602. Ασκήσεις – Μέρος 3

Θεώρημα Hahn–Banach

24 Απριλίου 2021

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, και $p(x) = |f(x)|$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x+y) = |f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y).$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \geqslant 0$, τότε

$$p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| = \lambda p(x).$$

Άρα, το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Έστω $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \geqslant 0$, ισχύουν οι

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda\|x\|,$$

από τις γνωστές ιδιότητες της νόρμας.

Άσκηση 4

Αποδείξτε ότι η $p(x) = \limsup_n x_n$, όπου $x = (x_n) \in \ell_\infty$ ορίζει ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞.

Προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του lim sup: αν $x \in \ell_\infty$ και $\lambda \geqslant 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \limsup_n (\lambda x_n) = \lambda \limsup_n x_n = \lambda p(x),$$

και αν $x, y \in \ell_\infty$ τότε

$$p(x+y) = \limsup_n (x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n = p(x) + p(y).$$

Άσκηση 5

Έστω X χώρος με νόρμα, και $p : X \to \mathbb{R}$ υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $p(0) = 0$ και το p είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε $x_0 \in X$.

(α) Το p είναι συνεχές στο 0 και $p(0) = 0$, άρα για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|z\| < \delta \Longrightarrow |p(z)| < \varepsilon.$$

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\|x - x_0\| < \delta$, τότε και $\|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta$, οπότε

$$|p(x - x_0)| < \varepsilon, \qquad |p(x_0 - x)| < \varepsilon.$$

Από την υποπροσθετικότητα του p,

$$p(x) - p(x_0) \leqslant p(x - x_0) \leqslant |p(x - x_0)| < \varepsilon$$

και

$$p(x_0) - p(x) \leqslant p(x_0 - x) \leqslant |p(x_0 - x)| < \varepsilon,$$

άρα $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$. Δηλαδή, το p είναι συνεχές στο x_0.

Άσκηση 6

Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \to [0, +\infty)$ συνάρτηση τέτοια ώστε (α) $p(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, και (β) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η p είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο $B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ είναι κυρτό.

Έστω ότι η p είναι νόρμα: τότε ικανοποιεί και την $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω $x, y \in B$ και $t \in (0, 1)$. Έχουμε

$$p((1 - t)x + ty) \leqslant p((1 - t)x) + p(ty) = (1 - t)p(x) + tp(y) \leqslant (1 - t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1,$$

άρα $(1 - t)x + ty \in B$. Έπεται ότι το B είναι κυρτό.

Άσκηση 6

Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \to [0, +\infty)$ συνάρτηση τέτοια ώστε (α) $p(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, και (β) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η p είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο $B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ είναι κυρτό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το B είναι κυρτό. Από τις υποθέσεις της άσκησης, η p ικανοποιεί όλες οι ιδιότητες της νόρμας εκτός από την τριγωνική ανισότητα. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι αν $x, y \in X$ τότε $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$. Τότε, $p(x) > 0$ και $p(y) > 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{x}{p(x)} \in B$ και $\frac{y}{p(y)} \in B$. Για παράδειγμα, $p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = \frac{1}{p(x)} \cdot p(x) = 1$ (εφαρμόζουμε την ιδιότητα (β) με $\lambda = \frac{1}{p(x)} > 0$). Άρα, $\frac{x}{p(x)} \in B$ από τον ορισμό του B.
Επιλέγουμε $t = \frac{p(y)}{p(x)+p(y)} \in (0, 1)$, οπότε $1 - t = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$. Αφού το B είναι κυρτό, έχουμε

$$(1-t)\frac{x}{p(x)} + t\frac{y}{p(y)} \in B \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y) \in B.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{p(x)+p(y)} p(x+y) = p\left(\frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y)\right) \leqslant 1,$$

δηλαδή $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Άσκηση 3

Έστω p ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο X. Ορίζουμε $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Αποδείξτε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leqslant p(x)$, $x \in Z$.

Το f είναι προφανώς γραμμικό, γιατί αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = ax_0, y = bx_0 \in Z$, τότε

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda a + \mu b)x_0) = (\lambda a + \mu b)p(x_0) \\ &= \lambda(ap(x_0)) + \mu(bp(x_0)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Για την ανισότητα $f(x) \leqslant p(x)$ παρατηρούμε ότι: αν $a \geqslant 0$, τότε $f(ax_0) = ap(x_0) = p(ax_0)$, ενώ αν $a < 0$, τότε

$$f(ax_0) = -f((-a)x_0) = -p(-ax_0) \leqslant p(ax_0),$$

αφού κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές ικανοποιεί την $-p(-z) \leqslant p(z)$.

Άσκηση 7

Έστω X γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

Παίρνουμε τυχόν $x_0 \neq 0$ στον X. Θεωρούμε τον $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$, και ορίζουμε $g : Z \to \mathbb{R}$, με $g(ax_0) = ap(x_0)$. Από την Άσκηση 3, το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z, και ικανοποιεί την $g(z) \leqslant p(z)$ στον Z.
Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, που επεκτείνει το g, και ικανοποιεί την

$$f(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

Τέλος,

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) \Longrightarrow f(x) \geqslant -p(-x), \qquad x \in X.$$

Δηλαδή, $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Άσκηση 14*

Έστω X χώρος με νόρμα, και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\mathrm{liminf}_n f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{limsup}_n f_n(x), \qquad x \in X.$$

Το $p(x) = \limsup f_n(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον X. Αν $x, y \in X$, τότε

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \limsup f_n(x+y) = \limsup [f_n(x) + f_n(y)] \leqslant \limsup f_n(x) + \limsup f_n(y) \\ &= p(x) + p(y), \end{aligned}$$

και αν $\lambda \geqslant 0$,

$$p(\lambda x) = \limsup f_n(\lambda x) = \limsup [\lambda f_n(x)] = \lambda \limsup f_n(x) = \lambda p(x).$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση 7: υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\liminf f_n(x) = -\limsup f_n(-x) \leqslant f(x) \leqslant \limsup f_n(x), \qquad x \in X.$$

Άσκηση 8*

Έστω X γραμμικός χώρος και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα $|f(x)| \leqslant p_1(x) + p_2(x)$ για κάθε $x \in X$, αποδείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = f_1 + f_2$ και $|f_i(x)| \leqslant p_i(x), \quad i = 1, 2,\ x \in K$.

Ορίζουμε $p : X \times X \to \mathbb{R}$ με $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η p είναι ημινόρμα. Ο $W = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times X$. Αν ορίσουμε $\psi_0 : W \to \mathbb{K}$ με $\psi_0(x, x) = f(x)$, τότε το ψ_0 είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον W και φράσσεται από την p: έχουμε

$$|\psi_0(x, x)| = |f(x)| \leqslant p_1(x) + p_2(x) = p(x, x)$$

για κάθε $(x, x) \in W$. Από το θεώρημα Hahn–Banach, το ψ_0 επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ με

$$|\psi(x_1, x_2)| \leqslant p_1(x_1) + p_2(x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in X \times X$. Ορίζουμε $f_1 : X \to \mathbb{K}$ με $f_1(x) = \psi(x, 0)$ και $f_2 : X \to \mathbb{K}$ με $f_2(x) = \psi(0, x)$. Τα f_1, f_2 είναι γραμμικά συναρτησοειδή και

$$f(x) = \psi_0(x, x) = \psi(x, x) = \psi(x, 0) + \psi(0, x) = f_1(x) + f_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f = f_1 + f_2$. Επίσης,
$|f_1(x)| = |\psi(x, 0)| \leqslant p(x, 0) = p_1(x) + p_2(0) = p_1(x)$ για κάθε $x \in X$ και, όμοια, $|f_2(x)| \leqslant p_2(x)$ για κάθε $x \in X$.

Άσκηση 10

Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X, τέτοιος ώστε: αν $f \in X^*$ και $f|_Y \equiv 0$, τότε $f \equiv 0$. Αποδείξτε ότι $Y = X$.

Έστω $x \in X \setminus Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός και $x \notin Y$, υπάρχει $f \in X^*$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$f(y) = 0, \ \ y \in Y, \qquad \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η υπόθεση μας λέει ότι

$$f|_Y \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Άρα, $Y = X$.

Άσκηση 11

Έστω Y υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Ορίζουμε

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = \bigcap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}$.

Έστω $y \in \overline{Y}$. Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $y_n \to y$. Για κάθε $f \in A$ έχουμε $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(y) = \lim f(y_n) = 0.$$

Δηλαδή, $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Αφού το $f \in A$ ήταν τυχόν, $y \in \cap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}$. Αφού το $y \in \overline{Y}$ ήταν τυχόν,

$$\overline{Y} \subseteq \bigcap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}.$$

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $z \in \cap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\} \setminus \overline{Y}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, $g(z) \neq 0$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{Y}$. Τότε, $g \in A$ και $z \notin \mathrm{Ker}(g)$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 12

Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι: $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f(x) = 0$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$. Έστω $f \in X^*$ με $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$. Λόγω γραμμικότητας του f συμπεραίνουμε ότι $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathrm{span}(A)$, και λόγω συνέχειας του f συμπεραίνουμε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ (από την αρχή της μεταφοράς ή χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι κλειστός και περιέχει τον $\mathrm{span}(A)$). Ειδικότερα, $f(x) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$ ισχύει $f(x) = 0$ και ότι $x \notin \overline{\mathrm{span}(A)}$. Ειδικότερα, $x \neq 0$. Από βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn–Banach υπάρχει $g \in X^*$ τέτοιο ώστε $g|_{\overline{\mathrm{span}(A)}} \equiv 0$, $\|g\| = 1$ και $g(x) = \|x\| > 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g|_A \equiv 0$ και $g(x) \neq 0$.

Άσκηση 13

Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ με $f\big|_Y \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X. Έστω $f \in X^*$ με $f\big|_Y \equiv 0$. Τότε, $Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ και αφού ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X συμπεραίνουμε ότι $X = \overline{Y} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, δηλαδή $\mathrm{Ker}(f) = X$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f \equiv 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f\big|_Y \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$. Έστω ότι ο Y δεν είναι πυκνός υπόχωρος του X. Τότε, ο $\overline{Y}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \neq 0$, $f \in X^*$ ώστε $f\big|_Y \equiv 0$. Αυτό είναι άτοπο (από την υπόθεση θα είχαμε $f \equiv 0$).

Άσκηση 15

Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X και $f \in Y^*$. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A(f) := \{g \in X^* : g\big|_Y = f \text{ και } \|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}\}$$

είναι μη κενό και κυρτό.

Από το θεώρημα Hahn-Banach γνωρίζουμε ότι υπάρχει $g_0 \in X^*$ τέτοιο ώστε $g_0\big|_Y = f$ και $\|g_0\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Τότε $g_0 \in A(f)$, άρα το $A(f)$ είναι μη κενό.
Έστω $g_1, g_2 \in A(f)$ και $t \in (0,1)$. Αφού ο X^* είναι διανυσματικός χώρος, έχουμε $(1-t)g_1 + tg_2 \in X^*$. Επίσης, για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} |(1-t)g_1(x) + tg_2(x)| &\leqslant (1-t)|g_1(x)| + t|g_2(x)| \leqslant ((1-t)\|g_1\|_{X^*} + t\|g_2\|_{X^*})\|x\| \\ &= ((1-t)\|f\|_{Y^*} + t\|f\|_{Y^*})\|x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} \leqslant \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε $(1-t)g_1 + tg_2\big|_Y = (1-t)g_1\big|_Y + tg_2\big|_Y = (1-t)f + tf = f$, άρα

$$\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} \geqslant \|f\|_{Y^*}.$$

Συνεπώς, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$, και έπεται ότι $(1-t)g_1 + tg_2 \in A(f)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $A(f)$ είναι κυρτό.

Άσκηση 16

Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leqslant 1, \|f\| \leqslant 1\} < +\infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι $\|T\| = M$.

Το δεξιό μέλος ισούται με

$$M = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leqslant 1} f(Tx) \right) = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y,$$

από το θεώρημα Hahn-Banach (για το $Tx \in Y$). Όμως, ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < +\infty,$$

και τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|$.

Άσκηση 17*

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα, και $X \neq \{0\}$. Αποδείξτε ότι αν ο $B(X,Y)$ είναι πλήρης, τότε ο Y είναι πλήρης.

Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$. Έστω (y_n) βασική ακολουθία στον Y. Ορίζουμε $T_n : X \to Y$ με $T_n(x) = f(x)y_n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|f(x)(y_n - y_m)\|_Y = \left(\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |f(x)|\right) \cdot \|y_n - y_m\| \\ &= \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

δηλαδή, η (T_n) είναι βασική ακολουθία στον $B(X,Y)$. Αφού ο $B(X,Y)$ έχει υποτεθεί πλήρης, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $T_n \to T$, δηλαδή

$$(*) \qquad T(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x)y_n), \quad x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $y = T(x_0)$, έχουμε $y_n \to y$ από την $(*)$.

Άσκηση 19

Έστω Y πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Αποδείξτε ότι οι X^* και Y^* είναι ισομετρικά ισομορφικοί.

Αφού ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X, γνωρίζουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : Y \to \mathbb{K}$ (και γενικότερα, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Y \to Z$, όπου Z χώρος με νόρμα) έχει μοναδική επέκταση σε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $g : X \to \mathbb{K}$. Επιπλέον, λόγω της πυκνότητας του Y στον X, βλέπουμε εύκολα ότι $\|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ (για παράδειγμα, δείξτε πρώτα ότι η B_Y είναι πυκνή στην B_X, οπότε $\|g\|_{X^*} = \sup\{|g(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|g(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\} = \|f\|_{Y^*}$).
Ορίζουμε $T : Y^* \to X^*$ με $T(f) = g$, όπου g η μοναδική αυτή επέκταση του f.
Αποδεικνύουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $f_1, f_2 \in Y^*$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, τότε $g := t_1 T(f_1) + t_2 T(f_2) \in X^*$ και $g\big|_Y = t_1 T(f_1)\big|_Y + t_2 (Tf_2)\big|_Y = t_1 f_1 + t_2 f_2$. Αφού $T(t_1 f_1 + t_2 f_2)\big|_Y = t_1 f_1 + t_2 f_2$, λόγω μοναδικότητας της επέκτασης συμπεραίνουμε ότι $T(t_1 f_1 + t_2 f_2) = t_1 T(f_1) + t_2 T(f_2)$.
Από την $\|T(f)\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ έχουμε ότι ο T είναι ισομετρία.
Τέλος, ο T είναι επί: αν $g \in X^*$ τότε $f := g\big|_Y \in Y^*$ και το g είναι η μοναδική φραγμένη επέκταση του f. Άρα, $g = T(f)$.
Από τα παραπάνω έχουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Άσκηση 20

Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $E_n = \overline{\mathrm{span}}\{x_k : k \neq n\}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει ακολουθία (f_n) στον X^* ώστε $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.

(β) Για κάθε n ισχύει $x_n \notin E_n$.

(α) $\implies$ (β): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_k \in \mathrm{Ker}(f_n)$ για κάθε $k \neq n$ (από την υπόθεση έχουμε $f_n(x_k) = 0$ αν $k \neq n$) και αφού ο $\mathrm{Ker}(f_n)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X έπεται ότι $\mathrm{span}\{x_k : k \neq n\} \subseteq \mathrm{Ker}(f_n)$. Όμως, $f_n \in X^*$ άρα ο $\mathrm{Ker}(f_n)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Άρα, $E_n = \overline{\mathrm{span}}\{x_k : k \neq n\} \subseteq \mathrm{Ker}(f_n)$. Δηλαδή, $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in E_n$. Αφού $f_n(x_n) = 1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_n \notin E_n$.

(β) $\implies$ (α): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο E_n είναι κλειστός υπόχωρος του X και $x_n \notin E_n$, από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x_n) \neq 0$ και $f_n\big|_{E_n} \equiv 0$. Πολλαπλασιάζοντας, αν χρειαστεί, το f_n με κατάλληλο $\lambda \neq 0$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n(x_n) = 1$. Αφού $x_k \in E_n$ για κάθε $k \neq n$, έχουμε $f_n(x_k) = 0$ για κάθε $k \neq n$. Δηλαδή, $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία (f_n) που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ικανοποιεί το (α).

Άσκηση 21

Έστω $X \neq \{0\}$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και (x_n) πυκνή ακολουθία στον X. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (f_n) στον X^* με $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$ για κάθε n. Αποδείξτε επίσης ότι κάθε τέτοια ακολουθία διαχωρίζει τα σημεία του X και ικανοποιεί την $\sup\limits_n |f_n(x)| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Για να δείξουμε ότι η (f_n) διαχωρίζει τα σημεία του X αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $0 \neq z \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(z) \neq 0$. Έστω $z \neq 0$ και ας υποθέσουμε ότι $f_n(z) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|z - x_n\| < \frac{1}{2}\|z\|$. Τότε,

$$\|x_n\| = |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(z)| = |f_n(x_n - z)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x_n - z\| < \frac{1}{2}\|z\|.$$

Όμως, $\|x_n\| \geqslant \|z\| - \|x_n - z\| > \|z\| - \frac{1}{2}\|z\|$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε $x \neq 0$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|x\|$ επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_N - x\| < \varepsilon$. Όπως πριν, έχουμε $\|x_N\| > \|x\| - \varepsilon$ και

$$\|x\| - \varepsilon < \|x_N\| = |f_N(x_N)| \leqslant |f_N(x)| + |f_N(x_N - x)| \leqslant |f_N(x)| + \|f_N\| \cdot \|x_N - x\| < |f_N(x)| + \varepsilon,$$

δηλαδή $\sup_n |f_n(x)| \geqslant |f_N(x)| > \|x\| - 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon \in (0, \|x\|/2)$ ήταν τυχόν, έχουμε $\sup\limits_n |f_n(x)| \geqslant \|x\|$. Αντίστροφα, για κάθε n έχουμε $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x\| = \|x\|$, άρα $\sup\limits_n |f_n(x)| \leqslant \|x\|$.

Άσκηση 22

Έστω Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του χώρου Banach X. Αποδείξτε ότι:

(α) Η απεικόνιση $T : X^* \to Y^*$ με $T(f) = f\big|_Y$ είναι γραμμική, φραγμένη και επί του Y^*.

(α) Αν $f \in X^*$ τότε η $T(f) = f\big|_Y : Y \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική απεικόνιση και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$|(Tf)(y)| = |f(y)| \leqslant \|f\|_{Y^*}\|y\|,$$

δηλαδή $T(f) \in Y^*$ και $\|T(f)\|_{Y^*} \leqslant \|f\|_{X^*}$. Επίσης, αν $f, g \in X^*$ και $a, b \in \mathbb{K}$ τότε

$$T(af + bg) = af + bg\big|_Y = af\big|_Y + bg\big|_Y = aT(f) + bT(g),$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leqslant 1$. Για να δείξουμε ότι ο T είναι επί, θεωρούμε $g \in Y^*$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f\big|_Y = g$. Τότε, $T(f) = g$.

Άσκηση 22

Έστω Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του χώρου Banach X. Αποδείξτε ότι:

(β) Υπάρχει μια 1-1 (όχι αναγκαστικά γραμμική) απεικόνιση $\varphi : Y^* \to X^*$ με $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$.

(γ) Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε και ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

(β) Για κάθε $y^* \in Y^*$ επιλέγουμε $f_{y^*} \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_{y^*}\big|_Y = y^*$ και $\|f_{y^*}\| = \|y^*\|$ (θεώρημα Hahn-Banach) και ορίζουμε $\varphi(y^*) = f_{y^*}$. Τότε, $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$. Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι 1-1: έστω y_1^*, y_2^* με $\varphi(y_1^*) = \varphi(y_2^*)$. Τότε, $y_1^* = \varphi(y_1^*)\big|_Y = \varphi(y_2^*)\big|_Y = y_2^*$. Άρα, η φ είναι 1-1.

(γ) Έστω $D := \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε $y_n^* = x_n^*\big|_Y \in Y^*$ και θα δείξουμε ότι το $E := \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y^*. Έστω $y^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*\big|_Y = y^*$. Από την πυκνότητα του D στον X^* υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^* - x_n^*\|_{X^*} < \varepsilon$. Τότε, $(x^* - x_n^*)\big|_Y = y^* - y_n^*$ και

$$\begin{aligned}\|y^* - y_n^*\|_{Y^*} &= \sup_{x \in B_Y} |y^*(x) - y_n^*(x)| = \sup_{x \in B_Y} |x^*(x) - x_n^*(x)| \leqslant \sup_{x \in B_X} |x^*(x) - x_n^*(x)| \\ &= \|x^* - x_n^*\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $y_n^* \in E$, βλέπουμε ότι $y^* \in \overline{E}$. Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y^* = \overline{E}$. Αφού το E είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του Y^*. ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

Άσκηση 23

Έστω Y μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο $T : X^* \to Y^*$ με $T(f) = f\big|_Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, $\|T\| = 1$ και ο T είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1 αν ο Y είναι κλειστός.

Όταν λέμε ότι ο Y είναι μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του X εννοούμε ότι $Y \neq \{0\}$ και $Y \neq X$.

(α) Το είδαμε στο (α) της προηγούμενης άσκησης (Άσκηση 22).

(β) Πάλι στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι $\|T(f)\|_{Y^*} \leqslant \|f\|_{X^*}$ για κάθε $f \in X^*$. Άρα, $\|T\| \leqslant 1$ και $T(B_{X^*}) \subseteq B_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αν $g \in B_{Y^*} \setminus \{0\}$ υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f\big|_Y = g$ και $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*} \leqslant 1$ (θεώρημα Hahn-Banach). Άρα, $g = T(f) \in T(B_{X^*})$, το οποίο αποδεικνύει ότι $B_{Y^*} \subseteq T(B_{X^*})$. Αυτό δείχνει και ότι $\|T\| \geqslant \frac{\|f\|_{X^*}}{\|g\|_{Y^*}} = 1$, δηλαδή $\|T\| = 1$. Έχουμε τώρα δείξει ότι $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι επί.
Έστω ότι ο $Y \neq \{0\}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f \neq 0$ και $f\big|_Y \equiv 0$. Τότε, $T(f) = T(0) = 0$ ενώ $f \neq 0$. Άρα, ο T δεν είναι 1-1.

Άσκηση 23

Έστω Y μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X. Αποδείξτε ότι:

(γ) Αν ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X τότε ο T είναι ισομετρία (δείξτε πρώτα ότι η B_Y είναι πυκνό υποσύνολο της B_X).

(γ) Έστω ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X. Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{B_Y} = B_X$: θεωρούμε $x \neq 0$ με $\|x\| < 1$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ βρίσκουμε $y \in Y$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$. Τότε,

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| > \|x\| + \varepsilon < 1,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap B_Y \neq \varnothing$. Άρα, $x \in \overline{B_Y}$. Αυτό δείχνει ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα $B(0,1)$ του X περιέχεται στην $\overline{B_Y}$, άρα $B_X = \overline{B(0,1)} \subseteq \overline{B_Y}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι απλός: έχουμε $B_Y \subseteq B_X$, άρα $\overline{B_Y} \subseteq \overline{B_X} = B_X$.
Τώρα, για κάθε $f \in X^*$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{Y^*} &= \sup\{|(Tf)(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\} \\ &= \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|_{X^*}, \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοιούμε τη συνέχεια της f και το γεγονός ότι $\overline{B_Y} = B_X$ (παρατηρήστε ότι τα δύο supremum είναι ίσα).

Άσκηση 24

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική ισομετρία $T : X \to \ell_\infty$.

Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$f_n(x_n) = \|f_n\| = 1.$$

Ορίζουμε $T : X \to \ell_\infty$ με $T(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f_n(x)| \leqslant \|x\|$ για κάθε n, γραμμικός, και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| \leqslant \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.
Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in S_X$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x - x_n\| < \varepsilon$, οπότε $|f_n(x) - f_n(x_n)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x - x_n\| < \varepsilon$, άρα

$$|f_n(x)| > |f_n(x_n)| - \varepsilon = 1 - \varepsilon,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| > 1 - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T(x)\| = 1$ για κάθε $x \in S_X$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι ισομετρία.

Άσκηση 25*

Έστω X χώρος Banach, (x_i) ακολουθία στον X και (c_i) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

(α) $\Longrightarrow$ (β): Έστω $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Τότε,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i,$$

άρα

$$\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| = \left|f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)\right| \leqslant \|f\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\|,$$

δηλαδή ισχύει το (β) με $M = \|f\|$.

Άσκηση 25*

Έστω X χώρος Banach, (x_i) ακολουθία στον X και (c_i) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \mathrm{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ του X. Κάθε $x \in Y$ γράφεται (όχι αναγκαστικά μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Παρατηρούμε ότι αν το ίδιο x γράφεται και στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$, τότε αν για παράδειγμα $m > n$ έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) c_i + \sum_{i=n+1}^m \beta_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) x_i + \sum_{i=n+1}^m \beta_i x_i\right\|$$

$$= M \left\|\sum_{i=1}^m \beta_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\| = M\|x - x\| = 0,$$

δηλαδή $\sum_{i=1}^m \beta_i c_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$. Όμοια ελέγχουμε ότι αυτό ισχύει και αν $m < n$ ή $m = n$.

Άσκηση 25*

Έστω X χώρος Banach, (x_i) ακολουθία στον X και (c_i) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

(β) Υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Έπεται ότι η σύνάρτηση $f_0 : Y \to \mathbb{K}$ με $f_0(x) = f_0\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$, όπου $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, είναι καλά ορισμένη. Παρατηρούμε ότι $f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της f_0 μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι είναι γραμμική. Τέλος, από την υπόθεση έχουμε ότι αν $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in Y$ τότε

$$|f_0(x)| = \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right\| = M\|x\|,$$

δηλαδή $f_0 \in Y^*$ και $\|f_0\|_{Y^*} \leqslant M$. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f_0 σε κάποιο $f \in X^*$ με $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} \leqslant M$.
Αφού $x_i \in Y$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε $f(x_i) = f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 26*

Έστω X χώρος με νόρμα και W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι μια νόρμα $|\cdot|$ στον W είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στον W. Να δείξετε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$, της οποίας ο περιορισμός στον W να είναι η $|\cdot|$.

Από την υπόθεση, υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε $a|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|$ για κάθε $x \in W$. Για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$ έχουμε $|f(x)| \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{a}\|x\|$ δηλαδή το f είναι $\|\cdot\|$–φραγμένο στον W και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επιλέξουμε επέκταση $G_f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{K}$ με $\|G_f\| \leqslant 1/a$. Ορίζουμε $|\cdot|'$ στον X με

$$|x|' = \max\left\{\frac{1}{b}\|x\|, \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\}\right\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|\cdot|'$ είναι νόρμα στον X. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\|x\| \leqslant b|x|'$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, αν $\|x\| = 1$ τότε $|G_f(x)| \leqslant \frac{1}{a}$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$, οπότε $|x|' \leqslant \frac{1}{a}$. Έπεται ότι

$$a|x|' \leqslant \|x\| \leqslant b|x|', \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $x \in W$. Έχουμε $\frac{1}{b}\|x\| \leqslant |x|$ και $|G_f(x)| = |f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$. Άρα, $|x|' \leqslant |x|$. Όμως,

$$|x|' \geqslant \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = \sup\{|f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = |x|.$$

Άρα, τελικά, $|x| = |x|'$ για κάθε $x \in W$.

Άσκηση 27

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Αποδείξτε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.

Η $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική σαν σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, και για κάθε $x \in X$,

$$|[T^*(f)](x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|Tx\|_Y \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

δηλαδή $T^*(f) \in X^*$ και $\|T^*(f)\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|$. Αυτό δείχνει ότι ο T^* ορίζεται καλά, και

$$(*) \qquad \|T^*\| \leqslant \|T\|.$$

Η γραμμικότητα του T^* ελέγχεται εύκολα:

$$T^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda(f \circ T) + \mu(g \circ T) = \lambda T^*(f) + \mu T^*(g).$$

Για την ισότητα των $\|T\|$ και $\|T^*\|$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach: Έστω $x \in X$. Τότε, $Tx \in Y$ και υπάρχει $f \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $f(y) = \|y\| = \|Tx\|$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= f(y) = (f \circ T)(x) = [T^*(f)](x) \leqslant \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T\| \leqslant \|T^*\|$, και από την $(*)$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 28*

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο T είναι ισομορφισμός τότε ο T^* είναι ισομορφισμός.

(α) Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$. Έστω ότι $T^*(y_1^*) = T^*(y_2^*)$ για κάποια $y_1^*, y_2^* \in Y^*$. Τότε, $y_1^*(Tx) = y_2^*(Tx)$ για κάθε $x \in X$, και αφού ο $T : X \to Y$ είναι επί έπεται ότι $y_1^*(y) = y_2^*(y)$ για κάθε $y \in Y$, δηλαδή $y_1^* = y_2^*$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T^* είναι 1-1.
Δείχνουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y^* : Y \to \mathbb{K}$ με $y^*(y) = x^*(T^{-1}(y))$. Αφού ο T είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση, άρα η $y^* = x^* \circ T^{-1}$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, δηλαδή $y^* \in Y^*$. Παρατηρούμε ότι $T^*(y^*) = y^* \circ T = x^* \circ T^{-1} \circ T = x^*$. Άρα $x^* \in T^*(Y^*)$ και αφού το $x^* \in X^*$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι ο T^* είναι επί.

Άσκηση 28*

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο T είναι ισομορφισμός τότε ο T^* είναι ισομορφισμός.

Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(T^*)^{-1}$ είναι φραγμένος. Από το γεγονός ότι ο T είναι ισομορφισμός έχουμε
$\|T^{-1}(y)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|y\| \Longrightarrow T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\| B_X \Longrightarrow B_Y \subseteq \|T^{-1}\| T(B_X)$. Έπεται ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|T^*(y^*)\|_{X^*} &= \sup\{|y^*(Tx)| : x \in B_X\} \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \sup\{|y^*(y)| : \|y \leqslant 1\} \\ &= \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|y^*\|_{Y^*}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, αφού ο T^* είναι επί, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\|(T^*)^{-1}(x^*)\|_{Y^*} \leqslant \|T^{-1}\| \, \|x^*\|_{X^*},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $(T^*)^{-1} : X^* \to Y^*$ είναι φραγμένος. Άρα, ο T^* είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 28*

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(β) Οι χώροι c_0 και $\mathcal{C}[0,1]$ δεν είναι ισομορφικοί.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : c_0 \to \mathcal{C}[0,1]$. Τότε, ο $T^* : (\mathcal{C}[0,1])^* \to c_0^*$ είναι ισομορφισμός, από το (α), δηλαδή οι $(\mathcal{C}[0,1])^*$ και c_0^* είναι ισομορφικοί. Γνωρίζουμε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_1, ο οποίος είναι διαχωρίσιμος, άρα ο c_0^* είναι διαχωρίσιμος. Έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ είναι διαχωρίσιμος.

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $t \in [0,1]$ θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\delta_t : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{K}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε δ_t είναι φραγμένο και ότι $\|\delta_t\| = 1$. Επίσης, αν $t, s \in [0,1]$ και $t \neq s$ τότε

$$\|\delta_t - \delta_s\| = \sup\{|\delta_t(f) - \delta_s(f)| : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{|f(t) - f(s)| : \|f\| \leqslant 1\} = 2,$$

διότι μπορούμε να ορίσουμε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(s) = 1$, $f(t) = -1$ και $\|f\| = 1$. Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία στη μοναδιαία σφαίρα του $(\mathcal{C}[0,1])^*$ που ανά δύο έχουν απόσταση ίση με 2, και από αυτό γνωρίζουμε ότι έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Άσκηση 29*

Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \ldots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$-δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς, αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \cdots = y_k^*(x) = 0.$$

Άσκηση 29*

Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|y + \lambda x\| &\geqslant \|y_j + \lambda x\| - \|y - y_j\| \geqslant \|y_j + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant y_j^*(y_j + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon},\end{aligned}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Έπεται το συμπέρασμα για κάθε $y \in F$: Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $0 \neq y \in F$, τότε $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \left\| \frac{y}{\|y\|} + \lambda \frac{x}{\|y\|} \right\|,$$

δηλαδή $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι αν ο X έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο X^* έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Ξέρουμε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_j) = a_j$, $j = 1, \ldots, n$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Τα $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j \leqslant n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)(x_j) = t_1 f_1(x_j) + \cdots + t_n f_n(x_j) = t_j \cdot 1 = t_j.$$

Άρα, $t_1 = \cdots = t_n = 0$.

Άσκηση 30

Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε $\dim(X^*) = n$.

(α) Θεωρούμε μια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του X και τα γραμμικά συναρτησοειδή $f_k : X \to \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$ με

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = a_i.$$

Κάθε $f_k \in X^*$ διότι $\dim(X) < \infty$. Επίσης, αν $f \in X^*$ και αν θέσουμε $t_i = f(e_i)$, για κάθε $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in X$ έχουμε

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i(x),$$

δηλαδή $f = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i \in \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $X^* = \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Επίσης, τα $f_1, \dots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε $0 = (t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} t_i f_k(e_i) = t_i$, διότι $f_k(e_i) = 0$ αν $k \neq i$ και $f_i(e_i) = 1$.

Δείξαμε ότι τα $f_1, \dots, f_n$ είναι βάση του X^*, άρα $\dim(X^*) = n$.

Άσκηση 30

Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(β) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε ο X είναι αυτοπαθής.

(γ) Αν ο X είναι απειροδιάστατος τότε ο X^* είναι απειροδιάστατος.

(β) Θεωρούμε τη φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$. Γνωρίζουμε ότι η τ είναι γραμμική ισομετρία, άρα είναι 1-1. Από το (α) έχουμε $\dim(X^*) = n$, άρα πάλι από το (α) παίρνουμε $\dim(X^{**}) = \dim((X^*)^*) = \dim(X^*) = n$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X) < \infty$, άρα η τ είναι επί. Συνεπώς, ο X είναι αυτοπαθής.

(γ) Έστω ότι $\dim(X^*) = n < \infty$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X^*) = n < \infty$. Όμως, η $\tau : X \to \tau(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $\tau(X)$ είναι υπόχωρος του X^{**}, άρα $\dim(X) = \dim(\tau(X)) \leqslant \dim(X^{**}) < \infty$.

Άσκηση 18

Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \dots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\|_{X^*} = 1\right\}$$
$$= \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| : |a_i| \leqslant 1\right\}.$$

Συμβολίζουμε με A, B και C τα τρία supremum στην εκφώνηση της άσκησης. Για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| = x^*\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| \leqslant B.$$

Συνεπώς, $A \leqslant B$. Για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$ μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_i = \pm 1$ ώστε $|x^*(x_i)| = \varepsilon_i x^*(x_i)$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) = x^*\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right) \leqslant \|x^*\|_{X^*}\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| \leqslant A.$$

Συνεπώς, $B \leqslant A$ και έχουμε αποδείξει ότι $A = B$.

Άσκηση 18

Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}\sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} &= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\|_{X^*} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| : |a_i| \leqslant 1\right\}.\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με A, B και C τα τρία supremum στην εκφώνηση της άσκησης.
Η ανισότητα $A \leqslant C$ είναι προφανής αν παρατηρήσουμε ότι

$$\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} \subseteq \left\{\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| : |a_i| \leqslant 1\right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τη συνάρτηση $G : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\|.$$

Παρατηρούμε ότι η G είναι συνεχής και κυρτή, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια κορυφή $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, του κύβου $[-1,1]^n$.

Άσκηση 18

Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\|_{X^*} = 1\right\}$$
$$= \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| : |a_i| \leqslant 1\right\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in [-1,1]^n$ ισχύει ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| = G(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \sup\{G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = \pm 1\}$$
$$= \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} = A.$$

Συνεπώς, $C \leqslant A$.

Άσκηση 31

Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι αυτοπαθής και Y είναι κλειστός υπόχωρος του X τότε ο Y είναι αυτοπαθής.

(α) Γνωρίζουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$ είναι επί και πρέπει να δείξουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau_1 : Y \to Y^{**}$ είναι επί. Έστω $y^{**} : Y^* \to \mathbb{K}$ στον Y^{**}. Ορίζουμε $x^{**} : X^* \to \mathbb{K}$ με

$$x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y).$$

Το x^{**} είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον X^* και

$$\begin{aligned}\sup\{|x^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} &= \sup\{|y^{**}(x^*\big|_Y) : \|x^*\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{|y^{**}(y^*) : \|y^*\| \leqslant 1\} = \|y^{**}\|,\end{aligned}$$

(για τη μεσαία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $\|x^*\| \leqslant 1$ τότε $\|x^*\big|_Y\| \leqslant 1$, άρα $\{x^*\big|_Y : \|x^*\| \leqslant 1\} \subseteq \{y^* : \|y^*\| \leqslant 1\}$). Άρα, $x^{**} \in X^{**}$.

Άσκηση 31

Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι αυτοπαθής και Y είναι κλειστός υπόχωρος του X τότε ο Y είναι αυτοπαθής.

Αφού ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Δηλαδή, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y).$$

Θα δείξουμε ότι $x \in Y$. Αν $x \notin Y$ τότε, αφού ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*\big|_Y \equiv 0$ και $x^*(x) \neq 0$. Τότε, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι

$$0 = y^{**}(x^*\big|_Y) = x^*(x) \neq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.
Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x) = y^{**}$. Έστω $y^* \in Y^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*\big|_Y = y^*$. Γράφουμε

$$[\tau_1(x)](y^*) = y^*(x) = x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y) = y^{**}(y^*).$$

Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\tau_1(x) = y^{**}$.
Από τα παραπάνω έχουμε ότι κάθε $y^{**} \in Y^{**}$ γραφεται ως $y^{**} = \tau_1(x)$ για κάποιο $x \in Y$. Άρα, $\tau_1(Y) = Y^{**}$, δηλαδή ο Y είναι αυτοπαθής.

Άσκηση 31

Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(β) Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.

(β) Έστω $\tau : X \to X^{**}$ και $\tau_1 : X^* \to X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις.
Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tau(X) = X^{**}$. Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$. Ζητάμε $x_0^* \in X^*$ ώστε $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Ορίζουμε το x_0^* ως εξής: αν $x \in X$ τότε $\tau(x) \in X^{**}$, οπότε θέτουμε

$$x_0^*(x) := (x_0^{***})(\tau(x)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το x_0^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αφού

$$|x_0^*(x)| = |(x_0^{***})(\tau(x))| \leqslant \|x_0^{***}\| \cdot \|\tau(x)\| = \|x_0^{***}\| \cdot \|x\|,$$

βλέπουμε ότι $x_0^* \in X^*$ και $\|x_0^*\| \leqslant \|x_0^{***}\|$.
Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Άρα,

$$\begin{aligned}[\tau_1(x_0^*)](x^{**}) &= x^{**}(x_0^*) = [\tau(x)](x_0^*) = x_0^*(x) = x_0^{***}(\tau(x)) \\ &= x_0^{***}(x^{**}).\end{aligned}$$

Άσκηση 31

Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(β) Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.

Αντίστροφα, έστω ότι $\tau_1(X^*) = X^{***}$ και ας υποθέσουμε ότι $\tau(X) \neq X^{**}$. Τότε, ο $\tau(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} άρα υπάρχει μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x_0^{***} \in X^{***}$ ώστε $x_0^{***}(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_0^*(x) = [\tau(x)](x_0^*) = [\tau_1(x_0^*)](\tau(x)) = x_0^{***}(\tau(x)) = 0,$$

δηλαδή $x_0^* = 0$. Όμως τότε, $x_0^{***} = \tau_1(x_0^*) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.