602. Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 21/4/2018

1. (3μ) (α) Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

(β) Έστω X χώρος Banach και (Y_n) ακολουθία γραμμικών υποχώρων του X με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n ώστε ο Y_n να είναι πυκνός στον X.

(γ) Είναι ο c_{00} κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞; Αν όχι, να βρεθεί η κλειστή του θήκη στον ℓ_∞.

2. (2μ) (α) Έστω Y χώρος Banach και (y_n) ακολουθία στον Y. Αποδείξτε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνει σε κάποιο $y \in Y$.

(β) Έστω Y χώρος Banach και (z_n) ακολουθία στον Y με $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to Y$ ως εξής: για κάθε $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots) \in \ell_2$ θέτουμε

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z_n.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος και φραγμένος γραμμικός τελεστής, και ότι

$$\|T\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

3. (2μ) Έστω $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$. Θεωρούμε τον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ και ορίζουμε $T : C[0,1] \to c_0$ με $T(f) = \Big(f(x_1), \frac{f(x_2)}{2}, \ldots, \frac{f(x_k)}{k}, \ldots \Big)$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και υπολογίστε την $\|T\|$.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C[0,1]$ ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και $\|T(f)\|_{c_0} < \varepsilon$.

4. (2μ) (α) Έστω Y χώρος με νόρμα. Θεωρούμε έναν n-διάστατο υπόχωρο F του Y και μια βάση $\{y_1, \ldots, y_n\}$ του F. Αποδείξτε ότι υπάρχουν φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή $g_1, \ldots, g_n \in Y^*$ τέτοια ώστε $g_i(y_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ (όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$).

(β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε ο $F = T(X)$ να έχει πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $y_1, \ldots, y_n \in Y$ και γραμμικά ανεξάρτητα συναρτησοειδή $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ ώστε

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$

για κάθε $x \in X$.

5. (3μ) (α) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε ο X είναι διαχωρίσιμος. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y διανυσματικός υπόχωρος του X^* με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \neq 0$ στον X υπάρχει $f \in Y$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = X^*$.

Καλή Επιτυχία!