602. Ασκήσεις – Μέρος 4

Τελεστές μεταξύ χώρων Banach

29 Μαΐου 2021

Άσκηση 2

Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον X, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

Αν $x_n \to x$, τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, για παράδειγμα, στον ℓ_2 πάρουμε $x_n = e_n$ τα διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης. Πράγματι, για κάθε $f \in \ell_2^*$ υπάρχει $y \in \ell_2$ ώστε $f(x) = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x \in \ell_2$ και $\langle e_n, y \rangle \to 0$ από την ανισότητα Bessel. Άρα, έχουμε

$$f(e_n) \to 0 = f(0)$$

για κάθε $f \in \ell_2^*$.

Όμως, $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα δεν ισχύει ότι $e_n \to 0$.

Άσκηση 3

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Αποδείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.
Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, αποδείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη, άρα η υπόθεση μας δίνει το εξής: για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη. Αφού ο X είναι χώρος Banach, από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο Y είναι πλήρης, έχουμε: για κάθε $x \in X$ η $(T_n x)$ είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει το $\lim_n T_n x \in Y$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι, από το πρώτο μέρος, έχουμε $\|T_n x\| \leqslant M\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Αφού $T_n x \to Tx$, βλέπουμε ότι

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in X$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant M$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots)$. Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο T^{-1} φραγμένος; Εξηγήστε.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ο $T^{-1} : Y \to X$ ορίζεται από την

$$T^{-1}(y) = (\eta_1, 2\eta_2, 3\eta_3, \ldots).$$

Έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_k \frac{|\xi_k|}{k} \leqslant \sup_k |\xi_k| = \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant 1$. Όμως, για κάθε n έχουμε

$$\frac{\|T^{-1}(e_n)\|}{\|e_n\|} = \frac{\|ne_n\|}{\|e_n\|} = n,$$

άρα ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος. Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δεν εφαρμόζεται, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

Άσκηση 7

Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$ για κάθε $f \in X^*$.

Ορίζουμε $T_n : X^* \to \ell_1$, με $T_n(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), 0, 0, \ldots)$.

Κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T_n(f)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\right) \cdot \|f\|.$$

Άρα, ο T_n είναι φραγμένος, και $\|T_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Η υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$, μας λέει ότι η ακολουθία $(T_n(f))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1 για κάθε $f \in X^*$. Ο X^* είναι χώρος Banach, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(f)\| \leqslant M\|f\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή, $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$ για κάθε $f \in X^*$.

Άσκηση 8

Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leqslant K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

Θεωρούμε την ακολουθία $(g_n) = (\frac{1}{\varepsilon_n} f_n)$ στον X^*. Από την υπόθεση,

$$|g_n(x)| \leqslant K_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή, η (g_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|g_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|f_n\| \leqslant M\varepsilon_n \to 0,$$

άρα, $\|f_n\| \to 0$.

Άσκηση 9

Έστω X, Y χώροι Banach, και $T_n \in B(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

(γ) Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.

Από το (α) στο (β): αν $x \in X$, τότε

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \cdot \|x\| \leqslant (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\|,$$

άρα

$$\sup_n \|T_n x\| \leqslant (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\| < +\infty.$$

Από το (β) στο (γ): όπως πρίν, για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, έχουμε

$$\sup_n |g(T_n x)| \leqslant \sup_n (\|g\| \cdot \|T_n x\|) = \|g\| \cdot \sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$

Από το (γ) στο (β): Για κάθε $g \in Y^*$, η ακολουθία $(g(T_n x))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Στη θεωρία είδαμε ότι αυτό μας δίνει ότι η $(T_n x)$ είναι φραγμένη στον Y.
Από το (β) στο (α): αυτό είναι ακριβώς το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος.

Άσκηση 10

Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$

Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2).$$

Ο I είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και η υπόθεση μας δίνει ότι ο I είναι συνεχής στο 0, άρα φραγμένος τελεστής. Αφού ο X είναι πλήρης ως προς τις δύο νόρμες, το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας λέει ότι ο $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης φραγμένος.

Υπάρχουν λοιπόν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leqslant a\|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leqslant b\|x\|_2.$$

Οι δύο ανισότητες δείχνουν ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Άσκηση 11

Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

Ο T είναι φραγμένος, άρα παίρνοντας $b = \|T\|$ έχουμε

$$\|Tx\| \leqslant b\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και αφού οι X, Y είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αν $x \in X$, τότε $x = T^{-1}(Tx)$ άρα

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει και η αριστερή ανισότητα, με $a = 1/\|T^{-1}\|$.

Άσκηση 14

Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $\mathrm{Im}(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

Αν ο $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, τότε είναι χώρος Banach, και ο $T : X \to \mathrm{Im}(T)$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to X$ είναι φραγμένος.

Αντίστροφα: έστω ότι ο $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to X$ είναι φραγμένος, και έστω $y_n \in \mathrm{Im}(T)$ με $y_n \to y \in Y$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = y$.
Υπάρχουν $x_n \in X$ με $Tx_n = y_n$, και αφού ο T^{-1} είναι φραγμένος, έχουμε

$$(*) \qquad \|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η (y_n) συγκλίνει στον Y άρα είναι βασική ακολουθία στον Y, και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.
Ο T είναι φραγμένος και $x_n \to x$, άρα $y_n = Tx_n \to Tx$. Από μοναδικότητα του ορίου,

$$y = Tx \in \mathrm{Im}(T),$$

δηλαδή το $\mathrm{Im}(T)$ είναι κλειστό.

Άσκηση 15 - η άσκηση που «χάθηκε»

(α)Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

Ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Ειδικότερα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,\delta)$ (θυμηθείτε το βασικό λήμμα στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης).

Έστω $0 \neq y \in Y$. Τότε, $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in B_Y(0,\delta)$, άρα υπάρχει $z \in X$ με $\|z\| < 1$ και $Tz = \frac{\delta y}{2\|y\|}$. Θέτουμε $x = \frac{2\|y\|z}{\delta}$. Από τη γραμμικότητα του T,

$$T(x) = T\left(\frac{2\|y\|z}{\delta}\right) = \frac{2\|y\|}{\delta}\frac{\delta y}{2\|y\|} = y,$$

και

$$\|x\| = \frac{2\|y\| \cdot \|z\|}{\delta} \leqslant \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο, με $M = 2/\delta$.

Άσκηση 15

(β) Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο τελεστή $S : \ell_1 \to Y$ υπάρχει φραγμένος τελεστής $W : \ell_1 \to X$ ώστε $T \circ W = S$.

Αφού ο T είναι επί, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $S(e_n) = y_n \in Y$ και βρίσκουμε $x_n \in X$ ώστε $\|x_n\| \leqslant M\|y_n\| \leqslant M\|S\|$. Ορίζουμε $W : \ell_1 \to X$ με $W(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. Ο W είναι καλά ορισμένος, διότι

$$\sum_{n=1}^{N} \|t_n x_n\| \leqslant M\|S\| \sum_{n=1}^{N} |t_n| \leqslant M\|S\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right\|_1 ,$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ συγκλίνει στον X. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι

$$\left\| W\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leqslant M\|S\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|,$$

δηλαδή ο W είναι φραγμένος και $\|W\| \leqslant M\|S\|$. Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(T \circ W)(e_n) = T(x_n) = y_n = S(e_n).$$

Από τη συνέχεια των $T \circ W$ και S βλέπουμε εύκολα ότι $T \circ W = S$.

Άσκηση 16

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι $y = Tx$.
Για κάθε $f \in Y^*$ ισχύουν τα εξής:
(α) Αφού $Tx_n \to y$ και το $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές,

$$f(Tx_n) \to f(y).$$

(β) Από την υπόθεση, αφού $x_n - x \to 0$,

$$f(T(x_n - x)) = f(Tx_n) - f(Tx) \to 0 \Longrightarrow f(Tx_n) \to f(Tx).$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in Y^*$, $f(Tx) = f(y)$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$y = Tx$$

(βασική συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach είναι ότι ο Y^* «διαχωρίζει» τα σημεία του Y).

Άσκηση 17

Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

Αν ο T είναι φραγμένος, τότε για κάθε $g \in Y^*$ το $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (ως σύνθεση συνεχών γραμμικών συναρτήσεων), δηλαδή $g \circ T \in X^*$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, με την υπόθεση $g \in Y^* \implies g \circ T \in X^*$ δείχνουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος: έστω $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y.
Αν $g \in Y^*$, από τη μία μεριά έχουμε

$$Tx_n \to y \implies g(Tx_n) \to g(y),$$

και από την άλλη, αφού $g \circ T \in X^*$ και $x_n \to x$, έχουμε

$$g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \to (g \circ T)(x) = g(Tx).$$

Δηλαδή,

$$g(y) = g(Tx), \quad g \in Y^*$$

και αφού ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y, παίρνουμε $y = Tx$. Έπεται ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

Άσκηση 18

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.

Ο T είναι φραγμένος και επί τελεστής μεταξύ χώρων Banach, άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $u_n \in X$ ώστε $T(u_n) = y_n - y_0$ και $\|u_n\| \leqslant M\|y_n - y_0\|$. Αφού $y_n \to y_0$, συμπεραίνουμε ότι $u_n \to 0$.

Ορίζουμε $x_n = x_0 + u_n$. Τότε, $T(x_n) = T(x_0) + T(u_n) = y_0 + (y_n - y_0) = y_n$ και $x_n = x_0 + u_n \to x_0$.

Άσκηση 19

Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ για τις οποίες ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι για τις $f_n : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Ο X είναι χώρος Banach και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φραγμένη (γιατί συγκλίνει). Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|f_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n(x) \to f(x)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n - x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant |f_n(x_n - x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant M\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \to 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, $f_n(x_n) \to f(x)$.

Άσκηση 20

Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$, ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \to Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y.$$

Θεωρούμε την οικογένεια τελεστών $\{T_x : x \in B_X\}$. Κάθε $T_x : Y \to Z$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\sup\{\|T_x(y)\| : x \in B_X\} = \sup\{\|T_y(x)\| : x \in B_X\} = \|T_y\| < \infty.$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_x\| \leqslant M$ για κάθε $x \in B_X$. Τότε,

$$\|T(x, y)\| = \|T_x(y)\| \leqslant M\|y\| \quad \text{για κάθε } y \in Y,\ x \in B_X.$$

Έστω $x \neq 0$ στον X. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το $x_1 = \frac{x}{\|x\|} \in B_X$ παίρνουμε

$$\|T(x, y)\| = \|T_y(\|x\|x_1)\| = \|x\|\,\|T_y(x_1)\| = \|x\|\,\|T(x_1, y)\| \leqslant M\|x\|\,\|y\|.$$

Η ανισότητα ισχύει προφανώς αν $x = 0$ ($T(0, y) = T_y(0) = 0$).

Άσκηση 23

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Έστω Z υπόχωρος του Y. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο Z είναι χώρος Banach τότε ο υπόχωρος $T^{-1}(Z)$ του X είναι χώρος Banach.

(β) Αν ο Z είναι πυκνός στον Y τότε ο $T^{-1}(Z)$ είναι πυκνός στον X.

(α) Ο Z είναι πλήρης, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του Y. Αφού ο T είναι συνεχής γραμμική απεικόνιση, ο $T^{-1}(Z)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι και ο $T^{-1}(Z)$ είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

(β) Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι $\overline{T^{-1}(Z)} \neq X$. Τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε $T^{-1}(Z) \cap U = \varnothing$. Έπεται ότι $Z \cap T(U) = \varnothing$ (αν είχαμε $T(u) = z \in Z$ για κάποιο $u \in U$ τότε θα είχαμε $u \in T^{-1}(Z) \cap U$, άτοπο). Όμως ο Z είναι πυκνός στον Y και το $T(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y ως εικόνα του U μέσω της ανοικτής απεικόνισης T), άρα $Z \cap T(U) = \varnothing$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άσκηση 24

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to X$.

Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της $B_X(0,1)$ και ορίζουμε $T : \ell_1 \to X$ με $T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n,\ s = (s_n) \in \ell_1$. Ο T είναι καλά ορισμένος: για κάθε $s = (s_n) \in \ell_1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \cdot \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty,$$

και αφού ο X είναι χώρος Banach αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ συγκλίνει στον X. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα, και η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι $\|T(s)\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} s_n x_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |s_n| \cdot \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| = \|s\|_1$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in B_X(0,1)$. Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, αν θέσουμε $u_n = \frac{n-1}{n} e_{k_n}$ έχουμε $u_n \in B_{\ell_1}(0,1)$ και $T(u_n) = \frac{n-1}{n} x_{k_n} \to x$. Αυτό αποδεικνύει ότι $B_X(0,1) \subseteq \overline{T(B_{\ell_1}(0,1))}$. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του δεύτερου βήματος της απόδειξης του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης βλέπουμε ότι $B_X(0,1/2) \subseteq T(B_{\ell_1}(0,1)) \subseteq T(\ell_1)$, και έπεται ότι $T(\ell_1) = X$.

Άσκηση 25

Έστω $T : c_0 \to c_0$ ο γραμμικός τελεστής με $T(x) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

(α) Είναι ο T φραγμένος τελεστής;

(β) Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;

(α) Αν $x = (x_k) \in c_0$ και $\|x\|_\infty \leqslant 1$, έχουμε $|x_k| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $\frac{|x_k|}{k} \leqslant |x_k| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x_k|}{k} : k \in \mathbb{N}\right\} \leqslant 1.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

(β) Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$: αν $T(x) = 0$ τότε $\frac{x_k}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $x_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = 0$. Αφού $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, ο T είναι $1-1$. Ας υποθέσουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Τότε θα είναι επί: πράγματι, έχουμε $0 \in T(B(0,1))$ και αφού υποθέσαμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0,\delta) \subseteq T(B(0,1)) \subseteq T(c_0)$, το οποίο δείχνει ότι $T(c_0) = c_0$ (υπόχωρος του c_0 με μη κενό εσωερικό). Αφού ο T είναι επίσης $1-1$ και φραγμένος, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Δηλαδή, ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έχουμε $T^{-1}(e_k) = ke_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\frac{\|T^{-1}(e_k)\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = \frac{\|ke_k\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = k \to \infty.$$

Άσκηση 25

Έστω $T : c_0 \to c_0$ ο γραμμικός τελεστής με $T(x) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

(γ) Είναι το $T(c_0)$ πυκνό υποσύνολο του c_0;

(γ) Παρατηρούμε ότι $c_{00} \subseteq T(c_0)$. Αν $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, \ldots) \in c_{00}$, τότε $y = T(x)$ όπου $x = (y_1, 2y_2, \ldots, Ny_N, 0, \ldots) \in c_0$. Άρα,

$$\overline{T(c_0)} \supseteq \overline{c_{00}} = c_0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $T(c_0)$ είναι πυκνό υποσύνολο του c_0.

Άσκηση 27

Έστω $T : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$ τότε $(Tf_n)(t) \to (Tf)(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Θεωρούμε $(f_n, Tf_n) \in G(T)$ τέτοια ώστε

$$(f_n, Tf_n) \to (f, g) \in \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1].$$

Έχουμε $f_n \to f$ και $Tf_n \to g$ ομοιόμορφα. Από την υπόθεση, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $(Tf_n)(t) \to (Tf)(t)$. Όμως, $Tf_n \to g$ κατά σημείο, άρα $(Tf_n)(t) \to g(t)$.

Έπεται ότι $(Tf)(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $Tf = g$. Άρα, $(f, g) = (f, Tf) \in G(T)$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $G(T)$ είναι κλειστό.

Άσκηση 28

Αποδείξτε ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος Banach. Αν $I : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, εξετάστε αν οι I και I^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.

Ορίζουμε $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ και $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$ (δηλαδή $x_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$). Τότε, $x_n \in c_{00} \subset \ell_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $x \in \ell_\infty \setminus \ell_1$ διότι $\sum_{k=1}^\infty |x_k| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$. Παρατηρούμε ότι $\|x - x_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$.
Αφού $x_n \in \ell_1$ και $x_n \to x \notin \ell_1$, ο ℓ_1 δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞. Συνεπώς, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.

Ο $I : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1$ δεν είναι φραγμένος. Για την ακολουθία (x_n) που ορίσαμε παραπάνω, έχουμε

$$\frac{\|I(x_n)\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty.$$

Ο $I^{-1} : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ είναι φραγμένος: για κάθε $x = (x_k) \in \ell_1$ έχουμε

$$\|I^{-1}(x)\|_\infty = \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1,$$

άρα $\|I^{-1}\| \leqslant 1$.

Άσκηση 29

Αποδείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{C}[0,2] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $Tf = f\big|_{[0,1]}$ είναι φραγμένος και υπολογίστε τη νόρμα του. Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα και

$$\|Tf\|_\infty = \|f\big|_{[0,1]}\|_\infty = \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 2\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,2]$. Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Για τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ στο $[0,2]$ έχουμε $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. Έπεται ότι $\|T\| = 1$.

Δείχνουμε ότι ο T είναι επί: αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, μπορούμε να την επεκτείνουμε συνεχώς στο $[0,2]$ θέτοντας $f(t) = g(t)$ για $t \in [0,1]$ και $f(t) = g(1)$ για $t \in [1,2]$. Τότε, $Tf = f\big|_{[0,1]} = g$.

Αφού οι $\mathcal{C}[0,2]$ και $\mathcal{C}[0,1]$ είναι χώροι Banach και ο T είναι φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.

Άσκηση 30

Έστω $T : \ell_1 \to \ell_2$ φραγμένος γραμμικός και 1-1 τελεστής. Εξετάστε αν είναι δυνατόν ο $T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2.

Έστω ότι υπάρχει φραγμένος και 1-1 γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to \ell_2$ τέτοιος ώστε ο $H = T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2. Αφού ο T είναι 1-1, ο H είναι απειροδιάστατος υπόχωρος του ℓ_2.

Αφού είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_2, ο H είναι χώρος Hilbert με τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του ℓ_2. Είναι επίσης διαχωρίσιμος, ως υπόχωρος του ℓ_2. Έπεται ότι ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.
Ο $T : \ell_1 \to H$ είναι φραγμένος 1-1 και επί γραμμικός τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Έχουμε λοιπόν ότι ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με τον H. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για παράδειγμα, ο ℓ_1^* δεν είναι διαχωρίσιμος (είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞) ενώ ο H^* είναι διαχωρίσιμος (αφού ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2, ο H^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2). Όμως έχουμε δει σε ασκήσεις ότι αν δύο χώροι με νόρμα είναι ισόμορφοι τότε οι δυϊκοί τους χώροι είναι επίσης ισόμορφοι.

Άσκηση 31

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geqslant \delta\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

(β) Ο T είναι 1-1 και ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(α) $\Rightarrow$ (β): Αν $Tx = 0$ τότε $\delta\|x\| \leqslant \|Tx\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$ και $x = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, το οποίο δείχνει ότι ο T είναι $1-1$. Έστω τώρα $y_n \in T(X)$ και $y \in Y$ ώστε $y_n \to y$. Υπάρχουν $x_n \in X$ τέτοια ώστε $y_n = Tx_n$ και, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|Tx_m - Tx_n\| = \frac{1}{\delta}\|y_m - y_n\|.$$

Όμως η (y_n) είναι συγκλίνουσα, άρα είναι βασική, και από την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι η (x_n) είναι βασική στον X. Ο X είναι χώρος Banach, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Από τη συνέχεια του T παίρνουμε $y_n = Tx_n \to Tx$, και αφού $y_n \to y$ έπεται ότι $y = Tx \in T(X)$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(β) $\Rightarrow$ (α): Ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach Y, άρα είναι χώρος Banach κι αυτός. Ο $T : X \to T(X)$ είναι φραγμένος $1-1$ και επί γραμμικός τελεστής, άρα το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δείχνει ότι ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|$, δηλαδή ισχύει το (α) με $\delta = 1/\|T^{-1}\|$.

Άσκηση 32

Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με τις εξής ιδιότητες: (α) ο T είναι επί, (β) υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geq \rho\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Από το (β) βλέπουμε ότι ο T είναι $1-1$: αν $T(x) = 0$ τότε $\rho\|x\| \leq \|T(x)\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$, δηλαδή $x = 0$. Επίσης, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος: έστω $y \in Y$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$. Τότε,

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\rho}\|T(x)\| = \frac{1}{\rho}\|y\|,$$

δηλαδή $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho}$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T = (T^{-1})^{-1}$ είναι φραγμένος.

Άσκηση 33

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$. Αποδείξτε ότι ο I είναι φραγμένος, ο I^{-1} δεν είναι φραγμένος, και συμπεράνατε ότι ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι χώρος Banach.

Το γεγονός ότι ο I είναι φραγμένος προκύπτει άμεσα από την

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty,$$

η οποία ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Το γεγονός ότι ο I^{-1} δεν είναι φραγμένος προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν $f_n(t) = n - n^2 t$ στο $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ και $f_n(t) = 0$ στο $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ τότε $\|f_n\|_\infty = n$ ενώ $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες. Αν ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ ήταν χώρος Banach τότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο I θα ήταν ισομορφισμός, δηλαδή ο I^{-1} θα ήταν φραγμένος.

Άσκηση 35

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $x_n \in X$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον X, τότε $T_n(x_n) \to 0$.

(α) ⇒ (β) Έστω $x_n \in X$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ να συγκλίνει. Τότε, $x_n \to 0$. Συνεπώς,

$$\|T_n(x_n)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x_n\| \leq M\|x_n\| \to 0.$$

Άρα, $T_n(x_n) \to 0$.

(β) ⇒ (α) Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α). Τότε, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_m) φυσικών αριθμών ώστε $\|T_{k_m}\| > m^4$. Άρα υπάρχουν $u_{k_m} \in S_X$ ώστε $\|T_{k_m}(u_{k_m})\| > m^4$, $m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) στον X θέτοντας $x_n = \frac{1}{m^2} u_{k_m}$ αν $n = k_m$ και $x_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|u_{k_m}\|}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (διότι, συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach). Από το (β) ισχύει $T_n(x_n) \to 0$. Όμως, $\|T_{k_m}(x_{k_m})\| = \frac{1}{m^2}\|T_{k_m}(u_{k_m})\| > \frac{m^4}{m^2} = m^2 \to +\infty$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ισχύει το (α).

Άσκηση 36

Έστω X χώρος με νόρμα, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ και $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n$.

(β) Υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| \leq M \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right\|$ για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

(α) $\Rightarrow$ (β) Για κάθε $\alpha_1, \ldots . \alpha_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^n \alpha_i c_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right\| \, \|x_0\|,$$

και το ζητούμενο έπεται με $M = \|x_0\|$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $f_1, \ldots, f_m$ παράγουν τον $\mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ για κάποιον $1 \leq m \leq n$. Τότε, η απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ είναι γραμμική, συνεχής και επί.
Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $T((M+1)B_X) \supseteq \delta B_{\ell_2^n}$. Δηλαδή, το $T((M+1)B_X)$ είναι κυρτό και έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω ότι $(c_1, \ldots, c_m) \notin T((M+1)B_X)$. Τότε, υπάρχει μη μηδενικό $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i$$

για κάθε $x \in (M+1)B_X$, δηλαδή

$$(M+1) \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i \leq M \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|,$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση: έχουμε $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \neq 0$.
Άρα, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Έστω $m < s \leq n$. Τότε, υπάρχουν $r_1, \ldots, r_m$ ώστε $f_s = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i$. Από την υπόθεση,

$$\left| c_s - \sum_{i=1}^{m} r_i c_i \right| \leq M \cdot \left\| f_s - \sum_{i=1}^{m} r_i f_i \right\| = 0,$$

άρα $c_s = \sum_{i=1}^{m} r_i c_i = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x_0) = f_s(x_0)$. Δηλαδή, $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n$.

Άσκηση 37

Έστω X χώρος Banach και (x_k) ακολουθία στον X με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $t = (t_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει

Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : X^* \to \ell_1$ με

$$T_n(x^*) = (x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n), 0, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x^*\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\right) \|x^*\|$$

για κάθε $x^* \in X^*$, άρα οι T_n είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ η ακολουθία $(T_n(x^*))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1: πράγματι,

$$\sup_n \|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty.$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leqslant M$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant M\|x^*\|.$$

Άσκηση 37

Έστω X χώρος Banach και (x_k) ακολουθία στον X με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $t = (t_k) \in c_0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει

Είδαμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant M\|x^*\|.$$

Έστω τώρα $t = (t_k) \in c_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ είναι βασική, απ' όπου έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και αφού $t_k \to 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t_k| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $k \geqslant n_0$. Αν τώρα $n > m \geqslant n_0$ θεωρούμε το $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} t_k x_k$ και βρίσκουμε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $|x^*(s_n - s_m)| = \|s_n - s_m\|$. Δηλαδή,

$$\|s_n - s_m\| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} t_k x^*(x_k) \right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |t_k| \cdot |x^*(x_k)| \leqslant \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} |x^*(x_k)|.$$

Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ παίρνουμε

$$\|s_n - s_m\| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant \varepsilon M \|x^*\| = \varepsilon M.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (s_n) είναι βασική ακολουθία.

Άσκηση 38

Έστω X χώρος Banach και έστω $T : X \to X$ και $S : X^* \to X^*$ γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^*(Tx) = (Sx^*)(x)$. Τότε, οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές.

Δείχνουμε ότι ο S έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n^*, S(x_n^*)) \to (x^*, z^*)$ για κάποια $x_n^*, x^*, z^* \in X^*$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_n^*(Tx) = (Sx_n^*)(x) \to z^*(x)$$

και

$$x_n^*(Tx) \to x^*(Tx) = (Sx^*)(x).$$

Δηλαδή,

$$z^*(x) = (Sx^*)(x)$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $z^* = S(x^*)$. Δηλαδή $(x^*, z^*) = (x^*, S(x^*))$, το οποίο δείχνει ότι ο S έχει κλειστό γράφημα. Άρα, ο S είναι φραγμένος.

Δείχνουμε τώρα ότι ο T έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ για κάποια $x_n, x, y \in X$. Έστω $x^* \in X^*$. Αφού $x_n \to x$ στον X, έχουμε $(Sx^*)(x_n) \to (Sx^*)(x)$ δηλαδή $x^*(Tx_n) \to x^*(Tx)$. Αφού $Tx_n \to y$, έχουμε $x^*(Tx_n) \to x^*(y)$. Δηλαδή, $x^*(y) = x^*(Tx)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Έπεται ότι $Tx = y$, άρα ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος.

Άσκηση 39

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο T^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{T(X)} = Y$.

(β) Ο T είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.

(α) Υποθέτουμε ότι ο T^* είναι 1-1. Αν $\overline{T(X)} \neq Y$, υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $y^* \neq 0$ και $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$. Όμως τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$, άρα $T^*(y^*) = 0$, δηλαδή $y^* = 0$ αφού ο T^* είναι 1-1. Αυτό είναι άτοπο.
Αντίστροφα, αν $\overline{T(X)} = Y$ και $T^*(y^*) = 0$, τότε $y^*(Tx) = [T^*(y^*)](x) = 0$ για κάθε $x \in X$, και λόγω της συνέχειας του y^*, $y^*(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{T(X)} = Y$, δηλαδή $y^* = 0$. Άρα, ο T^* είναι 1-1.

(β) Υποθέτουμε ότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Τότε, ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y. Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y_1^* : T(X) \to \mathbb{K}$ με $y_1^* = x^* \circ T^{-1}$. Το y_1^* είναι φραγμένο, και από το θεώρημα Hahn–Banach επεκτείνεται σε ένα $y^* \in Y^*$. Τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = y_1^*(Tx) = x^*(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T^*(y^*) = x^*$. Άρα, ο T^* είναι επί.
Αντίστροφα, αν ο T^* είναι επί, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης υπάρχει $r > 0$ ώστε $T^*(B_{Y^*}) \supseteq rB_{X^*}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |T^*(y^*(x)| \geq \sup_{x^* \in rB_{X^*}} |x^*(x)| = r\|x\|.$$

Αυτό δείχνει ότι ο $T : X \to T(X)$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 40

Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.

Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Αν $\pi : X \to X/Y$ είναι η φυσιολογική απεικόνιση $\pi(x) = [x]$, έχουμε δει ότι $\|\pi(x_n) - \pi(x_m)\|_{X/Y} \leqslant \|x_n - x_m\|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η $(\pi(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy στον X/Y. Αφού ο X/Y είναι πλήρης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $= \|\pi(x_n - x_0)\|_{X/Y} = \|\pi(x_n) - \pi(x_0)\|_{X/Y} \to 0$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{X/Y}$ μπορούμε τότε να βρούμε $y_n \in Y$ ώστε $\|x_n - x_0 - y_n\| \to 0$. Αφού η $(x_n - x_0)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X, έπεται ότι η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Ο Y είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $y_n \to y_0$. Τότε,

$$x_n = (x_n - x_0 - y_n) + x_0 + y_n \to x_0 + y_0.$$