602. Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 6/6/2018

1. (2μ) (α) Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο A του X ώστε $\overline{\mathrm{span}(A)} = X$.

(β) Αποδείξτε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞ και ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

2. (2μ) (α) Έστω $x \in [0,1]$ και $T_x : C[0,1] \to \mathbb{R}$ το συναρτησοειδές που ορίζεται από την $T_x(f) = f(x)$. Αποδείξτε ότι το $T_x : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ενώ το $T_x : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο.

(β) Έστω $X = (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $\psi : X \to \mathbb{R}$ το γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται από την

$$\psi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt.$$

Αποδείξτε ότι $\psi \in X^*$ αλλά δεν υπάρχει $f \in B_X$ τέτοια ώστε $|\psi(f)| = \|\psi\|$. Χρησιμοποιώντας αυτό το παράδειγμα εξηγήστε γιατί ο X δεν είναι αυτοπαθής.

3. (2μ) (α) Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$. Αποδείξτε πλήρως ότι αν για κάθε $f \in X^*$ το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$ είναι φραγμένο τότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\| \leqslant M$ για κάθε $x \in A$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι αν $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι δύο νόρμες σε έναν γραμμικό χώρο X οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ το οποίο είναι συνεχές ως προς τη μία από τις δύο αυτές νόρμες αλλά ασυνεχές ως προς την άλλη.

4. (2μ) Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_j) = c_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή $f_i : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

(γ) Θέτουμε $Y = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$.

5. (2μ) Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε μη κενό $A \subseteq H$ ορίζουμε $A^\perp = \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0 \text{ για κάθε } a \in A\}$. Επίσης θέτουμε $A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$.

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\emptyset \neq A \subseteq H$, ο $A^\perp$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

(β) Έστω F υπόχωρος του H. Αποδείξτε ότι $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

(γ) Έστω F, G κλειστοί υπόχωροι του H. Αποδείξτε ότι

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{και} \quad (F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}.$$

6. (2μ) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός και επί τελεστής με την εξής ιδιότητα: υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\|T(x)\| \geqslant c\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής.

(β) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(ii) Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Καλή Επιτυχία!