602. Ασκήσεις – Μέρος 2

Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

3 Απριλίου 2021

Άσκηση 12

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $x_n, x \in X$. Αποδείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

Οι (T_n) και (x_n) είναι φραγμένες ακολουθίες στους $B(X, Y)$ και X αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leqslant M, \quad \|x_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - Tx_n + Tx_n - Tx\| \\ &\leqslant \|(T_n - T)(x_n)\| + \|T(x_n - x)\| \\ &\leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x_n\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \\ &\leqslant M\|T_n - T\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \to 0, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_n x_n \to Tx$.

Άσκηση 13

Έστω X, Y χώροι με νορμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(β) Το σύνολο $T^{-1}(S_Y) = \{x \in X : \|Tx\|_Y = 1\}$ είναι κλειστό.

(α) $\Longrightarrow$ (β): Η S_Y είναι κλειστό υποσύνολο του Y και ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, άρα συνεχής συνάρτηση. Έπεται ότι το σύνολο $T^{-1}(S_Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Αρχικά παρατηρούμε ότι $T(0) = 0 \notin S_Y$, άρα $0 \notin T^{-1}(S_Y)$. Αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0, \delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \varnothing$. Δηλαδή, για κάθε $z \in B(0, \delta)$ έχουμε: $\|T(z)\|_Y < 1$ ή $\|T(z)\|_Y > 1$.
Έστω ότι υπάρχει $z_0 \in B(0, \delta)$ με $\|T(z_0)\|_Z > 1$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1}{\|T(z_0)\|_Y} < 1$. Τότε, $\|\lambda z_0\|_X = \lambda \|z_0\|_X < \lambda\delta < \delta$, δηλαδή $\lambda z_0 \in B(0, \delta)$, $\|T(\lambda z_0)\|_Y = \lambda \cdot \|T(z_0)\|_Y = 1$, δηλαδή $\lambda z_0 \in T^{-1}(S_Y)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $B(0, \delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \varnothing$.
Έχουμε λοιπόν δείξει ότι για κάθε $z \in B(0, \delta)$ ισχύει $\|T(z)\| < 1$. Τότε, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right)\right\| < 1$ διότι $\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Δηλαδή,
$\frac{\delta}{2\|x\|_X}\|T(x)\|_Y < 1 \quad \Longrightarrow \|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X$, άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant \frac{2}{\delta}$.

Άσκηση 14

Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

Έστω ότι το F είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x \in \widehat{B}(0,1)$ έχουμε

$$|F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\| \leqslant \|F\|,$$

δηλαδή, $F(\widehat{B}(0,1)) \subseteq [-\|F\|, \|F\|]$. Άρα, για $\delta = 1$ έχουμε $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$ για κάποιο $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(\widehat{B}(0,\delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (από τη γραμμικότητα του F). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leqslant \delta \Longrightarrow |F(x)| \leqslant M.$$

Έπεται ότι το F είναι φραγμένο: αν $x \neq 0$, τότε

$$\left| F\left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \right| \leqslant M \Longrightarrow |F(x)| \leqslant \frac{2M}{\delta} \|x\|.$$

Άσκηση 16

Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο T δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

άρα $x_n \to 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geqslant \varepsilon\sqrt{n} \to +\infty,$$

δηλαδή η $(\|Tx_n\|)$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο T είναι φραγμένος.

Άσκηση 18

Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα (πάνω από το $\mathbb{R}$). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι φραγμένο. Χρησιμοποιώντας το, αποδείξτε ότι υπάρχουν *κυρτά και πυκνά* σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $A \cup B = X$ και $A \cap B = \varnothing$.

Θεωρούμε ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, τα σύνολα $A = \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$ και $B = \{x \in X : f(x) < 0\}$ είναι μη κενά, κυρτά, ξένα και $X = A \cup B$. Αφού το f δεν είναι φραγμένο, γνωρίζουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι πυκνός (και γνήσιος) υπόχωρος του X. Ο $\mathrm{Ker}(f)$ περιέχεται στο A, άρα $\overline{A} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)} = X$, δηλαδή το A είναι πυκνό. Επίσης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) < 0$, και τότε $x_0 + \mathrm{Ker}(f) \subseteq B$: αν $x \in x_0 + \mathrm{Ker}(f)$ τότε $f(x) = f(x_0) < 0$. Όμως, $\overline{x_0 + \mathrm{Ker}(f)} = x_0 + \overline{\mathrm{Ker}(f)} = X$, άρα

$$\overline{B} \supseteq \overline{x_0 + \mathrm{Ker}(f)} = X.$$

Δηλαδή, το B είναι κι αυτό πυκνό υποσύνολο του X.

Άσκηση 19

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω $\{e_i\}_{i\in I}$ (υπεραριθμήσιμη) βάση Hamel του X.

(α) Ορίζουμε μια νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i(x) e_i$ (για κάποιους $\alpha_i(x) \in \mathbb{K}$) με το σύνολο $I(x) = \{i \in I : \alpha_i(x) \neq 0\}$ πεπερασμένο. Θέτουμε $\|0\|' = 0$ και

$$\|x\|' = \sum_{i\in I} |\alpha_i(x)| = \sum_{i\in I(x)} |\alpha_i(x)|$$

αν $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα, που δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

(α) Αφού ο X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach, το σύνολο $\{e_i\}_{i\in I}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Παρατηρούμε ότι αν $i \neq j$, $i, j \in I$, τότε $e_i - e_j = 1 \cdot e_i + (-1) \cdot e_j$ (αυτή είναι η μοναδική του αναπαράσταση ως πεπερασμένου γραμμικού συνδυασμού των e_i), άρα

$$\|e_i - e_j\|' = 2.$$

Έπεται ότι ο $(X, \|\cdot\|')$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Αν όμως οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ήταν ισοδύναμες, τότε αφού ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος θα είχαμε ότι και ο $(X, \|\cdot\|')$ είναι διαχωρίσιμος το οποίο είναι άτοπο. Άρα, οι δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δεν είναι ισοδύναμες.

Άσκηση 19

(β) Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $f_i : X \to \mathbb{K}$ με $f_i(x) = f_i\left(\sum_{i\in I} \alpha_i(x)e_i\right) = \alpha_i(x)$. Αποδείξτε ότι κάθε f_i είναι γραμμικό συναρτησοειδές, αλλά υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in I$ ώστε το f_i να μην είναι φραγμένο.

(β) Η γραμμικότητα των f_i ελέγχεται εύκολα. Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε μια ακολουθία $(e_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ διαφορετικών ανά δύο στοιχείων της βάσης Hamel του X. Παρατηρήστε ότι $e_{i_k} \neq 0$, αφού τα e_{i_k} είναι στοιχεία της βάσης. Αν $v_k = \frac{e_{i_k}}{2^k \|e_{i_k}\|}$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$, και αφού ο X είναι χώρος Banach, η ακολουθία $s_N = \sum_{k=1}^{N} v_k$ συγκλίνει στο $x = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \in X$.
Τώρα, γράφουμε το x στη μορφή $x = \sum_{j\in I(x)} \alpha_j(x)e_j$, όπου το $I(x)$ είναι πεπερασμένο. Αφού τα e_{i_k} είναι άπειρα το πλήθος, υπάρχει $i_n \in I$ τέτοιος ώστε $i_n \notin I(x)$. Θεωρούμε το f_{i_n} και υποθέτουμε ότι είναι φραγμένο, άρα συνεχής απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι

$$f_{i_n}(x) = \alpha_{i_n}(x) = 0,$$

διότι $i_n \notin J(x)$ άρα $\alpha_{i_n}(x) = 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $N \geqslant n$ έχουμε $f_{i_n}(s_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k \|e_{i_k}\|} f_{i_n}(e_{i_k}) = \frac{1}{2^n \|e_{i_n}\|}$, διότι $f_{i_n}(e_{i_k}) = 0$ αν $k \neq n$ και $f_{i_n}(e_{i_n}) = 1$. Αν το f_{i_n} ήταν συνεχής απεικόνιση, θα είχαμε $\lim_{N\to\infty} f_{i_n}(s_N) = \frac{1}{2^n \|e_{i_n}\|} = f(x) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 20

Αποδείξτε ότι το σύνολο $Y = \left\{x = (x_n) \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\right\}$ είναι πυκνός διανυσματικός υπόχωρος του c_0.

Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ ως υπόχωρο του c_0. Είναι γνωστό ότι $\overline{c_{00}} = c_0$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική.
Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_\infty = 1$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_N\|_\infty = \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$).
Τώρα, παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\mathrm{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του c_0 παίρνουμε

$$\overline{Y}^{c_0} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_0} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}.$$

Άρα, $\overline{Y}^{c_0} \supseteq \overline{c_{00}}^{c_0} = c_0$. Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του c_0.

Άσκηση 21

Έστω $1 < p < \infty$ και $Y = \left\{ x = (x_k) \in \ell_p : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Αποδείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p.

Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ ως υπόχωρο του ℓ_p. Είναι γνωστό (ελέγξτε το) ότι $\overline{c_{00}} = \ell_p$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική. Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_\infty = N^{1/p}$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_N\|_\infty = \|f\| \cdot N^{1/p} \quad \Longrightarrow \quad N^{1/q} \leqslant \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\mathrm{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$).
Τώρα, παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\mathrm{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του ℓ_p παίρνουμε

$$\overline{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{\ell_p} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = c_{00}.$$

Άρα, $\overline{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{c_{00}}^{\ell_p} = \ell_p$. Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p.

Άσκηση 25

Έστω X χώρος Banach και έστω (f_n) μια ακολουθία μη μηδενικών συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f_n : X \to \mathbb{K}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $f_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n = n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$, δηλαδή $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$. Τότε,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(f_n).$$

Αφού κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\mathrm{Ker}(f_n)$ είναι κλειστό. Ο X είναι πλήρης, άρα από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(f_{n_0})$ να έχει μη κενό εσωτερικό. Όμως τότε, $\mathrm{Ker}(f_{n_0}) = X$ (γνωστό από τη θεωρία). Δηλαδή, $f_{n_0} \equiv 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι όλα τα f_n είναι μη μηδενικά.

Άσκηση 26

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, ο X χώρος Banach, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ και το $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Αφού ο X είναι πλήρης, τα σύνολα F_n είναι κλειστά και $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_n) \neq \varnothing$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq F_{n_0}$. Άρα, το

$$T(B(x_0, \delta)) \subseteq T(F_{n_0})$$

είναι φραγμένο υποσύνολο του Y. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $z \in B(x_0, \delta)$ ισχύει $\|Tz\|_Y \leqslant M$. Τότε, για κάθε $w \in B(0, \delta)$ έχουμε $x_0 + w \in B(x_0, \delta)$ και $x_0 \in B(x_0, \delta)$, άρα

$$\|Tw\|_Y = \|T(x_0 + w) - T(x_0)\|_Y \leqslant \|T(x_0 + w)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \leqslant 2M.$$

Τέλος, για κάθε $x \in X \setminus \{0\}$ έχουμε $\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \delta)$, άρα

$$\|T(x)\|_Y = \frac{2\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y \leqslant \frac{4M}{\delta} \|x\|,$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος.

Άσκηση 27

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (F_n) κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και κάθε $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y. Είναι ο T απαραίτητα φραγμένος;

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ θεωρούμε τα σύνολα

$$F_n := \{x = (x_k) : |x_k| \leqslant n \text{ αν } k \leqslant n \text{ και } x_k = 0 \text{ αν } k > n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο: αν $x^{(s)} = (x_k^{(s)})_{k=1}^{\infty} \in F_n$, $s = 1, 2, \ldots$, και $x^{(s)} \to x$ για κάποιο $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$, τότε για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$\lim_{s\to\infty} x_k^{(s)} = x_k,$$

διότι $|x_k^{(s)} - x_k| \leqslant \|x^{(s)} - x\|_\infty \to 0$. Όμως, αν $k \leqslant n$ έχουμε $|x_k^{(s)}| \leqslant n$ για κάθε s, άρα

$$|x_k| = \lim_{s\to\infty} |x_k^{(s)}| \leqslant n,$$

και όμοια, αν $k > n$ έχουμε $x_k^{(s)} = 0$ για κάθε s, άρα

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^{(s)} = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in F_n$, και από τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι το F_n είναι κλειστό.

Δείχνουμε ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $x = (x_k) \in c_{00}$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_k = 0$ για κάθε $k > m$. Επίσης, υπάρχει $s \in \mathbb{N}$ ώστε $\max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\} \leqslant s$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $n \geqslant \max\{m, s\}$ τότε έχουμε $|x_k| \leqslant n$ για κάθε $k \leqslant n$ (διότι $|x_k| \leqslant s \leqslant n$ αν $k \leqslant m$ και $|x_k| = 0 \leqslant n$ αν $k > m$) και $x_k = 0$ για κάθε $k > n$ (διότι, αν $k > n$ έχουμε $k > m$). Άρα, $x \in F_n$, και αφού το $x \in c_{00}$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο. Τώρα, θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί η ακολουθία (x_k) είναι τελικά μηδενική (άρα, οι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος). Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός. Αν $x \in F_n$ τότε

$$|T(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{k-=1}^{n} n = n^2.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, ο T δεν είναι φραγμένος: υποθέτουμε ότι $\|T\| < \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (με n μονάδες στην αρχή και μηδενικά μετά). Τότε, $\|x_n\|_\infty = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant |T(x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} 1\right| = n,$$

το οποίο είναι άτοπο (το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο από την $\|T\|$).

Άσκηση 28

Έστω $T \in B(X, Y)$ (X είναι χώρος Banach). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\|Tx\| \geqslant \alpha\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

Έστω (y_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(T)$ με $y_n \to y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $y_n = T(x_n)$. Από την υπόθεση, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|T(x_n) - T(x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|.$$

Η (y_n) είναι συγκλίνουσα άρα βασική ακολουθία. Από την ανισότητα

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι επίσης βασική. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Ο T είναι συνεχής, άρα $T(x_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $y_n \to T(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $y = T(x) \in \mathcal{R}(T)$. Συνεπώς, ο $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστό σύνολο (το γεγονός ότι είναι υπόχωρος του Y ισχύει γενικά).

Άσκηση 29

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;

Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $T : X \to T(X)$ είναι 1-1. Αν $x, z \in X$ και $T(x) = T(z)$, τότε

$$0 = \|T(x) - T(z)\| = \|T(x - z)\| \geqslant m\|x - z\|,$$

άρα $\|x - z\| = 0$ και έπεται ότι $x = z$. Άρα, ο $T : X \to T(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Έστω $y \in T(X)$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$, και $x = T^{-1}(y)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για το $y = T(x)$, έχουμε

$$\|y\| = \|T(x)\| \geqslant m\|x\| = m\|T^{-1}(y)\|.$$

Δηλαδή,

$$\|T^{-1}(y)\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$$

για κάθε $y \in T(X)$. Έπεται ότι ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$.

Άσκηση 31

(α) Έστω X χώρος Banach και έστω $T \in B(X,X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με $S_y(x) = y + T(x)$. Αποδείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.

(α) Το x_0 ορίζεται καλά γιατί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$ συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n(y)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| \cdot \|y\| < +\infty$$

από την υπόθεση. Λόγω συνέχειας του T έχουμε

$$S_y(x_0) = y + T\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)\right) = y + T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{n+1}(y) = y + \sum_{k=1}^{\infty} T^k(y) = x_0,$$

δηλαδή το x_0 είναι σταθερό σημείο της S_y.
Αν τα x_0 και x_1 είναι διαφορετικά σταθερά σημεία της S_y, τότε $y + T(x_0) = x_0$ και $y + T(x_1) = x_1$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$T(x_0 - x_1) = T(x_0) - T(x_1) = x_0 - x_1.$$

Τότε, επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$T^n(x_0 - x_1) = x_0 - x_1$$

για κάθε n, δηλαδή $\|T^n\| \geqslant 1$ για κάθε n. Αυτό είναι άτοπο αφού από την υπόθεση έχουμε $\|T^n\| \to 0$. Άρα, η S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Άσκηση 31

(β) Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra $f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t)f(s)ds$ για κάθε $t \in [0,1]$.

(β) Θεωρούμε τον τελεστή $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t)f(s)\,ds$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ελέγχουμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος: η Tf είναι συνεχής συνάρτηση και ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $S_g : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $S_g(f) = g + Tf$. Η εξίσωση του Volterra έχει συνεχή λύση αν η S_g έχει σταθερό σημείο. Από το (α) αρκεί να δείξουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$.

Έστω $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leqslant s,t \leqslant 1\}$. Δείχνουμε επαγωγικά ότι: για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,1]$, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|(T^n f)(t)| \leqslant \frac{M^n}{n!}\|f\|_\infty t^n$. Το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} |(T^{n+1}f)(t)| &= \left| \int_0^t K(s,t)(T^n f)(s)\,ds \right| \leqslant M \int_0^t |(T^n f)(s)|\,ds \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}}{n!}\|f\|_\infty \int_0^t s^n ds \leqslant \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|_\infty t^{n+1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T^n\| \leqslant M^n/n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$.

Άσκηση 32

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και ένα προς ένα τελεστής $T : X^* \to c_0$.

Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X. Ορίζουμε $T : X^* \to c_0$ με

$$T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f(x_n)|/n \leqslant \|f\| \cdot \|x_n\|/n = \|f\|/n \to 0$, γραμμικός, και για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\|T(f)\|_{c_0} = \sup_n \frac{|f(x_n)|}{n} \leqslant \sup_n \frac{\|f\|}{n} = \|f\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.
Αν $T(f) = T(g)$ για κάποια $f, g \in X^*$, τότε $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε n, και αφού το $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της B_X, έχουμε $f \equiv g$ στην B_X. Άρα, $f = g$ και αυτό δείχνει ότι ο T είναι ένα προς ένα.

Άσκηση 33

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to X$.

Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της B_X και ορίζουμε $T : \ell_1 \to X$ με $T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ για $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Ο T είναι καλά ορισμένος: αν $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_{\ell_1} < \infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει και το $T(a) \in X$ ορίζεται καλά. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Επίσης, για κάθε $\alpha \in \ell_1$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \|a\|_{\ell_1},$$

άρα

$$\|T(a)\| = \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leqslant \|a\|_{\ell_1}.$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leqslant 1$. Μάλιστα ισχύει και η $\|T\| \geqslant \|T(e_n)\| = \|x_n\|$ για κάθε n, άρα $\|T\| = 1$ (αφού η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πυκνή στην B_X έχουμε $\sup_n \|x_n\| = 1$.

Άσκηση 33

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to X$.

Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της B_X και ορίζουμε $T : \ell_1 \to X$ με $T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ για $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in \frac{1}{2} B_X$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x - x_{k_1}\| < \frac{1}{2}$. Τότε, $2(x - x_{k_1}) \in B_X$ άρα μπορούμε να βρούμε $k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\|2(x - x_{k_1}) - x_{k_2}\| < \frac{1}{2} \implies \left\|x - \left(x_{k_1} + \frac{1}{2} x_{k_2}\right)\right\| < \frac{1}{2^2}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον $k_2 > k_1$ διότι το σύνολο $B(2(x - x_{k_1}), 1/2) \cap D$ είναι άπειρο.
Επαγωγικά, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών ώστε, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, $\left\|x - \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n}\right)\right\| < \frac{1}{2^N}$. Έπεται ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n} = T(a_x),$$

όπου $a_x = (a_m)_{m=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία με $a_m = \frac{1}{2^{n-1}}$ αν $m = k_n$ και $a_m = 0$ αν $m \neq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι $a_x \in \ell_1$ αφού $\|a_x\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$).
Αφού $T(\ell_1) \supseteq \frac{1}{2} B_X$ και ο T είναι γραμμικός, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ο T είναι επί.

Άσκηση 1

Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: για κάθε $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$ και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

(α) Ο T ορίζεται καλά, γιατί $\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty$, δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Για τη νόρμα του T_n έχουμε $\|T_n\| \leqslant \|T\| \cdots \|T\| = \|T\|^n \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geqslant \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \to \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$.

Άσκηση 2

Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. Αποδείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το F είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty}(a\xi_k + b\eta_k) = a\sum_{k=1}\xi_k + b\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geqslant 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = \|x\|_1.$$

Άσκηση 3

Έστω $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T.

(α) Η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \Longrightarrow (Tf)' = (Tg)' \Longrightarrow f = g.$$

Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = \left| \int_0^t f(s)ds \right| \leqslant \int_0^t |f(s)|ds \leqslant \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leqslant \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |(Tf)(t)| \leqslant \|f\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Για την γραμμικότητα του T παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}[T(af+bg)](t) &= \int_0^t (af(s) + bg(s))ds = a\int_0^t f(s)ds + b\int_0^t g(s)ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf) + b(Tg)](t),\end{aligned}$$

άρα $T(af + bg) = a(Tf) + b(Tg)$.

Άσκηση 3

Έστω $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T.

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T. Πράγματι, αν $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in \mathcal{C}[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

Άσκηση 3

Έστω $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(γ) Είναι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{C}[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in \mathcal{R}(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f_n'(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n.$$

Έπεται ότι ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0,1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geqslant \|Tf\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

Άσκηση 4

Στον $\mathcal{C}[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : \mathcal{C}[-1,1] \to \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^{1} g(s)ds - g(0)$.

(α) Για κάθε $g \in \mathcal{C}[0,1]$ έχουμε $|F(g)| = \left|\int_{-1}^{1} g(s)ds - g(0)\right| \leqslant \int_{-1}^{1}|g(s)|ds + |g(0)| \leqslant 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|$. Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in \mathcal{C}[-1,1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1,-\varepsilon]$ και $[\varepsilon,1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon,0]$ και $[0,\varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned}
\|F\| \geqslant |F(g_\varepsilon)| &= \left|\int_{-1}^{1} g_\varepsilon(s)ds + 1\right| \\
&= \left|\int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^{0} g_\varepsilon(s)ds + \int_{0}^{\varepsilon} g_\varepsilon(s)ds + \int_{\varepsilon}^{1} ds + 1\right| \\
&= |(1-\varepsilon) + 0 + 0 + (1-\varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι $\|F\| \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0^+}(3-2\varepsilon) = 3$. Άρα, $\|F\| = 3$.

Άσκηση 4

Στον $\mathcal{C}[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F:\mathcal{C}[-1,1]\to\mathbb{R}$:

(β) $F(g) = \frac{g(1/2)+g(-1/2)-2g(0)}{2}$.

(β) Για κάθε $g\in\mathcal{C}[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}|F(g)| &= \left|\frac{g(1/2)}{2}+\frac{g(-1/2)}{2}-g(0)\right| \leqslant \frac{|g(1/2)|}{2}+\frac{|g(-1/2)|}{2}+|g(0)| \\ &\leqslant \frac{\|g\|}{2}+\frac{\|g\|}{2}+\|g\| = 2\|g\|.\end{aligned}$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\|\leqslant 2$. Ορίζουμε $g\in\mathcal{C}[-1,1]$ θέτοντας $g\equiv 1$ στα $[-1,-1/2]$ και $[1/2,1]$, $g(0)=-1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2,0]$ και $[0,1/2]$. Τότε $\|g\|=1$ και

$$\|F\| \geqslant |F(g)| = \left|\frac{g(1/2)}{2}+\frac{g(-1/2)}{2}-g(0)\right| = \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-1)\right| = 2.$$

Άρα, $\|F\|=2$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : c_0 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, όπου $x = (x_k) \in c_0$.
Αποδείξτε ότι $f \in c_0^*$ και υπολογίστε την $\|f\|$.

Έστω $x = (x_k) \in c_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $|x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ για κάθε k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\|x\|_\infty < \infty,$$

άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_\infty.$$

Έπεται ότι $f \in c_0^*$ και $\|f\| \leqslant \frac{1}{2}$.
Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ (οι πρώτες N συντεταγμένες του x_N είναι ίσες με 1 και οι υπόλοιπες ίσες με 0). Έχουμε $\|x_N\|_\infty = 1$, άρα

$$\|f\| \geqslant |f(x_N)| = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^N}{1 - \frac{1}{3}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι $\|f\| \geqslant \frac{1}{2}$. Άρα, τελικά, $\|f\| = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι οι γραμμικοί τελεστές $S, T : \ell_1 \to \ell_1$ με $S(x) = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ και $T(x) = x + S(x)$ είναι φραγμένοι και υπολογίστε τη νόρμα τους.

Έστω $x = (x_k)_{k\geqslant 1} \in \ell_1$. Έχουμε $S(x) = (x_2, x_3, \ldots)$, άρα $\|S(x)\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1$. Έπεται ότι ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leqslant 1$. Θεωρώντας το $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ παρατηρούμε ότι $S(e_2) = e_1$ και $\|e_2\|_1 = 1$, άρα $\|S\| \geqslant \|S(e_2)\|_1 = \|e_1\|_1 = 1$. Συνεπώς, $\|S\| = 1$.
Για τον T παρατηρούμε ότι $\|T(x)\|_1 = \|x + S(x)\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|S(x)\|_1 \leqslant 2\|x\|_1$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 2$. Αν $x = (x_k)$ με $x_1 = 0$, $x_k \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$ και $\|x\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 1$, έχουμε

$$\|T\| \geqslant \|T(x)\|_1 = \|(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k + x_{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2\sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2.$$

Έπεται ότι $\|T\| = 2$.

Άσκηση 8

Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Αποδείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(α) Η γραμμικότητα των T και S ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = \left| t\int_0^1 f(s)ds \right| \leqslant t\int_0^1 |f(s)|ds \leqslant t\|f\| \int_0^1 ds = t\|f\| \leqslant \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.
Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leqslant 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Sf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leqslant 1$.

Άσκηση 8

Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds, (Sf)(t) = tf(t)$.
(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;
(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

(β) Έχουμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = t\int_0^1 (Sf)(s)ds = t\int_0^1 sf(s)ds,$$

και

$$[(S \circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2\int_0^1 f(s)ds.$$

Δεν ισχύει ότι $T \circ S = S \circ T$. Αν ίσχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = [(S \circ T)(f)](t) \Longrightarrow t\int_0^1 sds = t^2\int_0^1 ds \Longrightarrow \frac{t}{2} = t^2$$

για κάθε $t \in [0,1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T \circ S\| \leqslant 1/2$ και $\|S \circ T\| \leqslant 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:

$$\|T\| = \|S\| = \|S \circ T\| = 1, \quad \|T \circ S\| = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 9

Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x,y) f(y) dy.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \leqslant (b-a) \max\{|\phi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

Η Tf είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο T ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x,y), (x_1,y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y_1)| < \varepsilon$. Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x,y), (x_1,y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y)| < \varepsilon$.

Έστω $x < x_1$ στο $[a, b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
|(Tf)(x_1) - (Tf)(x)| &= \left| \int_a^{x_1} \phi(x_1, y) f(y) dy - \int_a^{x} \phi(x, y) f(y) dy \right| \\
&\leqslant \left| \int_x^{x_1} \phi(x_1, y) f(y) dy \right| + \left| \int_a^{x} [\phi(x_1, y) - \phi(x, y)] f(y) dy \right| \\
&\leqslant \int_x^{x_1} |\phi(x_1, y)| \cdot |f(y)| dy + \int_a^{x} |\phi(x_1, y) - \phi(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\
&\leqslant \left(\max_{\Delta} |\phi| \right) \|f\| (x_1 - x) + \|f\| \varepsilon (x - a) \\
&< \left[\left(\max_{\Delta} |\phi| \right) + b - a \right] \varepsilon \|f\|.
\end{aligned}
$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η Tf είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &= \left| \int_a^{x} \phi(x, y) f(y) dy \right| \leqslant \int_a^{x} |\phi(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\
&\leqslant \left(\max_{\Delta} |\phi| \right) \|f\| (x - a) \leqslant \left[(b - a) \max_{\Delta} |\phi| \right] \|f\|.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$
\|Tf\| \leqslant \left[(b - a) \max_{\Delta} |\phi| \right] \|f\|.
$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant (b - a) \max_{\Delta} |\phi|$.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{C}^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $\mathcal{C}^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$ και $\|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|$. Αποδείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.

Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ με $f(0) = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 \Big|\int_0^t f'(s)ds\Big|^2 dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds\right)\left(\int_0^t 1^2 ds\right) dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds\right) t dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\
&\leqslant \|f\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{C}^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $\mathcal{C}^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Αποδείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.

Έστω τώρα τυχούσα $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0) = 0$, άρα $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leqslant \|g\|_2 + |f(0)| \leqslant \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leqslant 1$.

Άσκηση 11

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.
Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leqslant 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.
Αν $y \in B_Y$, αφού ο T είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.
Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.
($\Longleftarrow$) Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε, $y = T(\|y\|x) \in T(X)$. Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.
Ο T είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε $\|T(x/\|x\|)\| > 1 \Longrightarrow T(x/\|x\|) \notin B_Y$, ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.
Αφού ο T είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Άσκηση 15

Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

Αν $F(x) = 1$, τότε $1 = F(x) \leqslant \|F\| \cdot \|x\|$, άρα $\|x\| \geqslant \frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \geqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0 < \varepsilon < \|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| = 1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon) = a_\varepsilon > \|F\| - \varepsilon$. Τότε, $F(x_\varepsilon / a_\varepsilon) = 1$ και

$$\left\| \frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon} \right\| = \frac{1}{a_\varepsilon} < \frac{1}{\|F\| - \varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

Άσκηση 22

Αποδείξτε ότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

Για κάθε $y \in \ell_1$, η απεικόνιση $f_y : c_0 \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leqslant \|y\|_1$. Πράγματι,

$$|f_y(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sup_n |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

Ορίζουμε $T : \ell_1 \to c_0^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_1$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = \mathrm{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και $f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^{N} |y_k|$, οπότε $\|f_y\| \geqslant |f_y(x(N))| = \sum_{k=1}^{N} |y_k|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geqslant \|y\|_1$, άρα

$$\|T(y)\|_{c_0^*} = \|f_y\| = \|y\|_1.$$

Άσκηση 22

Αποδείξτε ότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in c_0^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_1$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$). Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$ όπου $x_k = \mathrm{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε, $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και

$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} |y_k|,$$

άρα $\sum_{k=1}^{N} |y_k| = |f(x(N))| \leqslant \|f\|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_1$ και $\|y\|_1 \leqslant \|f\|$. Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y. Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον c_0 και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον c_0.

Άσκηση 23

Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.

(α) Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι.

(α) Ορίζουμε $T : c \to c_0$ με $T(x) = (\xi, \xi_1 - \xi, \xi_2 - \xi, \dots)$, όπου $\xi = \lim \xi_k$. Από τον ορισμό του T είναι φανερό ότι $T(x) \in c_0$, δηλαδή ο T είναι καλά ορισμένος.

1. Ο T είναι ένα προς ένα: αν $T(x) = T(y)$, τότε $\xi = \lim \xi_k = \lim \eta_k = \eta$ και $\xi - \xi_m = \eta - \eta_m$ για κάθε m, οπότε $\xi_m = \eta_m$, $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = y$.
2. Ο T είναι επί: αν $y = (\eta_k) \in c_0$, τότε $x = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_3, \dots) \in c$ γιατί $\eta_1 + \eta_k \to \eta_1$, και $T(x) = y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.
3. Ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant 2$: παρατηρούμε αρχικά ότι αν $x = (\xi_k) \in c$ τότε $|\xi| = \lim_{k\to\infty} |\xi_k| \leqslant \|x\|_c$. Επίσης, $|\xi - \xi_k| \leqslant |\xi| + |\xi_k| \leqslant 2\|x\|_c$ για κάθε k, άρα
$$\|T(x)\|_{c_0} = \max\{|\xi|, \sup\{|\xi - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\}\} \leqslant 2 \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} = 2\|x\|_c.$$
4. Ομοίως ελέγχουμε ότι $\|T^{-1}\| \leqslant 2$. Άρα, οι c και c_0 είναι ισομορφικοί.

Άσκηση 23

Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.

(β) Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 *δεν* είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(β) Έστω $T : c_0 \to c$ ισομετρικός ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι $T(e_n) \in c_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: θα είχαμε $T(c_0) \subseteq c_0$ ενώ ο T είναι επί.
Γράφουμε $T(e_n) = (x_{nm})_{m=1}^{\infty}$. Έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T(e_{n_0}) \notin c_0$. Τότε, $\lim_m x_{n_0 m} = \ell \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ell > 0$ (αν $\ell < 0$, εργαζόμαστε όμοια).
Επίσης, $\ell \leqslant 1$ αφού $\sup_m |x_{n_0 m}| = \|T(e_{n_0})\| = 1$. Υπάρχει m_0 ώστε: για κάθε $m \geqslant m_0$, $x_{n_0 m} > \frac{\ell}{2}$.
Παρατηρήστε ότι: για κάθε n υπάρχει $m(n)$ ώστε $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$ (γιατί $\sup_m |x_{nm}| = \|T(e_n)\| = \|e_n\| = 1$). Επίσης, $n_1 \neq n_2 \implies m(n_1) \neq m(n_2)$. Αλλιώς, για κάποιο από τα $y = \pm e_{n_1} \pm e_{n_2}$ θα είχαμε $\|T(y)\| > 2 - \ell \geqslant 1$ ενώ $\|y\| = 1$.
Υπάρχει λοιπόν n ώστε $m(n) \geqslant m_0$ και $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$. Τότε, για ένα από τα $y = e_{n_0} \pm e_n$ έχουμε $\|T(y)\| \geqslant |x_{n_0 m(n)}| + |x_{nm(n)}| > \frac{\ell}{2} + \left(1 - \frac{\ell}{2}\right) = 1$ ενώ $\|y\| = 1$. Αυτό είναι άτοπο.

Άσκηση 23

Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.

(γ) Αποδείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

(γ) Παρατηρήστε ότι $c = c_0 \oplus \mathrm{span}\{e_0\}$, όπου $e_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Κάθε $x \in c$ γράφεται στη μορφή $x = x_0 e_0 + \sum_{n=1}^\infty (x_n - x_0) e_n$, όπου $x_0 = \lim_n x_n$. Αν $f \in c^*$ τότε

$$f(x) = x_0 f(e_0) + \sum_{n=1}^\infty (x_n - x_0) f(e_n) = x_0 \left(f(e_0) - \sum_{n=1}^\infty f(e_n) \right) + \sum_{n=1}^\infty x_n f(e_n)$$

(αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^\infty |f(e_n)|$ συγκλίνει). Θέτουμε $a_0 = f(e_0) - \sum_{n=1}^\infty f(e_n)$ και $a_n = f(e_n)$, $n \geqslant 1$. Η απεικόνιση $T : c^* \to \ell_1$ με $T(f) = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Άσκηση 24

Ορίστε μια νόρμα $\| \cdot \|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: η $\| \cdot \|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\| \cdot \|_\infty$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \| \cdot \|)$ και $(c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

Έστω (e_n) η βάση του c_{00}. Ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ θέτοντας $T(e_n) = ne_n$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο T είναι 1-1 και επί. Ορίζουμε μια δεύτερη νόρμα $\| \cdot \|_s$ στον c_{00}, θέτοντας $\|x\|_s = \|T(x)\|_\infty$. Ελέγξτε ότι η $\| \cdot \|_s$ είναι νόρμα.
Οι $\| \cdot |_s$ και $\| \cdot \|_\infty$ δεν είναι ισοδύναμες: $\|e_n\|_s = \|ne_n\|_\infty = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, ο $T : (c_{00}, \| \cdot \|_s) \to (c_{00}, \| \cdot \|_\infty)$ είναι ισομετρία: αν $x \in c_{00}$ τότε $\|T(x)\|_\infty = \|x\|_s$.

Άσκηση 34

Έστω X γραμμικός χώρος και $g, f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με την ιδιότητα $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Τότε, υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : X \to \mathbb{K}^n$ με $T(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ και το γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : T(X) \to \mathbb{K}$ με

$$\psi(T(x)) = g(x).$$

Ο $T(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$ και το ψ είναι καλά ορισμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $T(X)$: αν $T(x_1) = T(x_2) \in T(X)$, τότε $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, άρα $x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k)$. Από την υπόθεση, $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(g)$, δηλαδή $g(x_1) = g(x_2)$. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα.
Η ψ επεκτείνεται σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε: για κάθε $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$, $\Psi(t_1, \dots, t_n) = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n$.
Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε
$g(x) = \psi(T(x)) = \Psi(f_1(x), \dots, f_n(x)) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$. Δηλαδή,
$g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.

Άσκηση 35

(**Κριτήριο του Schur**) Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geqslant 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leqslant b p_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \leqslant c p_i$. Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση $T((\xi_i)_i) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\right)_i$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$.

Δείχνουμε ταυτόχρονα ότι ο T ορίζεται καλά και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Έστω $x = (\xi_i) \in \ell_2$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{ij}\Big|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j \sqrt{a_{ij}}}{\sqrt{p_j}} \sqrt{a_{ij} p_j}\Big|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij}}{p_j}\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j\right),\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$\|Tx\|_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij} c p_i}{p_j} = c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leqslant bc \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} p_j = bc\|x\|_2^2.$$

Από την $\|Tx\|_2^2 \leqslant bc\|x\|_2^2$ έπεται ότι $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

Άσκηση 36

(**Ανισότητα του Hilbert**) Αν $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1}\right| \leqslant \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2.$$

Η συνάρτηση $g_j(x) = 1/[(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}]$ είναι κυρτή για κάθε $j = 0, 1, 2, \dots$, οπότε, για $i = 0, 1, 2, \dots$, έχουμε

$$\frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \sum_{i=0}^{\infty} \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}.$$

Άσκηση 36

(**Ανισότητα του Hilbert**) Αν $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1}\right| \leqslant \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2 .$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Schur, με $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}}$, $p_i = \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}$, $b = c = \pi$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T : \ell_2 \to \ell_2$, με

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{i+j+1}\right)_{i=0}^{\infty} .$$

Αν $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1}\right| = \langle Tx, x\rangle \leqslant \|Tx\|_2 \|x\|_2 \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_2^2 \leqslant \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2 .$$