|_\infty < \varepsilon$. Ειδικότερα, η $(\xi_m^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία για κάθε m και ορίζεται το $\xi_m = \lim_{\ell \to \infty} \xi_m^\ell \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, $\lim_{s \to \infty} \|x^s - x\|_\infty = 0$ (από την πληρότητα του ℓ_∞).

Θέτουμε $x = (\xi_m)$ και δείχνουμε ότι $\|x^\ell - x\| \to 0$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, για το ℓ_0 που ορίσαμε παραπάνω έχουμε: για κάθε $\ell \geqslant \ell_0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $s > \ell_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^\ell - x)'_k &\leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^\ell - x^s)'_k + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^s - x)'_k \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^s - x)'_k \leqslant \varepsilon + \sqrt{m}\, \|x^s - x\|_\infty. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $s \to \infty$ βλέπουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^\ell - x)'_k \leqslant \varepsilon$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $\|x^\ell - x\| = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} (x^\ell - x)'_k : m \in \mathbb{N} \right\} \leqslant \varepsilon$ για κάθε $\ell \geqslant \ell_0$. Αυτό δείχνει ότι $\|x^\ell - x\| \to 0$.

Άσκηση 1.16

Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

Τα x_i παράγουν τον X, επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε η

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$.

Για την $(N2)$: Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^m |\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \to 0$ για κάθε $i \leqslant m$. Θεωρούμε τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X. Τότε,
$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i \to \sum_{k=1}^m 0 \cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για την $(N3)$: Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ και $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^m (a\lambda_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |a\lambda_i| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon \Longrightarrow \|ax\| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|ax\| \leqslant |a| \cdot \|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για την $(N4)$: Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και $\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon$.
Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα, $\|x + y\| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon$, και αφού το ε ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.